

Struktur Aljabar 1

UNDANG-UNDANG REPUBLIK INDONESIA NOMOR 28 TAHUN 2014
TENTANG
HAK CIPTA
Lingkup Hak Cipta

Pasal 1 Ayat 1 :

1. Hak Cipta adalah hak eksklusif pencipta yang timbul secara otomatis berdasarkan prinsip deklaratif setelah suatu ciptaan diwujudkan dalam bentuk nyata tanpa mengurangi pembatasan sesuai dengan ketentuan peraturan perundang-undangan.

Ketentuan Pidana:

Pasal 113

1. Setiap Orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp100.000.000 (seratus juta rupiah).
2. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).
3. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf a, huruf b, huruf e, dan/atau huruf g untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 4 (empat) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp1.000.000.000,00 (satu miliar rupiah).
4. Setiap Orang yang memenuhi unsur sebagaimana dimaksud pada ayat (3) yang dilakukan dalam bentuk pembajakan, dipidana dengan pidana penjara paling lama 10 (sepuluh) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp4.000.000.000,00 (empat miliar rupiah).

Pasal 114

Setiap Orang yang mengelola tempat perdagangan dalam segala bentuknya yang dengan sengaja dan mengetahui membiarkan penjualan dan/atau pengandaan barang hasil pelanggaran Hak Cipta dan/atau Hak Terkait di tempat perdagangan yang dikelolanya sebagaimana dimaksud dalam Pasal 10, dipidana dengan pidana denda paling banyak Rp100.000.000,00 (seratus juta rupiah).

Petrus Fendiyanto

Struktur Aljabar 1

Diterbitkan Oleh



Struktur Aljabar 1

Penulis : Petrus Fendiyanto
Tata Letak : Riza Ardyanto
Desain Cover : Ridwan Nur M

Penerbit:

CV. Bintang Semesta Media

Anggota IKAPI Nomor 147/DIY/2021

Jl. Karangsari, Gang Nakula, RT 005, RW 031,
Sendangtirta, Berbah, Sleman, Yogyakarta 57773

Telp: 4358369. Hp: 085865342317

Facebook: Penerbit Bintang Madani

Instagram: @bintangpustaka

Website: www.bintangpustaka.com

Email: bintangsemestamedia@gmail.com

redaksibintangpustaka@gmail.com

Cetakan Pertama, Juni 2022

Bintang Semesta Media Yogyakarta

x + 231 hal : 14.5 x 20.5 cm

ISBN : 978-623-5361-34-5

Dicetak Oleh:

Percetakan Bintang 085865342319

Hak cipta dilindungi undang-undang

All right reserved

Isi di luar tanggung jawab percetakan

Prakata

Buku ini disusun dalam rangka melengkapi buku ajar dalam Bahasa Indonesia. Kita menyadari bersama bahwa buku yang menyajikan pokok bahasan Struktur Aljabar dalam bahasa asing sudah banyak jumlahnya, tetapi buku tersebut yang berbahasa Indonesia masih sangat terbatas.

Buku ini disusun untuk membantu Dosen dan mahasiswa dalam mengajarkan dan mempelajari pokok bahasan Grup dan Subgrup yang merupakan bagian dalam mata kuliah Struktur Aljabar 1. Di dalam buku ini disajikan penjabaran secara lengkap dari definisi dan teorema pada setiap sub pokok bahasan. Selain itu juga disertai contoh dan latihan soal pada setiap babnya dan di bagian bab terakhir diberikan penyelesaian pada setiap latihan soal di setiap bab, sehingga memudahkan bagi Dosen dan Mahasiswa dalam memahami mata kuliah Struktur Aljabar 1.

Ucapan terima kasih kami sampaikan kepada seluruh civitas akademik FKIP Universitas Mulawarman khususnya semua dosen dilingkungan Program Studi Pendidikan Matematika yang telah memberi doa dan dorongan untuk menyelesaikan

buku ini. Akhirnya kami mengharapkan kritik yang membangun dari para pengguna buku ini. Semoga buku ini merupakan sumbangan yang sangat bermanfaat bagi Dosen dan Mahasiswa di Indonesia.

Samarinda, 24 Februari 2022

Petrus Fendiyanto

Daftar isi

Kata Pengantar.....	v
Daftar isi	vii
 1. Himpunan.....	 1
1.1 Pengertian Himpunan.....	4
1.2 Himpunan Semesta	4
1.3 Himpunan Kosong	4
1.4 Diagram Venn	5
1.5 Dua Himpunan Yang Sama.....	6
1.6 Himpunan Bagian.....	7
1.7 Himpunan Kuasa.....	11
1.8 Rangkuman.....	12
1.9 Latihan Soal	13
 2. Operasi Pada Himpunan	 17
2.1 Gabungan dan Irisan Himpunan	17
2.2 Selisih dan Komplemen Himpunan.....	23
2.3 Hasil Kali Cartesius	27
2.4 Rangkuman.....	29
2.5 Latihan Soal	30
 3. Fungsi atau Pemetaan.....	 31
3.1 Pengertian Fungsi	31
3.2 Pemetaan Surjektif	40
3.3 Pemetaan Injektif	41
3.4 Pemetaan Bijektif.....	43
3.5 Pemetaan Konstan	45
3.6 Rangkuman.....	45
3.7 Latihan Soal	46

4. Pemetaan Komposisi dan Pemetaan Invers.....	49
4.1 Pemetaan Komposisi	49
4.2 Pemetaan Invers.....	56
4.3 Rangkuman.....	60
4.4 Latihan Soal	61
5. Himpunan Berhingga dan Tak Berhingga.....	63
5.1 Himpunan Yang Ekuivalen.....	63
5.2 Himpunan Berhingga dan Tak Berhingga	66
5.3 Rangkuman.....	73
5.4 Latihan Soal	74
6. Grup dan Sifat-sifatnya	75
6.1 Pengertian Grup.....	75
6.2 Sifat-Sifat Sederhana dari Grup	80
6.3 Grup Abstrak.....	85
6.4 Rangkuman.....	87
6.5 Latihan Soal	88
7. Subgrup.....	91
7.1 Pengertian Subgrup.....	91
7.2 Sifat-Sifat Subgrup	93
7.3 Rangkuman.....	100
7.4 Latihan Soal	100
8. Grup Simetri	101
8.1 Pengertian Permutasi	101
8.2 Perkalian Permutasi.....	105
8.3 Grup Simetri dari Himpunan Permutasi.....	108
8.4 Grup Simetri dari Bangun Geometri.....	112
8.5 Rangkuman.....	115
8.6 Latihan Soal	116

9. Grup Siklik	119
9.1 Pengertian Grup Siklik.....	119
9.2 Rangkuman.....	133
9.3 Latihan Soal	135
10. Koset dan Teorema Lagrange	137
10.1 Pengertian Koset	137
10.2 Sifat-Sifat Koset	142
10.3 Teorema Lagrange	148
10.4 Rangkuman.....	153
10.5 Latihan Soal	155
11. Subgrup Normal.....	157
11.1 Pengertian Subgrup Normal	157
11.2 Sifat-Sifat Subgrup Normal	159
11.3 Grup Faktor	162
11.4 Rangkuman.....	164
11.5 Latihan Soal	165
12. Homomorfisme Grup	167
12.1 Pengertian Homomorfisme	167
12.2 Sifat-Sifat Homomorfisme	171
12.3 Rangkuman.....	174
12.4 Latihan Soal	175
13. Isomorfisme.....	177
13.1 Pengertian Isomorfisme	177
13.2 Rangkuman.....	184
13.3 Latihan Soal	185
14. Penyelesaian Latihan Soal.....	187
14.1 Penyelesaian Latihan Soal Bab 1.....	187
14.2 Penyelesaian Latihan Soal Bab 2.....	189

14.3 Penyelesaian Latihan Soal Bab 3.....	194
14.4 Penyelesaian Latihan Soal Bab 4.....	196
14.5 Penyelesaian Latihan Soal Bab 5.....	199
14.6 Penyelesaian Latihan Soal Bab 6.....	201
14.7 Penyelesaian Latihan Soal Bab 7.....	204
14.8 Penyelesaian Latihan Soal Bab 8.....	207
14.9 Penyelesaian Latihan Soal Bab 9.....	211
14.10 Penyelesaian Latihan Soal Bab 10.....	214
14.11 Penyelesaian Latihan Soal Bab 11.....	216
14.12 Penyelesaian Latihan Soal Bab 12.....	220
14.13 Penyelesaian Latihan Soal Bab 13.....	224
Daftar Pustaka	227
Biografi Penulis	229



1. Himpunan

1.1 Pengertian Himpunan

Pengertian himpunan digunakan dalam matematika dan kehidupan sehari-hari. Dalam Kehidupan sehari-hari kita jumpai pengertian tersebut, seperti:

- Himpunan mahasiswa Indonesia
- Kumpulan koran bekas
- Koleksi perangko
- Kelompok belajar
- dan kata sejenis lainnya

Kata himpunan, kumpulan, koleksi, dan kelompok mempunyai arti yang sama. Demikian pula dalam matematika, himpunan merupakan salah satu dasar matematika. Konsep dalam matematika dapat dikembalikan pada himpunan, misalnya garis adalah kumpulan titik-titik. Sebetulnya pengertian himpunan mudah dipahami dan dapat diterima secara intuitif. Tetapi dalam matematika dapat dibuat definisinya.

Definisi 1.1

Himpunan adalah kumpulan objek-objek yang mempunyai sifat tertentu dan didefinisikan dengan jelas.

Objek dalam pembicaraan matematika dapat berupa benda nyata, misalnya siswa SMA, bola, dan buah-buahan. Dapat pula berupa benda abstrak, misalnya bilangan, fungsi, dan matriks. Objek dalam himpunan mempunyai sifat tertentu dan didefinisikan dengan jelas, agar dapat ditentukan apakah suatu objek termasuk dalam himpunan atau tidak, seperti:

- a. Himpunan bunga indah
Tidak didefinisikan dengan jelas, karena pengertian "**bunga indah**" berbeda setiap orang. Bunga yang indah bagi seseorang belum tentu indah bagi orang lain.
- b. Himpunan bunga merah (sudah didefinisikan dengan jelas).

Objek dalam himpunan disebut anggota, elemen, atau unsur himpunan. Untuk menyatakan suatu himpunan digunakan huruf besar (huruf kapital), seperti $A, B, C, \dots$, sedangkan anggota himpunan dinyatakan dengan huruf kecil, yaitu $a, b, c, \dots$, dan ditulis diantara dua kurung kurawal. Lambang keanggotaan himpunan adalah " $\in$ " dan lambang bukan anggota himpunan adalah " $\notin$ ". Suatu himpunan yang anggotanya a, b dan c dapat disajikan dengan $A = \{a, b, c\}$. Lambang $a \in A$ menyatakan bahwa a adalah anggota dari himpunan A . Sedangkan lambang $p \notin A$ menyatakan bahwa a bukan anggota dari himpunan A . Sedangkan lambang $p \notin A$ menyatakan bahwa p bukan anggota dari himpunan A .

Ada beberapa cara untuk menyatakan himpunan

a. Cara pendaftaran atau tabulasi

Cara pendaftaran atau tabulasi yaitu dengan menuliskan semua anggotanya. Elemen yang tidak ada dalam daftar berarti bukan anggota himpunan tersebut. Cara ini mudah dilakukan, apabila jumlah anggotanya sedikit. Jika anggota himpunan itu banyak maka untuk menuliskan semua anggotanya diwakili oleh tiga titik “...” dan anggota yang diwakili tersebut sudah tertentu dan dapat disebutkan dengan benar.

Contoh:

$$A = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$B = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

b. Cara dengan menunjukkan syarat keanggotaannya

Syarat keanggotaan dapat dinyatakan dengan kata-kata, misalnya huruf $A = \{\text{vokal dalam abjad}\}$, atau dengan notasi pembentuk himpunan, menggunakan huruf x sebagai anggota, dan $P(x)$ sebagai syarat yang harus dipenuhi oleh x , misalnya himpunan yang anggotanya mempunyai sifat ditulis $A = \{x | P(x)\}$, dan dibaca “**A adalah himpunan semua x sedemikian sehingga x mempunyai sifat P** ”.

Contoh:

$$A = \{x | x < 5, x \in \text{Bilangan Cacah}\}$$

$$B = \{x | x^2 - x - 6 = 0, x \in \text{Bilangan Bulat}\}$$

1.2 Himpunan Semesta

Himpunan semesta dinyatakan dengan huruf S (himpunan semesta), huruf U (*universal set*), atau lambang lain dengan penjelasan sebelumnya. Dalam buku ini, kita gunakan huruf S untuk himpunan semesta. Himpunan semesta memuat semua objek yang dibicarakan dan dapat diterapkan sebelum pembicaraan.

Contoh:

- Untuk $A = \{1, 2, 3\}$ dapat diterapkan $S = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ atau $S = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.
- Untuk $B = \{x | x^2 - x - 6 = 0\}$ dapat diterapkan $S = \{x \in \text{bilangan bulat}\}$ atau $S = \{x \in \text{Bilangan Real}\}$

1.3 Himpunan Kosong

Definisi 1.2

Himpunan kosong atau hampa adalah himpunan yang tidak mempunyai anggota. Himpunan kosong dinyatakan dengan $\emptyset$ atau $\{ \}$.

Contoh:

- $A = \{x | x \text{ bilangan ganjil yang habis dibagi } 2\}$.
Dalam hal ini tidak ada bilangan ganjil yang habis dibagi 2. Jadi $A = \emptyset$.

b. $B = \{x | x^2 - 2 = 0, x \in \text{Bilangan Rasional}\}$

Jika $x^2 - 2 = 0$ maka $x = \sqrt{2}$ atau $x = -\sqrt{2}$, dan keduanya bukan bilangan rasional. Jadi $B = \emptyset$.

c. $C = \{x | x \neq x\}$, juga himpunan kosong.

Dengan demikian hanya ada satu himpunan kosong, meskipun diperoleh dari syarat keanggotaan yang berbeda. Jika $A = \emptyset$ dan $B = \emptyset$ maka $A = B$. Oleh karena himpunan kosong tidak mempunyai anggota, maka definisi kesamaan himpunan berlaku untuk A dan B tersebut.

Catatan:

- $A = \{0\}$ bukan himpunan kosong, karena $0 \in A$.
- $B = \{\emptyset\}$ bukan himpunan kosong, karena $\emptyset \in B$.

1.4 Diagram Venn

Suatu himpunan dapat disajikan dalam bentuk gambar yang disebut diagram Venn. Himpunan yang kita maksud digambarkan sebagai daerah pada bidang yang dibatasi oleh lingkungan tertutup sederhana. Anggota suatu himpunan ditunjukkan dengan noktah atau titik pada daerah tersebut. Sedangkan himpunan semesta digambarkan dengan suatu daerah yang dibatasi oleh persegi panjang.

Contoh:

$$A = \{a, b, c\}$$

Disajikan dengan diagram Venn sebagai berikut.

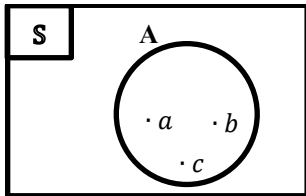


Diagram Venn banyak digunakan untuk menjelaskan himpunan atau hubungan antara beberapa himpunan dan operasi himpunan. Kadang-kadang noktah atau titik yang mewakili anggota himpunan tidak digambarkan, jika anggota dari himpunan tersebut sangat banyak atau tak terbatas.

1.5 Dua Himpunan Yang Sama

Dalam logika:

- a. $\forall$ Lambang dibaca “Setiap” atau “Semua”
- b. $\exists$ Lambang dibaca “Ada” atau “Beberapa”

Definisi 1.3

Dua himpunan A dan B disebut sama atau ditulis , jika $A=B$ dan hanya jika setiap anggota A menjadi anggota B dan setiap anggota B menjadi anggota dari A.

Jadi, $A = B$ jika dan hanya jika $\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B$. Sedangkan dua himpunan A dan B yang tidak sama ditulis $A \neq B$.

Jadi, $A \neq B$ jika dan hanya jika ada $x \in A$ tetapi $x \notin B$. $A \neq B$ merupakan ingkaran atau negasi dari $A=B$.

Contoh:

- Jika $A=\{a,b,c\}$ dan $B=\{c, b, a\}$ maka $A = B$.
Himpunan tidak ditentukan oleh urutan anggotanya.
- Jika $P = \{x|x < 4, x \in \text{Bilangan Asli}\}$
 $Q = \{x|-4 < x < 4, x \in \text{Bilangan Asli}\}$
Maka $P = Q$ meskipun P dan Q diperoleh dari syarat keanggotaan yang berbeda.
- Jika $C = \{1, 2, 3\}$ dan $D = \{x|x < 4, x \in \text{Bilangan Prima}\}$
maka $C \neq D$. Karena ada anggota C yang bukan anggota dari D , yaitu $1 \in C$ tetapi $1 \notin D$.

1.6 Himpunan Bagian

Definisi 1.4

Himpunan A disebut himpunan bagian (*subset*) dari himpunan B jika dan hanya jika setiap anggota A menjadi anggota dari B .

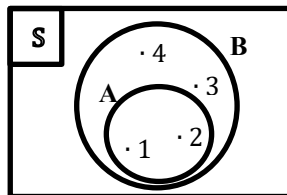
Jika himpunan A merupakan himpunan bagian dari himpunan B maka ditulis $A \subset B$. Jadi $A \subset B$ jika $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$ dapat diartikan bahwa himpunan B memuat himpunan A , juga dapat dinyatakan dengan $B \supset A$. Sedangkan jika himpunan C bukan himpunan bagian dari himpunan D maka ditulis $C \not\subset D$.

$A \subset B$ dapat diartikan bahwa himpunan B memuat himpunan A , juga dapat dinyatakan dengan $B \supset A$.

Contoh:

- a. Jika $A=\{1,2\}$ dan $B=\{1,2,3,4\}$ maka $A \subset B$.

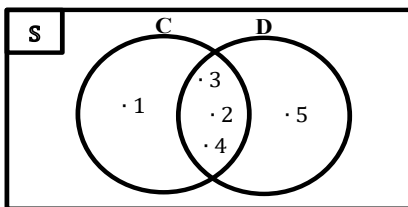
Dapat ditunjukkan dengan diagram Venn berikut ini.



Dapat dilihat bahwa setiap anggota dari A menjadi anggota B.

- b. Jika $C=\{1,2,3,4\}$ dan $D=\{2,3,4,5\}$ maka $C \not\subset D$.

Ditunjukkan dengan diagram Venn di bawah ini.



Dapat dilihat bahwa ada anggota C yang tidak menjadi anggota (bukan anggota) dari D.

Sifat-sifat himpunan bagian

1. Refleksif : $A \subset A$

Setiap anggota dari A menjadi anggota A (menurut definisi $A \subset A$). Himpunan bagian semacam ini disebut himpunan bagian tidak sejati (*improper subset*).

2. Transitif : $A \subset B$ dan $B \subset C \Rightarrow A \subset C$

3. Antisimetris : $A \subset B$ dan $B \subset A \Rightarrow A = B$

4. Himpunan kosong selalu menjadi himpunan bagian dari setiap himpunan, atau disebut juga himpunan bagian tidak sejati.

Menurut definisi kesamaan dua himpunan

Definisi 1.5

Himpunan A disebut himpunan bagian sejati (*proper subset*) dari himpunan B jika dan hanya jika setiap anggota A menjadi anggota dari B dan paling sedikit satu anggota dari B tidak menjadi anggota A, atau dengan kata lain A disebut himpunan bagian sejati dari B jika dan hanya jika $A \subset B$ dan $A \neq B$.

$A=B$ jika dan hanya jika setiap anggota A menjadi anggota B dan setiap anggota B menjadi anggota A.

Jadi, $A=B \Leftrightarrow A \subset B$ dan $B \subset A$.

Contoh:

$A=\{1,2,3\}$ dan $B=\{1,2,3,4\}$

A merupakan himpunan bagian sejati dari B.

Teorema 1.1

Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan.

Bukti:

Untuk membuktikan teorema ini digunakan implikasi, jika p maka q yang disajikan dengan $p \Rightarrow q$.

p dinamakan anteseden.

q dinamakan konsekuen.

Kita akan membuktikan $\emptyset \subset A$ untuk sebarang himpunan A.

Ini berarti jika $x \in \emptyset$ maka $x \in A$. Karena $\emptyset$ adalah himpunan yang tidak mempunyai anggota maka

Pernyataan $x \in \emptyset$ (Salah)

Pernyataan $x \in A$ (Benar)

Sehingga $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ adalah benar.

Jadi, himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan.

Teorema 1.2

Terdapat satu dan hanya satu himpunan kosong.

Bukti:

Dalam pembahasan himpunan kosong telah diungkapkan bahwa hanya ada satu himpunan kosong, meskipun diperoleh dari syarat keanggotaan yang berbeda.

Sekarang pernyataan tersebut akan dibuktikan. Menurut **Teorema 1.1**, himpunan kosong merupakan bagian dari setiap himpunan.

Misalkan terdapat dua himpunan kosong yaitu $\emptyset_1$ dan $\emptyset_2$.

Karena $\emptyset_1$ merupakan himpunan kosong, maka $\emptyset_1$ adalah himpunan bagian dari setiap himpunan sehingga $\emptyset_1 \subset \emptyset_2$.

Karena $\emptyset_2$ merupakan himpunan kosong, maka $\emptyset_2$ adalah himpunan bagian dari setiap himpunan sehingga $\emptyset_2 \subset \emptyset_1$.

Menurut definisi kesamaan himpunan, $\emptyset_1 \subset \emptyset_2$ dan $\emptyset_2 \subset \emptyset_1 \Leftrightarrow \emptyset_1 = \emptyset_2$.

Jadi, hanya terdapat satu himpunan kosong.

1.7 Himpunan Kuasa

Definisi 1.6

Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah semua himpunan bagian dari himpunan A .

Himpunan kuasa dari himpunan A dinyatakan dengan lambang $P(A)$ atau 2^A .

Contoh:

Tentukan semua himpunan bagian dari himpunan A , jika:

- $A = \emptyset$
- $A = \{1\}$
- $A = \{1, 2\}$

Jawab

- Himpunan bagian dari $\emptyset$ adalah $\emptyset$.
- Himpunan bagian dari $\{1\}$ adalah $\emptyset$ dan $\{1\}$.
- Himpunan bagian dari $\{1, 2\}$ adalah $\emptyset, \{1\}$, dan $\{1, 2\}$.

Apabila banyaknya anggota himpunan A dinyatakan dengan $n(A)$ dan banyaknya anggota himpunan kuasa dinyatakan dengan $n(2^A)$, dapat dibedakan bahwa

- $A = \{a, b\}$ dengan $n(A) = 2$
- $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ dengan $n(2^A) = 4$
- $\{a\} \subset A$ dan $\{a\} \in 2^A$

Himpunan kuasa merupakan keluarga himpunan, yaitu himpunan yang setiap anggotanya adalah himpunan. Anggota suatu keluarga himpunan sering dinyatakan dengan himpunan indeks I .

- Apabila $I = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ maka $\{A_i\}_{i \in I} = \{A_\alpha, A_\beta, A_\gamma\}$
- Apabila $I = \{1, 2, 3\}$ maka $\{A_i\}_{i \in I} = \{A_1, A_2, A_3\}$

1.8 Rangkuman

1. Himpunan adalah kumpulan objek atau benda yang didefinisikan dengan jelas sehingga kita dapat menentukan apakah suatu objek atau benda tersebut merupakan anggota himpunan atau tidak.
2. Himpunan dapat dinyatakan dengan
 - a. Menuliskan semua anggotanya (cara pendaftaran/ tabulasi)
 - b. Menuliskan syarat keanggotaannya, yaitu

$$A = \{x \mid P(x)\}$$
3. Keanggotaan suatu himpunan dinyatakan dengan $\in$ dan bukan anggota dinyatakan dengan $\notin$.
4. Himpunan semesta adalah himpunan yang memuat semua anggota yang dibicarakan.
5. Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak mempunyai anggota. Himpunan kosong dinyatakan dengan $\emptyset$ atau $\{\}$. Hanya ada satu himpunan kosong.
6. $A = B$ jika dan hanya jika $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$ dan $\forall x, x \in B \Rightarrow x \in A$.
7.
 - a. $A \subset B$ jika dan hanya jika $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$.
 - b. $A \not\subset B$ jika dan hanya jika $\exists x, x \in A$ dan $x \notin B$.

8. Sifat-sifat himpunan bagian
 - a. $A \subset A$ (refleksif)
 - b. $A \subset B$ dan $B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (transitif)
 - c. $A \subset B$ dan $B \subset A \Rightarrow A = B$ (anti simetris)
 - d. $\emptyset \subset A$ untuk sebarang himpunan A
9. $A=B$ jika dan hanya jika $A \subset B$ dan $B \subset A$.
10. A merupakan himpunan bagian sejati dari B jika dan hanya jika $\emptyset \neq A \subset B$ dan $A \neq B$.
11. Himpunan kuasa dari himpunan A adalah himpunan semua himpunan bagian dari himpunan A , dan dinyatakan dengan 2^A atau $P(A)$.
Jika $n(A) = 3$ maka $n(2^A) = 2^3 = 8$.
Jika $n(A) = N$ maka $n(2^A) = 2^N$.
Himpunan kuasa merupakan keluarga himpunan sebab setiap anggotanya merupakan himpunan.

1.9 Latihan Soal

1. Nyatakan himpunan berikut dengan menuliskan semua anggotanya.
 A = Himpunan semua bilangan asli kelipatan 6 yang kurang dari 50.
 B = Himpunan semua bilangan pecahan dengan pembilang 1 dan penyebut bilangan asli kurang dari 6.

2. Nyatakan himpunan berikut dengan syarat keanggotaan atau notasi pembentuk himpunan.

$$P = \{0, 1, 4, 9, 16\}$$

$$Q = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \right\}$$

3. Carilah yang mana diantara ketiga himpunan berikut yang merupakan himpunan kosong.

$$A = \{x \mid x^2 + 1 = 0, x \in \text{Bilangan Asli}\}$$

$$B = \{x \mid 13 < x < 16, x \in \text{Bilangan Prima}\}$$

$$C = \{x \mid x < 1, x \in \text{Bilangan Cacah}\}$$

4. Isilah dengan $\in$, $\notin$, $\subset$ atau $\not\subset$ sehingga diperoleh pernyataan yang benar.
- $\{0\} \dots\dots \{0, 1\}$
 - $\emptyset \dots\dots \{\emptyset\}$
 - $\{1, 2\} \dots\dots \{1, 3\}$
 - $1 \dots\dots \{ \}$
5. Ditentukan $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$. Carilah himpunan bagian dari A yang anggotanya.
- Habis dibagi 3
 - Jika dikurangi 1 menghasilkan bilangan prima
6. Tentukan semua himpunan bagian sejati dari $A = \{0, 1, 2\}$.
7. Tentukan himpunan kuasa dari $A = \{p, q, r, s\}$.
8. Sebutkan anggota dari $A = \{1, \{2, 3\}, \emptyset, p\}$.

9. Carilah diantara ketiga himpunan berikut yang bukan keluarga himpunan

$$A = \{0, \emptyset, \{0, 1\}\}$$

$$B = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$$

$$C = \{p, q, \{p, q\}\}$$

10. Buatlah tabel yang menyatakan hubungan antara $n(A)$ dan $n(2^A)$, dengan $n(A) = 0, 1, 2, 3, \dots, N$.



2. Operasi Pada Himpunan

Operasi pada himpunan adalah cara membentuk himpunan baru dari himpunan yang diketahui. Operasi disebut **operasi uner** jika himpunan baru diperoleh dari satu himpunan dan disebut **operasi biner** jika himpunan baru diperoleh dari dua himpunan yang ditentukan. Operasi tersebut meliputi gabungan, irisan, selisih, komplemen, dan hasil kali cartesius.

2.1 Gabungan dan Irisan Himpunan

Definisi 2.1

Gabungan dua himpunan A dan B adalah himpunan semua elemen yang menjadi anggota A atau B atau kedua-duanya, atau dapat ditulis dengan $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$

Definisi 2.2

Irisan dua himpunan A dan B adalah himpunan semua elemen yang menjadi anggota A dan juga menjadi anggota B, atau dapat ditulis dengan

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$$

Contoh:

1. Jika $A = \{a, b, 1, 3\}$ dan $B = \{a, p, 1, 5, 7\}$ maka

$$A \cup B = \{a, b, p, 1, 3, 5, 7\}$$

$$A \cap B = \{a, 1\}$$

2. $A = \{x \mid x \in \text{Bilangan ganjil}, x > 0\}$

$$B = \{x \mid x \in \text{Bilangan prima}\}$$

Sehingga diperoleh

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$$

$$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$$

Maka

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\} = A \cup \{2\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in \text{Bilangan prima}, x \neq 2\}$$

3. $Q = \text{Himpunan bilangan rasional}$

$L = \text{Himpunan bilangan irasional}$

$Q \cup L = \text{Himpunan bilangan real}$

$$Q \cap L = \emptyset$$

Catatan:

- Jika $A \cap B \neq \emptyset$ maka dikatakan bahwa A dan B berpotongan.

- Jika $A \neq \emptyset$ dan $B \neq \emptyset$, sedangkan $A \cap B = \emptyset$ maka A dan B disebut dua himpunan yang saling asing atau saling lepas.

Sifat-sifat dari operasi gabungan dan irisan

1. Sifat komutatif

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

2. Sifat asosiatif

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Sifat asosiatif tersebut dapat ditunjukkan dengan syarat keanggotaan

$$\begin{aligned} a. \quad (A \cup B) \cup C &= \{x \mid x \in A \cup B \text{ atau } x \in C\} \\ &= \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \text{ atau } x \in C\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \cup C\} \\ &= \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \text{ atau } x \in C\} \end{aligned}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \text{ sebab syarat keanggotaannya sama.}$$

$$\begin{aligned} b. \quad (A \cap B) \cap C &= \{x \mid x \in A \cap B \text{ dan } x \in C\} \\ &= \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \text{ dan } x \in C\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &= \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \cap C\} \\ &= \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \text{ dan } x \in C\} \end{aligned}$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \text{ sebab syarat keanggotaannya sama.}$$

Berikut ini sifat dari operasi gabungan dan irisan yang dikaitkan dengan relasi antara dua himpunan dan himpunan khusus. Untuk setiap himpunan A , B , dan C berlaku hubungan sebagai berikut:

1. $A \subset (A \cup B)$ dan $B \subset (A \cup B)$
2. $(A \cap B) \subset A$ dan $(A \cap B) \subset B$
3. $A \cup B = B$ jika dan hanya jika $A \subset B$
4. $A \cap B = A$ jika dan hanya jika $A \subset B$
5. $A \subset B$ dan $A \subset C \Rightarrow A \subset (B \cap C)$
6. $A \subset C$ dan $B \subset C \Rightarrow (A \cup B) \subset C$
7. $A \cup B = \emptyset$ jika dan hanya jika $A = \emptyset$ dan $B = \emptyset$
8. $A \cup A = A$ dan $A \cap A = A$
 $A \cup \emptyset = A$ dan $A \cap \emptyset = \emptyset$
 $A \cup S = S$ dan $A \cap S = A$

Dengan S adalah himpunan semesta.

Teorema 2.1

- a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Bukti:

Untuk membuktikan Teorema 2.1, kita dapat menggunakan definisi kesamaan dua himpunan.

- a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
i. Akan dibuktikan $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 Ambil $x \in A \cup (B \cap C)$ maka $x \in A$ atau $(x \in B \cap C)$

$$x \in A \text{ atau } (x \in B \text{ dan } x \in C)$$

$$(x \in A \text{ atau } x \in B) \text{ dan } (x \in A \text{ atau } x \in C)$$

$$x \in A \cup B \text{ dan } x \in A \cup C$$

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\text{Jadi, } A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

ii. Akan dibuktikan $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$

Ambil $y \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ maka $y \in A \cup B$

dan $y \in A \cup C$

$(y \in A \text{ atau } y \in B) \text{ dan } (y \in A \text{ atau } y \in C)$

$y \in A \text{ atau } (y \in B \text{ dan } y \in C)$

$y \in A \text{ atau } y \in B \cap C$

$y \in A \cup (B \cap C)$

Jadi, $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$

Dari (i) dan (ii) maka diperoleh $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

i. Akan dibuktikan $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ambil $x \in A \cap (B \cup C)$ maka $x \in A$ dan $(x \in B \cup C)$

$x \in A$ dan $(x \in B \text{ atau } x \in C)$

$(x \in A \text{ dan } x \in B) \text{ atau } (x \in A \text{ dan } x \in C)$

$x \in A \cap B \text{ atau } x \in A \cap C$

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Jadi, $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ii. Akan dibuktikan $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

Ambil $y \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ maka $y \in A \cap B$ atau $y \in A \cap C$

$(y \in A \text{ dan } y \in B)$ atau $(y \in A \text{ dan } y \in C)$

$y \in A \text{ dan } (y \in B \text{ atau } y \in C)$

$y \in A \text{ dan } y \in B \cup C$

$y \in A \cap (B \cup C)$

Jadi, $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

Dari (i) dan (ii) maka diperoleh $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Teorema 2.2

a. $A \cup (A \cap B) = A$

b. $A \cap (A \cup B) = A$

Bukti:

a. $A \cup (A \cap B) = A$

i. Akan dibuktikan $A \cup (A \cap B) \subset A$

Ambil $x \in A \cup (A \cap B)$ maka $x \in A$ atau $(x \in A \cap B)$

$x \in A$ atau $(x \in A \text{ dan } x \in B)$

$x \in A$

Jadi, $A \cup (A \cap B) \subset A$

ii. Akan dibuktikan $A \subset A \cup (A \cap B)$

Menurut sifat pada operasi gabungan:

$$A \subset (A \cup B)$$

$$A \subset (A \cup C)$$

Berarti A selalu merupakan himpunan bagian dari gabungan himpunan A dengan sebarang himpunan.

$$\text{Jadi, } A \subset A \cup (A \cap B)$$

Dari (i) dan (ii) sehingga diperoleh $A \cup (A \cap B) = A$

b. $A \cap (A \cup B) = A$

i. Akan dibuktikan $A \cap (A \cup B) \subset A$

Ambil $x \in A \cap (A \cup B)$ maka $x \in A$ dan $(x \in A \cup B)$

$x \in A$ dan $(x \in A \text{ atau } x \in B)$

$$x \in A$$

Jadi, $A \cap (A \cup B) \subset A$

ii. Akan dibuktikan $A \subset A \cap (A \cup B)$

Menurut sifat irisan dua himpunan

$A \cap B = A$, jika dan hanya jika $A \subset B$

$A \cap C = A$, jika dan hanya jika $A \subset C$

Sehingga $A \subset A \cap (A \cup B)$

Dari (i) dan (ii) sehingga diperoleh $A \cap (A \cup B) = A$

2.2 Selisih dan Komplemen Himpunan

Selisih dari himpunan A dan B atau dinyatakan dengan " $A - B$ ", adalah himpunan yang terdiri atas semua elemen A yang bukan anggota B .

Definisi 2.3

$$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \}$$

$$B - A = \{ x \mid x \in B \text{ dan } x \notin A \}$$

Selisih dari himpunan Semesta S dengan A yaitu " $S - A$ ", disebut komplement dari himpunan A dan dinyatakan dengan A' atau A^c .

Jadi A' adalah himpunan semua anggota S yang bukan anggota dari A . Dapat pula dikatakan bahwa A' adalah himpunan semua elemen yang bukan anggota dari A

Definisi 2.4

$$A' = \{ x \mid x \in S, x \notin A \} \text{ atau } A' = \{ x \mid x \notin A \}$$

Contoh:

Jika $S = \{ 1, 2, 3, \dots, 9 \}$ dan $A = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

maka $A' = \{ 2, 4, 6, 8 \}$

Sifat-sifat selisih dua himpunan dan komplement

1. $(A - B) \subset A$ dan $(B - A) \subset B$
2. $A - B = \emptyset$ jika dan hanya jika $A \subset B$
3. $A - B = B - A$ jika dan hanya jika $A = B$
4. Jika $A \cap B = \emptyset$ maka $A - B = A$ dan $B - A = B$
5. Jika $A \subset B$ maka $A \cup (B - A) = B$
6. $(A - B) \cap B = \emptyset$
7. $(A')' = A$
8. $\emptyset' = S$
9. $S' = \emptyset$

Teorema 2.3

$$A - B = A \cap B'$$

Bukti:

$$\begin{aligned} A - B &= \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} \\ &= \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B' \} \dots\dots\dots (i) \end{aligned}$$

$$A \cap B' = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B' \} \dots\dots\dots (ii)$$

Dari (i) dan (ii) sehingga diperoleh $A - B = A \cap B'$

Teorema 2.4 (Teorema de Morgan)

a. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Bukti:

a. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

i. Akan dibuktikan $(A \cup B)' \subset A' \cap B'$

Ambil $x \in (A \cup B)'$ maka $x \notin A \cup B$

$x \notin A$ dan $x \notin B$

$x \in A'$ dan $x \in B'$

$x \in A' \cap B'$

Jadi, $(A \cup B)' \subset A' \cap B'$

ii. Akan dibuktikan $A' \cap B' \subset (A \cup B)'$

Ambil $y \in A' \cap B'$ maka $y \in A'$ dan $y \in B'$

$y \notin A$ dan $y \notin B$

$y \notin A \cup B$

$$y \in (A \cup B)'$$

$$\text{Jadi, } A' \cap B' \subset (A \cup B)'$$

Dari (i) dan (ii) sehingga diperoleh $(A \cup B)' = A' \cap B'$

b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

i. Akan dibuktikan $(A \cap B)' \subset A' \cup B'$

$$x \notin A \text{ atau } x \notin B$$

$$x \in A' \text{ atau } x \in B'$$

$$x \in A' \cup B'$$

$$\text{Jadi, } (A \cap B)' \subset A' \cup B'$$

ii. Akan dibuktikan $A' \cup B' \subset (A \cap B)'$

Ambil $y \in A' \cup B'$ maka $y \in A'$ atau $y \in B'$

$$y \notin A \text{ atau } y \notin B$$

$$y \notin A \cap B$$

$$y \in (A \cap B)'$$

$$\text{Jadi, } A' \cup B' \subset (A \cap B)'$$

Dari (i) dan (ii) sehingga diperoleh $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Teorema 2.5

Jika $A \subset B$ maka $B' \subset A'$

Bukti:

Akan dibuktikan secara tidak langsung, yaitu menggunakan kontraposisi dari suatu implikasi.

Ingatlah bahwa implikasi dan kontraposisi mempunyai nilai kebenaran yang sama.

$p \rightarrow q$ (Implikasi)

$\sim q \rightarrow \sim p$ (Kontraposisi)

Misalkan $B' \not\subset A'$

Ini berarti $(\exists x), (x \in B' \text{ dan } x \notin A')$

$(\exists x), (x \notin B \text{ dan } x \in A)$

$(\exists x), (x \in A \text{ dan } x \notin B)$

Jadi, $A \not\subset B$. Ini bertentangan dengan yang diketahui bahwa $A \subset B$, sehingga pengandaian yang di ambil salah.

Dengan demikian yang benar adalah $B' \subset A'$.

2.3 Hasil Kali Cartesius

Hasil kali cartesius dari dua himpunan A dan B adalah himpunan semua pasangan berurutan (x,y) dengan $x \in A$ dan $y \in B$, dan dinyatakan dengan $A \times B$.

Definisi 2.5

$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B \}$$

Contoh:

$$A = \{ a, b \} \text{ dan } B = \{ c, d \}$$

$$A \times B = \{ (a, c), (a, d), (b, c), (b, d) \}$$

$$B \times A = \{ (c, a), (c, b), (d, a), (d, b) \}$$

Sifat-sifat perkalian himpunan:

1. Jika $A = \emptyset$ atau $B = \emptyset$ maka $A \times B = \emptyset$.
2. $A \times B \neq B \times A$

$A \times B = B \times A$, jika dan hanya jika $A = B$.

Hal ini berarti bahwa perkalian himpunan dapat dilakukan pada himpunan yang sama.

3. $(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \text{ dan } y \in B$
 $(x, y) \notin A \times B \Leftrightarrow x \notin A \text{ atau } y \notin B$

Teorema 2.6

- a. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- b. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- c. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

Bukti:

- a. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
 Ambil $(x, y) \in A \times (B \cup C)$, berarti $x \in A$ dan $y \in (B \cup C)$
 $x \in A$ dan $(y \in B \text{ atau } y \in C)$
 $(x \in A \text{ dan } y \in B) \text{ atau } (x \in A \text{ dan } y \in C)$
 $(x, y) \in A \times B \text{ atau } (x, y) \in A \times C$
 $(A \times B) \cup (A \times C)$
- b. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
 Ambil $(x, y) \in A \times (B \cap C)$, berarti $x \in A$ dan $y \in (B \cap C)$
 $x \in A$ dan $(y \in B \text{ dan } y \in C)$
 $(x \in A \text{ dan } y \in B) \text{ dan } (x \in A \text{ dan } y \in C)$
 $(x, y) \in A \times B \text{ dan } (x, y) \in A \times C$
 $(A \times B) \cap (A \times C)$

- c. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
 Ambil $(x, y) \in A \times (B - C)$, berarti $x \in A$ dan $y \in (B - C)$
 $x \in A$ dan ($y \in B$ dan $y \notin C$)
 $(x \in A \text{ dan } y \in B)$ dan $(x \in A \text{ dan } y \notin C)$
 $(x \in A \text{ dan } y \in B)$ dan $(x \notin A \text{ atau } y \notin C)$
 $(x, y) \in A \times B$ dan $(x, y) \notin A \times C$
 $(A \times B) - (A \times C)$

2.4 Rangkuman

1. Gabungan dua himpunan A dan B adalah himpunan semua elemen yang menjadi anggota A atau B atau kedua-duanya.
2. Irisan dua himpunan A dan B adalah himpunan semua elemen yang menjadi anggota A dan juga menjadi anggota B.
3. Selisih dari himpunan A dan B yang dinyatakan dengan $A - B$, adalah himpunan yang terdiri atas semua elemen A yang bukan anggota B.
4. Komplemen dari himpunan A adalah himpunan semua anggota dari S yang bukan anggota A.
5. Hasil kali cartesius dari dua himpunan A dan B adalah himpunan pasangan berurutan (x, y) dengan $x \in A$ dan $y \in B$, dan dinyatakan dengan $A \times B$.

2.5 Latihan Soal

- Buktikan secara langsung (tanpa premisalan) menggunakan sifat dan teorema bahwa $A \subset B \Rightarrow B' \subset A'$
- Jika $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, dan $C = \{2, 4, 5, 7\}$. Tunjukkanlah bahwa:
 - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Jika $S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 8\}$, dan $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Tunjukkanlah bahwa:
 - $(A \cup B)' = A' \cap B'$
 - $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- Jika $A = \{1, 3, 5, 7, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, dan $C = \{1, 2, 5, 9\}$. Tentukanlah:
 - $A - B - C$
 - $A \cap (B - C)$
- Jika $A \cup C = B \cup C$ dan $A \cap C = B \cap C$ maka $A = B$. Buktikanlah!
- Buktikanlah bahwa $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.
- Jika $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, dan $C = \{3, 4, 7\}$. Tunjukkanlah bahwa
 - $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
 - $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
- Buktikanlah bahwa $(\bigcap_{i \in I} A_i)' = \bigcup_{i \in I} A_i'$



3. Fungsi atau Pemetaan

3.1 Pengertian Fungsi

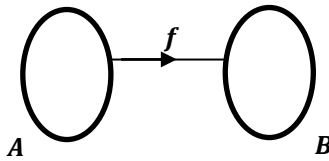
Definisi 3.1

Misalkan A dan B adalah himpunan tidak kosong. Suatu cara atau aturan yang memasangkan setiap elemen dari himpunan A dengan tepat satu elemen dari himpunan B disebut **fungsi** dari himpunan A ke himpunan B .

Misalkan cara atau aturan yang mengaitkan tersebut diberi simbol f , maka dikatakan bahwa f adalah fungsi dari A ke B dan dilambangkan sebagai

$$f: A \longrightarrow B \quad \text{atau} \quad A \xrightarrow{f} B$$

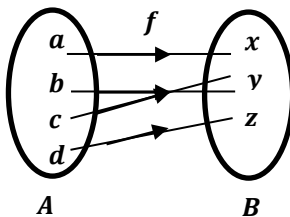
dibaca “**fungsi dari ke**” atau “**adalah pemetaan dari A ke B**”. Pemetaan ini dapat dilukiskan dengan diagram seperti pada gambar berikut.



Selanjutnya himpunan A disebut daerah asal (domain) dari f , dan B disebut daerah kawan (kodomain) dari f . Apabila $a \in A$ maka suatu elemen dari B yang merupakan pasangan dari a disebut peta (bayangan atau *image*) dari a dan dinyatakan dengan simbol " $f(a)$ ".

Contoh:

Misalkan $f: A \rightarrow B$ didefinisikan seperti pada gambar berikut ini.



$A = \{ a, b, c, d \}$ dan $B = \{ x, y, z \}$. Pada pemetaan ini dapat dikatakan bahwa

$$f(a) = x$$

$$f(b) = y$$

$$f(c) = y$$

$$f(d) = z$$

Pemetaan ini dapat ditulis sebagai himpunan pasangan berurutan

$$f = \{ (a, x), (b, y), (c, y), (d, z) \}$$

Perlu ditekankan sekali lagi bahwa **setiap elemen dari A harus dipasangkan dengan tepat satu elemen dari B**, berarti

- Tidak ada elemen dari A yang tidak dipasangkan
- Tidak ada elemen dari A yang dipasangkan lebih dari satu
- Elemen dari B boleh memperoleh pasangan lebih dari satu elemen dari A
- Elemen B boleh tidak memperoleh pasangan elemen dari A

Misalkan suatu pemetaan dari himpunan A ke himpunan B, yaitu $f: A \rightarrow B$. Ingat bahwa tidak setiap elemen dari B perlu memperoleh pasangan sebagai peta elemen dari A. Himpunan semua elemen dari B yang merupakan peta elemen dari A disebut **daerah hasil** atau *jelajah (range)* dari f , dan dinyatakan dengan $f(A)$. Perhatikan bahwa $f(A) \subset B$.

Jadi pemetaan $f: A \rightarrow B$ mempunyai daerah hasil $f(A) \subset B$ dan $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$. Selanjutnya, bila $D \subset A$ maka $f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$ disebut peta dari D oleh pemetaan f .

Contoh:

1. Misalkan B adalah himpunan bilangan bulat dan $f: B \rightarrow B$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2, \forall x \in B$.

Kalimat $f(x) = x^2, \forall x \in B$ disebut rumus definisi dari pemetaan. Periksalah bahwa

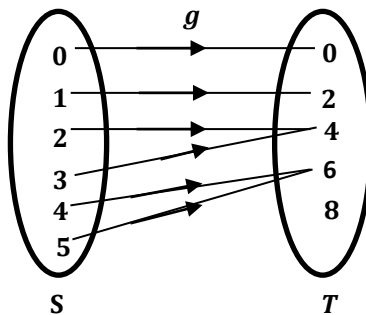
$$\begin{array}{lll} f(0) = 0 & f(1) = 1 & f(-1) = 1 \\ f(2) = 4 & f(-2) = 4 & f(3) = 9 \\ f(-3) = 9 & f(4) = 16 & f(-4) = 16 \end{array}$$

Daerah hasil dari f adalah $\{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$

Jika A adalah himpunan bilangan asli maka

$$f(A) = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$$

2. Misalkan $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $T = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Pemetaan $g : S \rightarrow T$. Pemetaan didefinisikan seperti pada diagram panah di bawah ini.



Daerah hasil dari g adalah $\{0, 2, 4, 6\}$. Perhatikan bahwa $g(1) = 2$, sehingga 2 adalah peta atau bayangan dari 1 oleh pemetaan g , dan dikatakan pula bahwa 1 adalah prapeta (*invers*) dari 2 oleh pemetaan g dan ditulis:

$$g^{-1}(2) = 1$$

Selanjutnya dari contoh (2), dapat diperiksa bahwa

$$g^{-1}(0) = \{0\} \quad g^{-1}(2) = 1$$

$$g^{-1}(6) = \{4, 5\} \quad g^{-1}(4) = \{2, 3\}$$

$$g^{-1}(\{0, 2, 4, 6\}) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Hal ini dapat dinyatakan menurut definisi berikut.

Definisi 3.2

Misalkan $f: S \rightarrow T$ adalah suatu pemetaan, jika $t \in T$ maka himpunan semua elemen dari S yang dipetakan ke t disebut prapeta (*invers*) dari t oleh f dan dinyatakan dengan " $f^{-1}(t)$ ".

Jadi, $f^{-1}(t) = \{x \in S \mid f(x) = t\}$ adalah himpunan semua prapeta dari t oleh pemetaan f . Jika $B \subset T$ maka $f^{-1}(B) = \{x \in S \mid f(x) \in B\}$ adalah himpunan semua elemen dari S yang merupakan prapeta elemen dari B .

Contoh:

1. Misalkan A adalah himpunan bilangan asli. Pemetaan $f: A \rightarrow A$ didefinisikan oleh $f(x) = 2x, x \in A$.

Range (daerah hasil) dari f adalah $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$.

Perhatikan bahwa:

$$f^{-1}(1) = \emptyset \quad f^{-1}(2) = \{1\} \quad f^{-1}(3) = \emptyset$$

$$f^{-1}(4) = \{2\} \quad f^{-1}(5) = \emptyset \quad f^{-1}(6) = \{3\}$$

2. Misalkan Z adalah himpunan bilangan bulat dan N adalah himpunan bilangan asli. Pemetaan $f: Z \rightarrow N$ didefinisikan $f(x) = x^2 + 1, \forall x \in Z$.

Misalkan pula $A = \{-2, -1, 0\}$ dan $B = \{0, 1, 2, 3\}$ sehingga $f(A) = \{1, 2, 5\}$ dan $f(B) = \{1, 2, 5, 10\}$.

- $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$

$$f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{1\} \quad f(A) \cap f(B) = \{1, 2, 5\}$$

$$\text{Jadi, } f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
 $f(A \cup B) = f(\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}) = \{1, 2, 5, 10\}$
 $f(A) \cup f(B) = \{1, 2, 5\} \cup \{1, 2, 5, 10\} = \{1, 2, 5, 10\}$

Misalkan $P = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $Q = \{3, 4, 5\}$ maka

$f^1(P) = \{-1, 0, 1\}$ dan $f^1(Q) = \{-2, 2\}$.

- $f^1(P \cap Q) = f^1(P) \cap f^1(Q)$
 $f^1(P \cap Q) = f^1(\{3, 4\}) = \emptyset$
 $f^1(P) \cap f^1(Q) = \{-1, 0, 1\} \cap \{-2, 2\} = \emptyset$
- $f^1(P \cup Q) = f^1(P) \cup f^1(Q)$
 $f^1(P \cup Q) = f^1(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
 $f^1(P) \cup f^1(Q) = \{-1, 0, 1\} \cup \{-2, 2\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

Berdasarkan contoh (2), dapat dinyatakan menurut teorema berikut ini.

Teorema 3.1

Jika $f: S \rightarrow T$ suatu pemetaan dan $A, B \subset S$ maka

- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- Jika $A \subset B$ maka $f(A) \subset f(B)$

Bukti:

- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
 Ambil $y \in f(A \cap B)$ maka ada $x \in A \cap B$ sedemikian sehingga $y = f(x)$.

Karena $x \in A \cap B$ maka $x \in A$ dan $x \in B$ sehingga $f(x) \in f(A)$ dan $f(x) \in f(B)$.

Hal ini berarti $f(x) \in f(A) \cap f(B)$

Karena $y = f(x)$ maka $y \in f(A) \cap f(B)$

Jadi, jika $y \in f(A \cap B)$ maka $y \in f(A) \cap f(B)$ sehingga $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

b. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Untuk membuktikan kesamaan dua himpunan, kita harus menunjukkan bahwa $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ dan $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

i. Akan dibuktikan $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$

Ambil $y \in f(A \cup B)$ maka ada $x \in A \cup B$ sedemikian sehingga $y = f(x)$.

Karena $x \in A \cup B$ maka $x \in A$ atau $x \in B$ sehingga $f(x) \in f(A)$ atau $f(x) \in f(B)$.

Hal ini berarti $f(x) \in f(A) \cup f(B)$.

Jadi, jika $y \in f(A \cup B)$ maka $y \in f(A) \cup f(B)$ sehingga $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

ii. Akan dibuktikan $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$

Jika $t \in f(A)$ maka ada $s \in A$ maka $t = f(s)$.

Jika $t \in f(B)$ maka ada $r \in B$ maka $t = f(r)$.

Karena $s \in A$ dan $r \in B$ maka $s, r \in A \cup B$ sehingga $f(s), f(r) \in f(A \cup B)$.

Karena $t = f(s) = f(r)$ maka $t \in f(A \cup B)$.

Jadi, jika $t \in f(A) \cup f(B)$ maka $t \in f(A \cup B)$ sehingga $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

Dari (i) dan (ii) sehingga diperoleh $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

c. Jika $A \subset B$ maka $f(x) \in f(A)$ Ambil maka

Ambil $x \in A$ maka $f(x) \in f(A)$

Karena $A \subset B$ maka $x \in B$ sehingga $f(x) \in f(B)$

Jadi, $f(A) \subset f(B)$.

Teorema 3.2

Jika $f: S \rightarrow T$ suatu pemetaan dan $P, Q \subset T$ maka

- a. $f^{-1}(P \cap Q) = f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q)$
- b. $f^{-1}(P \cup Q) = f^{-1}(P) \cup f^{-1}(Q)$
- c. Jika $P \subset Q$ maka $f^{-1}(P) \subset f^{-1}(Q)$

Bukti:

$$a. \quad f^{-1}(P \cap Q) = f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q)$$

i. Akan dibuktikan $f^{-1}(P \cap Q) \subset f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q)$

Ambil $x \in f^{-1}(P \cap Q)$ maka $f(x) \in P \cap Q$

Sehingga diperoleh $f(x) \in P$ dan $f(x) \in Q$

Ini berarti $x \in f^{-1}(P)$ dan $x \in f^{-1}(Q)$ maka $x \in f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q)$

Jadi, $f^{-1}(P \cap Q) \subset f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q)$

ii. Akan dibuktikan $f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q) \subset f^{-1}(P \cap Q)$

Ambil $y \in f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q)$ maka $y \in f^{-1}(P)$ dan $y \in f^{-1}(Q)$

Sehingga $f(y) \in P$ dan $f(y) \in Q$ maka $f(y) \in P \cap Q$

Ini berarti $y \in f^{-1}(P \cap Q)$

Jadi, $f^1(P) \cap f^1(Q) \subset f^1(P \cap Q)$

Dari (i) dan (ii) sehingga diperoleh $f^1(P \cap Q) = f^1(P) \cap f^1(Q)$

b. $f^1(P \cup Q) = f^1(P) \cup f^1(Q)$

i. Akan dibuktikan $f^1(P \cup Q) \subset f^1(P) \cup f^1(Q)$

Ambil $x \in f^1(P \cup Q)$ maka $f(x) \in P \cup Q$

Sehingga $f(x) \in P$ atau $f(x) \in Q$

Ini berarti $x \in f^1(P)$ atau $x \in f^1(Q)$ maka $x \in f^1(P) \cup f^1(Q)$

Jadi, $f^1(P \cup Q) \subset f^1(P) \cup f^1(Q)$

ii. Akan dibuktikan $f^1(P) \cup f^1(Q) \subset f^1(P \cup Q)$

Ambil $y \in f^1(P) \cup f^1(Q)$ maka $y \in f^1(P)$ atau $y \in f^1(Q)$

Sehingga $f(y) \in P$ atau $f(y) \in Q$ maka $f(y) \in P \cup Q$

Ini berarti $y \in f^1(P \cup Q)$

Jadi, $f^1(P) \cup f^1(Q) \subset f^1(P \cup Q)$

Dari (i) dan (ii) sehingga diperoleh $f^1(P) \cup f^1(Q) = f^1(P \cup Q)$

c. Jika $P \subset Q$ maka $f^1(P) \subset f^1(Q)$ Ambil maka

Ambil $x \in f^1(P)$ maka $f(x) \in P$

Karena $P \subset Q$ maka $f(x) \in Q$ sehingga $x \in f^1(Q)$

Jadi, $f^1(P) \subset f^1(Q)$.

3.2 Pemetaan Surjektif

Misalkan B adalah himpunan bilangan bulat dan C adalah himpunan bilangan cacah. Pemetaan $f: B \rightarrow C$ didefinisikan oleh $f(x) = |x|, \forall x \in B$.

$$f(-3) = 3 \quad f(3) = 3 \quad f(0) = 0$$

$$f(-2) = 2 \quad f(2) = 2 \quad f(B) = C$$

$$f(-1) = 1 \quad f(1) = 1$$

Setiap elemen dari B pasti mendapat pasangan dengan suatu elemen dari C . Pemetaan seperti ini dinamakan **pemetaan surjektif** atau **pemetaan onto**. Dikatakan bahwa f adalah pemetaan dari B onto C . Hal ini dinyatakan menurut definisi berikut.

Definisi 3.3

Suatu pemetaan $f: S \rightarrow T$ disebut pemetaan surjektif (pemetaan onto) jika dan hanya jika $f(S) = T$.

Dapat pula dikatakan bahwa suatu pemetaan dikatakan surjektif jika setiap elemen dari *kodomain* (daerah kawan) mempunyai pasangan dengan suatu elemen dari *domain* (daerah asal). Secara simbolik ditulis

Pemetaan $f: S \rightarrow T$ dikatakan surjektif $\Leftrightarrow \forall t \in T, \exists x \in S \ni f(x) = t$.

Notasi $\exists$ dibaca “**ada**” dan $\ni$ dibaca “**sedemikian sehingga**”. Definisi tersebut dapat juga dikatakan sebagai berikut.

“Suatu pemetaan dikatakan surjektif (onto) jika dan hanya jika daerah hasilnya sama dengan daerah kawan”.

Hal ini berarti prapeta dari setiap elemen daerah kawan selalu tidak kosong, secara simbolik dituliskan dengan

$$\text{Pemetaan } f: S \rightarrow T \text{ dikatakan surjektif} \Leftrightarrow \forall t \in T, f^{-1}(t) \neq \emptyset$$

Contoh:

1. Misalkan A adalah himpunan bilangan asli dan G adalah himpunan bilangan asli genap, maka pemetaan $f: A \rightarrow G$ yang didefinisikan oleh $f(x) = 2x, \forall x \in A$ adalah suatu pemetaan surjektif.
2. Jika R himpunan bilangan real maka pemetaan $f: R \rightarrow R$ yang didefinisikan oleh $f(x) = x^2, \forall x \in R$ bukan suatu pemetaan surjektif, karena
 - $f^{-1}(-1) = \emptyset$
 - $f^{-1}(-2) = \emptyset$
 - $f^{-1}(-3) = \emptyset$

3.3 Pemetaan Injektif

Definisi 3.4

Suatu pemetaan $f: S \rightarrow T$ disebut pemetaan injektif (pemetaan satu-satu) jika dan hanya jika $\forall x \in f(S), f^{-1}(x)$ merupakan himpunan tunggal (himpunan yang hanya memuat satu elemen).

Dari definisi 3.4 dapat dimengerti bahwa setiap elemen dari daerah hasil mempunyai prapeta tepat satu elemen dari daerah asal. Artinya, setiap dua elemen yang berlainan dalam daerah asal mempunyai peta yang berlainan dalam daerah kawan. Atau dapat dikatakan bahwa tidak ada dua elemen yang berlainan dalam daerah asal yang mempunyai peta yang sama dalam daerah kawan. Hal ini dapat dinyatakan sebagai berikut.

Pemetaan $f: S \rightarrow T$ dikatakan injektif $\Leftrightarrow \forall x, y \in S, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

Dalam penggunaannya untuk menyelesaikan soal, kita menggunakan kontraposisinya, yaitu

Pemetaan $f: S \rightarrow T$ dikatakan injektif $\Leftrightarrow \forall x, y \in S, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Hal ini dikatakan bahwa suatu pemetaan disebut injektif, jika dan hanya jika setiap dua elemen dari daerah asal yang petanya sama, kedua elemen tersebut sama pula.

Contoh:

1. Misalkan A adalah himpunan bilangan asli dan pemetaan $f: A \rightarrow A$ didefinisikan oleh $f(x) = 2x + 1, \forall x \in A$. Pemetaan ini adalah injektif, sebab jika $x, y \in A$ sedemikian sehingga $f(x) = f(y)$, yaitu $2x + 1 = 2y + 1$ maka $x = y$.
2. Misalkan B adalah himpunan bilangan bulat. Pemetaan $f: B \rightarrow B$ didefinisikan dengan $f(x) = x - 10, \forall x \in B$.
 - Pemetaan ini **injektif**
 Jika $\forall a, b \in B$ sedemikian sehingga $f(a) = f(b)$, yaitu $a - 10 = b - 10$ maka $a = b$.

- Pemetaan ini **surjektif**

Untuk sebarang $y \in B$, ada $x \in B$ dengan $x = y+10$,
sedemikian sehingga $f(x) = f(y+10) = y+10-10 = y$.

3.4 Pemetaan Bijektif

Definisi 3.5

Suatu pemetaan yang sekaligus injektif dan surjektif disebut pemetaan bijektif.

Contoh:

1. Misalkan R adalah himpunan bilangan real. Pemetaan $f: R \rightarrow R$ didefinisikan oleh $f(x) = 4x + 3, \forall x \in R$.

- Pemetaan ini **injektif**

Jika $a, b \in R$ sedemikian sehingga $f(a) = f(b)$, yaitu
 $4a + 3 = 4b + 3$, maka $a = b$.

- Pemetaan ini **surjektif**

Untuk sebarang $d \in R$ ada $c \in R$ dengan $c = \frac{d-3}{4}$

sedemikian sehingga $f(c) = f\left(\frac{d-3}{4}\right) = 4\left(\frac{d-3}{4}\right) + 3 = d$.

Karena pemetaan f merupakan pemetaan injektif sekaligus surjektif maka pemetaan f adalah pemetaan bijektif.

2. Misalkan $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ dan $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan real. Pemetaan $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan oleh $f(A) = |A|$, $\forall A \in M$, dengan $|A|$ adalah determinan dari matriks A .

- Pemetaan ini **bukan injektif**

Ambil $A, B \in M$ dengan

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Karena $|A| = |B| = 6$, berarti $f(A) = f(B) = 6$, sedangkan $A \neq B$.

- Pemetaan ini **surjektif**

Untuk sebarang $a \in \mathbb{R}$ ada matriks $D \in M$, misalnya

$$D = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ sedemikian sehingga } f(D) = a, \text{ karena } |D| = a.$$

3. Misalkan S suatu himpunan tidak kosong. Pemetaan $i : S \rightarrow S$ didefinisikan oleh $i(x) = x$, $\forall x \in S$, yaitu memetakan setiap elemen dari S ke elemen itu sendiri. Pemetaan ini injektif sekaligus surjektif, sehingga i merupakan pemetaan bijektif. Pemetaan i tersebut dinamakan pemetaan identitas. Pemetaan identitas pada himpunan S diberi simbol " i_S ".

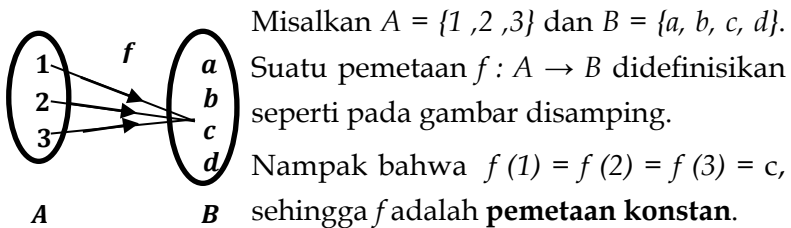
3.5 Pemetaan Konstan

Definisi 3.6

Misalkan $f: A \rightarrow B$ suatu pemetaan dan b suatu elemen dari B . Jika pemetaan f tersebut didefinisikan oleh $f(x) = b, \forall x \in A$ maka f disebut pemetaan konstan.

Jadi pemetaan disebut pemetaan konstan, apabila daerah hasilnya hanya terdiri atas satu elemen saja.

Contoh:



3.6 Rangkuman

1. Fungsi dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu cara atau aturan yang memasangkan setiap elemen dari himpunan A dengan tepat satu elemen dari himpunan B .
2. Prapeta dari t oleh f adalah suatu pemetaan, jika $t \in T$ maka himpunan semua elemen dari S yang dipetakan ke t dan dinyatakan dengan lambang $f^{-1}(t)$.
3. Suatu pemetaan $f: S \rightarrow T$ disebut pemetaan surjektif atau pemetaan onto, jika dan hanya jika $f(S) = T$.

4. Suatu pemetaan $f: S \rightarrow T$ disebut pemetaan injektif atau pemetaan satu-satu, jika dan hanya jika $\forall x \in f(S), f^{-1}(x)$ merupakan himpunan tunggal (himpunan yang hanya memuat satu elemen).
5. Suatu pemetaan yang sekaligus injektif dan surjektif disebut pemetaan bijektif.
6. Pemetaan identitas adalah pemetaan $i: S \rightarrow S$ yang didefinisikan oleh $i(x) = x, \forall x \in S$.
7. Pemetaan konstan adalah pemetaan $f: S \rightarrow T$ yang didefinisikan oleh $f(x) = t, \forall x \in S$.

3.7 Latihan Soal

1. Diketahui $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a, b\}$. Tentukanlah pemetaan atau fungsi dari A ke B. Berapakah banyak pemetaan dari A ke B?
2. Misalkan R adalah himpunan bilangan real, dan pemetaan $g: R \rightarrow R$ didefinisikan oleh

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{Jika } x \geq 1 \\ x + 2, & \text{Jika } x < 1 \end{cases}$$

Tentukan hasil dari . Apakah suatu pemetaan surjektif, injektif, atau bijektif?

3. Diketahui A adalah himpunan bilangan asli. Pemetaan $f: A \rightarrow A$ didefinisikan dengan $f(x) =$ banyaknya angka pada lambang bilangan $x, \forall x \in A$. Tentukan $f(9), f(32), f(531)$, dan $f(10^8)$.

Jika $D = \{x \in A \mid 10^5 < x < 10^9\}$, tentukan $f(D)$.

Apakah f suatu pemetaan surjektif?

Apakah f suatu pemetaan injektif?

4. Misalkan R adalah himpunan bilangan real. Pemetaan $f: R \rightarrow R$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2, \forall x \in R$. Misalkan $A = \{x \mid -1 < x \leq 0, x \in R\}$ dan $B = \{x \mid 0 \leq x < 1, x \in R\}$.

Tentukanlah:

- a. $f(A)$ e. $f(A \cap B)$
 - b. $f(B)$ f. $f(A \cup B)$
 - c. $f^{-1}(A)$ g. $f^{-1}(A \cap B)$
 - d. $f^{-1}(B)$ h. $f^{-1}(A \cup B)$
5. Misalkan R adalah himpunan bilangan real, dan pemetaan $f: R \rightarrow R$ didefinisikan oleh $f(x) = 4x + 5, \forall x \in R$. Tunjukkan bahwa f suatu pemetaan bijektif dan tentukan rumus definisi untuk $f^{-1}(x)$.
6. Diketahui $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{0, 1\}$. Buatlah diagram panah dari A ke B yang menyatakan pemetaan surjektif. Berapa banyak pemetaan surjektif yang dapat disusun dari A ke B ?
7. Diketahui $S = \{1, 2, 3\}$. Berapa banyak pemetaan bijektif yang dapat disusun dari S ke S ?
8. Diketahui $A = \{1, 2\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$. Buatlah suatu pemetaan injektif dari A ke B . Berapa banyak pemetaan injektif yang dapat disusun dari A ke B ?



4. Pemetaan Komposisi dan Pemetaan Invers

4.1 Pemetaan Komposisi

Sebelum membicarakan pemetaan komposisi terlebih dahulu kita membahas mengenai kesamaan dua pemetaan berikut ini.

Definisi 4.1

Dua pemetaan $f: A \rightarrow B$ dan $g: C \rightarrow D$ dikatakan sama (ditulis " $f = g$ ") jika dan hanya jika

- $A = C$
- $B = D$
- $f(x) = g(x), \forall x \in A$

Khususnya pemetaan $f: A \rightarrow B$ dan $g: A \rightarrow B$ dikatakan sama jika dan hanya jika $f(x) = g(x), \forall x \in A$.

Dari definisi tersebut dapat disimpulkan bahwa dua pemetaan dikatakan sama, apabila

- a. Daerah asalnya (*domain*) sama
- b. Daerah kawannya (*kodomain*) sama
- c. Nilai-nilai pemetaannya sama

Contoh:

1. Misalkan A adalah himpunan bilangan asli, dan G adalah himpunan bilangan genap.

Pemetaan $f: A \rightarrow A$ didefinisikan oleh $f(x) = 2x, \forall x \in A$ dan pemetaan $g: A \rightarrow G$ didefinisikan oleh $g(x) = 2x, \forall x \in A$.

- Dua pemetaan ini mempunyai daerah asal (*domain*) yang sama
- Nilai-nilai pemetaan untuk setiap elemen dari A sama pula, sehingga daerah hasilnya sama
- Daerah kawannya (*kodomain*) tidak sama

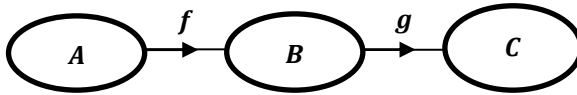
Sehingga dua pemetaan tersebut tidak dapat dikatakan sama. Dapat pula dilihat bahwa pemetaan f tidak surjektif, sedangkan pemetaan g adalah surjektif. Jadi $f \neq g$.

2. Misalkan B adalah himpunan bilangan bulat.

Pemetaan $f: B \rightarrow B$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2 + 2, \forall x \in B$. Pemetaan $g: B \rightarrow B$ didefinisikan oleh $g(t) = t^2 + t, \forall t \in B$. Nampak jelas bahwa pemetaan f dan g tersebut sama, sehingga $f = g$.

Selanjutnya, kita akan membicarakan komposisi dari dua pemetaan. Misalkan $f: A \rightarrow B$ dan $g: B \rightarrow C$ adalah pemetaan.

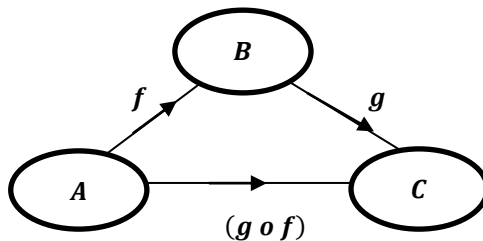
Perhatikan bahwa B menjadi daerah kawan dari pemetaan f , dan menjadi daerah asal dari pemetaan g . Hal ini digambarkan sebagai berikut.



Misalkan $x \in A$ maka oleh pemetaan f , peta dari x , yaitu $f(x)$ berada dalam B , sedangkan B merupakan daerah asal dari pemetaan g . Selanjutnya peta dari $f(x)$ oleh pemetaan g adalah $g(f(x))$ dalam C . Dengan kata lain, kita mempunyai suatu pemetaan dari A ke C . Pemetaan baru ini disebut pemetaan komposisi dari f dan g , dan dinyatakan dengan simbol:

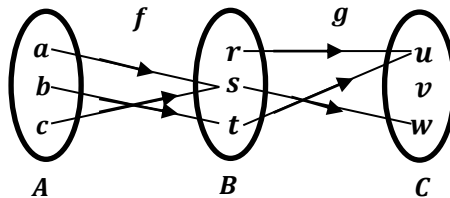
$$g \circ f \text{ atau } (gf)$$

Jadi, jika $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$ masing-masing adalah pemetaan, maka fungsi (pemetaan) komposisi dari f dan g adalah $(g \circ f) : A \rightarrow C$, yang didefinisikan oleh $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in A$. Hal ini digambarkan sebagai berikut.



Contoh:

1. Misalkan $f: A \rightarrow B$ dan $g: B \rightarrow C$ didefinisikan seperti pada gambar berikut.



Maka pemetaan komposisi $(g \circ f) : A \rightarrow C$ didefinisikan oleh

- $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(r) = u$
 - $(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(s) = v$
 - $(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(t) = w$
2. Misalkan A adalah himpunan bilangan asli dan didefinisikan dua pemetaan yaitu f dan g , masing-masing dari A ke A .

$f: A \rightarrow A$ dengan $f(x) = 2x, \forall x \in A$

$g: A \rightarrow A$ dengan $g(x) = x+1, \forall x \in A$

Sehingga diperoleh

- $f: A \rightarrow A$ dengan $f(x) = 2x, \forall x \in A$
- $g: A \rightarrow A$ dengan $g(x) = x+1, \forall x \in A$

Nampak bahwa $g \circ f \neq f \circ g$.

Catatan:

Perhatikan urutannya, sebab $g \circ f \neq f \circ g$.

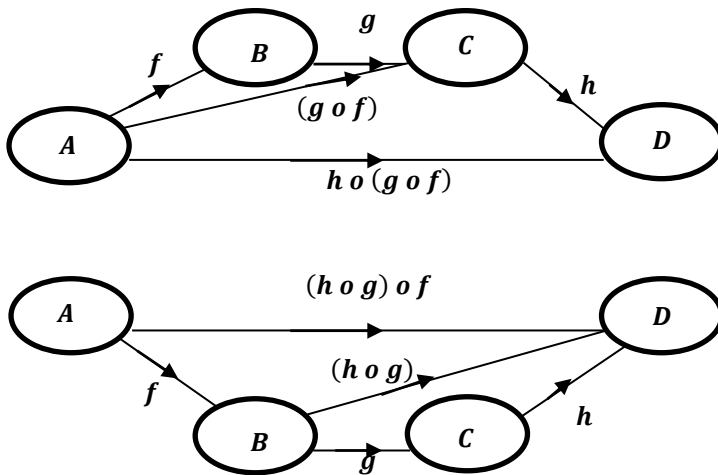
Dapat dikatakan bahwa, jika $f: A \rightarrow B$ dan $g: B \rightarrow C$ adalah pemetaan maka kita dapat membentuk pemetaan komposisi $(g \circ f)$.

$of) : A \rightarrow C$, tetapi pada umumnya kita tidak dapat membentuk pemetaan komposisi $(f \circ g)$. Hanya dalam hal khusus kita dapat membentuknya, misalnya $A = C$ atau $A = B = C$.

Sekarang kita akan membentuk suatu pemetaan komposisi dari 3 pemetaan, misalnya $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, dan $h: C \rightarrow D$. Untuk mengkomposisikan tiga pemetaan ini ada dua cara, yaitu:

- Dibentuk $(g \circ f) : A \rightarrow C$ dan kemudian dibentuk komposisi dari $(g \circ f) : A \rightarrow C$ dan $h: C \rightarrow D$, menjadi $h \circ (g \circ f) : A \rightarrow D$.
- Dari dan dibentuk dan kemudian dibentuk pemetaan komposisi dari dan menjadi .

Dua cara ini dapat dilihat dengan jelas pada gambar di bawah ini.



Dapat ditunjukkan bahwa dua cara ini memberikan hasil yang sama dan kesamaan itu dinamakan **sifat asosiatif**

komposisi dari pemetaan. Hal ini dinyatakan dengan teorema berikut ini.

Teorema 4.1 (Sifat asosiatif komposisi dari pemetaan)

Jika $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, dan $h: C \rightarrow D$ masing-masing adalah pemetaan maka $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, atau ditulis " $h(gf) = (hg)f$ ".

Bukti:

Dapat dimengerti bahwa $h(gf): A \rightarrow D$ dan $(hg)f: A \rightarrow D$. Hal ini menyatakan bahwa kedua pemetaan komposisi tersebut mempunyai daerah asal dan daerah kawan yang sama pula. Sehingga kita hanya membuktikan bahwa

$$[h(gf)](x) = [(hg)f](x), \forall x \in A$$

Menurut definisi pemetaan komposisi

- $[h(gf)](x) = h[(gf)(x)] = h(g(f(x))), \forall x \in A$
- $[(hg)f](x) = (hg)(f(x)) = h(g(f(x))), \forall x \in A$

Jadi, $h(gf) = (hg)f$

Misalkan A suatu pemetaan himpunan yang tidak kosong dan pemetaan $i: A \rightarrow A$ didefinisikan oleh $i(x) = x, \forall x \in A$. Pemetaan i disebut pemetaan identitas pada A dan diberi simbol " i_A ". Pemetaan identitas ini mempunyai keistimewaan dalam komposisi pemetaan, seperti yang termuat dalam teorema berikut.

Teorema 4.2

Misalkan $f: A \rightarrow B$ suatu pemetaan maka $i_B \circ f = f$ dan $f \circ i_A = f$.

Bukti:

$i_B: B \rightarrow B$ dan $i_A: A \rightarrow A$

$(i_B \circ f): A \rightarrow B$ dan $(f \circ i_A): A \rightarrow B$

- $(i_B \circ f)(x) = i_B(f(x)) = f(x), \forall x \in A$
- $(f \circ i_A)(x) = f(i_A(x)) = f(x), \forall x \in A$

Jadi, $i_B \circ f = f$ dan $f \circ i_A = f$

Khususnya, jika $f: A \rightarrow B$ suatu pemetaan maka $i_B \circ f = f \circ i_A = f$.

Contoh:

1. Misalkan $f: A \rightarrow B$ dan $g: B \rightarrow C$ keduanya merupakan pemetaan surjektif. Tunjukkan bahwa pemetaan komposisi $gf: A \rightarrow C$ surjektif pula.
2. Misalkan $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan real. Pemetaan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dan $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, berturut-turut didefinisikan dengan $f(x) = x^2 + 2x - 3$ dan $g(x) = 3x - 4, \forall x \in \mathbb{R}$.
 - a. Tentukan rumus definisi untuk pemetaan komposisi $f \circ g$ dan $g \circ f$.
 - b. Tentukan $(g \circ f)(2)$ dan $(f \circ g)(2)$.

Jawab:

1. Ambil $c \in C$. Karena pemetaan g surjektif maka ada $b \in B$ sedemikian sehingga $g(b) = c$. Karena $b \in B$ dan f suatu pemetaan surjektif maka ada $a \in A$ sedemikian sehingga $f(a) = b$. Maka $g(f(a)) = c$. Jadi, untuk sebarang $c \in C$ ada sekurang-kurangnya satu elemen $a \in A$ sedemikian sehingga $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = c$. Hal ini berarti $(g \circ f): A \rightarrow C$ suatu pemetaan surjektif.

2. Pemetaan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dan $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan real.

$$f(x) = x^2 + 2x - 3 \text{ dan } g(x) = 3x - 4$$

$$\begin{aligned} \text{a. } (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(3x - 4) \\ &= (3x - 4)^2 + 2(3x - 4) - 3 \\ &= 9x^2 - 18x + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2 + 2x - 3) \\ &= 3(x^2 + 2x - 3) - 4 \\ &= 3x^2 + 6x - 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } (g \circ f)(2) &= 3(2)^2 + 6(2) - 13 = 11 \\ (f \circ g)(2) &= 9(2)^2 - 18(2) + 5 = 5 \end{aligned}$$

4.2 Pemetaan Invers

Misalkan $f: A \rightarrow B$ suatu pemetaan. Jika $b \in B$ maka $f^{-1}(b)$ adalah suatu himpunan yang merupakan himpunan bagian dari A . Himpunan bagian ini dapat merupakan himpunan kosong atau himpunan dengan satu elemen atau lebih. Tetapi, apabila $f: A \rightarrow B$ suatu pemetaan bijektif maka untuk setiap $b \in B$, $f^{-1}(b)$ hanya terdiri atas satu elemen dari A . Dalam hal ini kita dapat memasang setiap $b \in B$ dengan tepat satu elemen $f^{-1}(b)$ dalam A , sehingga f^{-1} merupakan suatu pemetaan dari B ke A atau ditulis.

$f^{-1}: B \rightarrow A$ adalah suatu pemetaan

Jadi, apabila $f: A \rightarrow B$ suatu pemetaan bijektif maka $f^{-1}: B \rightarrow A$ adalah suatu pemetaan pula, dan f^{-1} disebut **pemetaan (fungsi) invers** dari f .

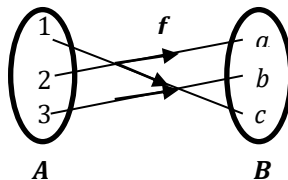
Catatan:

- Apabila $f: A \rightarrow B$ suatu pemetaan maka f^{-1} belum tentu merupakan pemetaan.
- Jika f^{-1} merupakan pemetaan dari B ke A maka $f^{-1}: B \rightarrow A$ disebut **pemetaan invers** dari f .
- Pemetaan $f: A \rightarrow B$ mempunyai pemetaan invers jika dan hanya jika f suatu pemetaan bijektif.

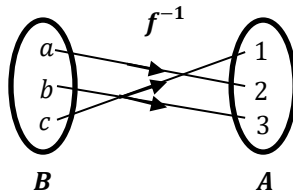
Kita perlu membedakan istilah “invers dari suatu pemetaan” dan “pemetaan invers”. Ingat bahwa invers dari suatu pemetaan belum tentu merupakan suatu pemetaan. Tetapi, apabila invers dari suatu pemetaan merupakan pemetaan, maka pemetaan tersebut disebut **pemetaan invers**.

Contoh:

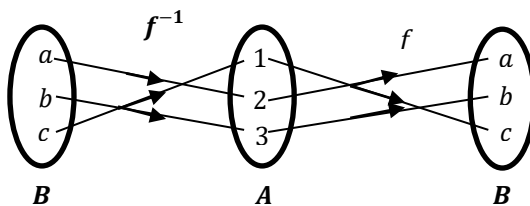
Misalkan $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{x, y, z\}$. Pemetaan $f: A \rightarrow B$ didefinisikan seperti pada gambar berikut.



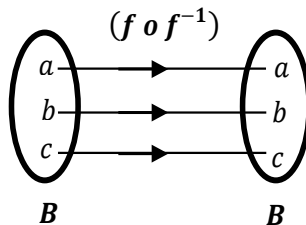
Karena $f: A \rightarrow B$ suatu pemetaan bijektif maka f mempunyai pemetaan invers yaitu $f^{-1}: B \rightarrow A$ seperti pada gambar di bawah ini.



Selanjutnya perhatikan komposisi dari $f: A \rightarrow B$ dan $f^{-1}: B \rightarrow A$ pada gambar berikut.



Secara ringkas (hasilnya) dari gambar sebelumnya dapat ditunjukkan dengan gambar berikut.



Nampak bahwa $f \circ f^{-1}: B \rightarrow B$ (gambar di atas) adalah suatu pemetaan identitas dari B .

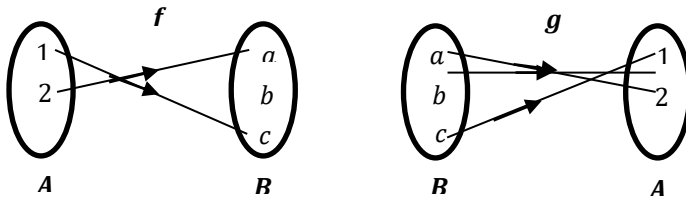
Jadi, apabila pemetaan $f: A \rightarrow B$ mempunyai pemetaan invers $f^{-1}: B \rightarrow A$ maka $f^{-1} \circ f: A \rightarrow A$ merupakan pemetaan identitas pada A dan $f \circ f^{-1}: B \rightarrow B$ merupakan pemetaan identitas pada B . Dengan kata lain, jika pemetaan $f: A \rightarrow B$ mempunyai pemetaan

invers $f^1: B \rightarrow A$ maka $f^1 \circ f = i_A$ dan $f \circ f^1 = i_B$. Hal ini dapat pula dapat dikatakan sebagai berikut:

Jika $f: A \rightarrow B$ dan $g: B \rightarrow A$ maka g adalah pemetaan invers dari f , yaitu $g = f^1$ apabila $g \circ f = i_A$ dan $f \circ g = i_B$.

Contoh:

Misalkan $A = \{1, 2\}$ dan $B = \{a, b, c\}$, pemetaan $f: A \rightarrow B$ dan $g: B \rightarrow A$ didefinisikan seperti pada gambar di bawah ini.



dapat menunjukkan bahwa $(g \circ f): A \rightarrow A$ adalah suatu pemetaan identitas pada A . Perhatikan bahwa:

- $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = 1$
- $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(b) = 2$

Tetapi $(f \circ g): B \rightarrow B$ bukan pemetaan identitas pada B , sebab f bukan pemetaan bijektif sehingga g **bukan pemetaan invers** dari f .

Misalkan pemetaan $f: A \rightarrow B$ dan $g: B \rightarrow C$ masing-masing mempunyai pemetaan invers $f^1: B \rightarrow A$ dan $g^{-1}: C \rightarrow B$ maka pemetaan komposisi $(g \circ f): A \rightarrow C$ mempunyai pemetaan invers $(f^1 \circ g^{-1}): C \rightarrow A$. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut. dan

$$(f^1 \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = i_A \text{ dan } (g \circ f) \circ (f^1 \circ g^{-1}) = i_C$$

$$\begin{aligned}
(f^1 \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^1 \circ (g^{-1} \circ g) \circ f && \text{(Sifat asosiatif komposisi)} \\
&= f^1 \circ (i_B \circ f) && \text{(Pemetaan identitas)} \\
&= f^1 \circ f && \text{(Pemetaan invers)} \\
&= i_A \\
(g \circ f) \circ (f^1 \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^1) \circ g^{-1} && \text{(Sifat asosiatif komposisi)} \\
&= g \circ (i_B \circ g^{-1}) && \text{(Pemetaan identitas)} \\
&= g \circ g^{-1} && \text{(Pemetaan invers)} \\
&= i_C
\end{aligned}$$

Jadi, $(g \circ f)^{-1} = f^1 \circ g^{-1}$

4.3 Rangkuman

1. Jika $f: A \rightarrow B$ dan $g: B \rightarrow C$ merupakan pemetaan maka pemetaan komposisi dari f dan g adalah $(g \circ f): A \rightarrow C$ yang didefinisikan oleh

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \forall x \in A$$

Pemetaan komposisi sering disebut juga hasil kali pemetaan.

2. Sifat asosiatif pemetaan komposisi
Jika $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ dan $h: C \rightarrow D$ adalah pemetaan, maka $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
3. Jika A suatu himpunan yang tidak kosong, dan pemetaan $i: A \rightarrow A$ didefinisikan oleh $i(x) = x, \forall x \in A$ maka pemetaan i disebut pemetaan identitas pada A dengan simbol i_A . Jika $f: A \rightarrow B$ suatu pemetaan maka $i_B \circ f = f$ dan $f \circ i_A = f$.

4. Misalkan $f: A \rightarrow B$ suatu pemetaan maka $f^{-1}: B \rightarrow A$ disebut invers dari pemetaan f . Invers dari suatu pemetaan belum tentu merupakan pemetaan.
5. Pemetaan $f: A \rightarrow B$ mempunyai pemetaan invers jika dan hanya jika f suatu pemetaan bijektif. Jika pemetaan $f: A \rightarrow B$ mempunyai pemetaan invers $f^{-1}: B \rightarrow A$ maka $f^{-1} \circ f = i_A$ dan $f \circ f^{-1} = i_B$.
6. Jika pemetaan $f: A \rightarrow B$ dan $g: B \rightarrow C$ mempunyai pemetaan invers $f^{-1}: B \rightarrow A$ dan $g^{-1}: C \rightarrow B$ maka pemetaan komposisi $(g \circ f): A \rightarrow C$ mempunyai pemetaan invers $(f^{-1} \circ g^{-1}): C \rightarrow A$.
Jadi, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

4.4 Latihan Soal

1. Misalkan R adalah himpunan bilangan real, sedangkan pemetaan $f: R \rightarrow R$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2 + 3x + 1$ dan $g(x) = 2x - 3$ untuk setiap $x \in R$. Tentukan rumus-rumus yang mendefinisikan pemetaan komposisi:
 - a. $f \circ g$
 - b. $g \circ f$
 - c. $g \circ g$
 - d. $f \circ f$

Catatan: $f \circ f$ dapat ditulis sebagai f^2
2. Misalkan R adalah bilangan real sedangkan pemetaan $f: R \rightarrow R$ dan $g: R \rightarrow R$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2 - 2|x|$ dan $g(x) = x^2 + 1$. Tentukanlah:
 - a. $(f \circ g)(-2)$
 - b. $(g \circ f)(3)$

- c. $(g \circ f)(-4)$
 - d. $(f \circ g)(5)$
3. Misalkan R adalah himpunan bilangan real dan pemetaan $f: R \rightarrow R$ didefinisikan oleh $f(x) = 3x - 1$. Apakah f mempunyai invers? mengapa? Jika f mempunyai pemetaan invers, tentukanlah rumus yang didefinisikan f^{-1} . Dengan pernyataan sama untuk $g: R \rightarrow R$ yang didefinisikan oleh $g(x) = x^3 + 5, \forall x \in R$.
4. Misalkan R adalah himpunan bilangan real. Pemetaan $f: R \rightarrow R$ didefinisikan oleh $f(x) = 3x + 4, \forall x \in R$. Tunjukkan bahwa f suatu pemetaan bijektif. Tentukanlah rumus-rumus yang mendefinisikan:
- a. f^{-1}
 - b. $f \circ f$
 - c. $f^{-1} \circ f^{-1}$
5. Misalkan R adalah himpunan bilangan real, $A = R - \{3\}$ dan $B = R - \{1\}$. Misalkan pemetaan $f: A \rightarrow B$ didefinisikan oleh $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$. Tentukan bahwa f merupakan pemetaan bijektif dan rumus yang mendefinisikan f^{-1} .



5. Himpunan Berhingga dan Tak Berhingga

5.1 Himpunan Yang Ekuivalen

Pandang himpunan $H = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$. Banyaknya elemen dari himpunan H adalah 100. Sedangkan banyaknya elemen dari himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ adalah tak berhingga. Selanjutnya dikatakan bahwa H adalah suatu himpunan berhingga, sedangkan A adalah suatu himpunan tak berhingga. Pemahaman himpunan berhingga dan tak berhingga semacam ini disebut pemahaman secara intuitif. Pendekatan lain untuk memahami pengertian himpunan tak berhingga dan berhingga memerlukan pengertian ekuivalensi dua himpunan, atau pengertian dua himpunan yang ekuivalen.

Definisi 5.1

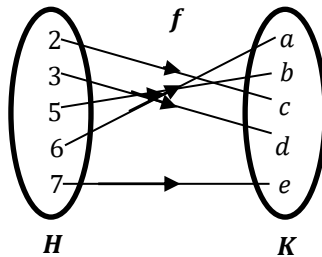
Himpunan H ekuivalen dengan himpunan K dinyatakan dengan $H \sim K$, apabila ada suatu pemetaan bijektif dari H ke K .

Pada definisi 5.1 tentu saja himpunan H dan K bukan himpunan kosong. Selanjutnya, suatu pemetaan bijektif itu menentukan suatu korespondensi satu-satu antara H dan K . Definisi 5.1 dapat dinyatakan sebagai berikut:

$H \sim K$ bila ada suatu korespondensi satu-satu antara himpunan H dan himpunan K .

Contoh:

1. Misalkan $H = \{2, 3, 5, 6, 7\}$ dan $K = \{a, b, c, d, e\}$. Kita dapat membentuk suatu pemetaan bijektif dari H ke K , misalnya seperti pada gambar berikut.



Nampak jelas bahwa $f: H \rightarrow K$ adalah suatu pemetaan bijektif, sehingga $H \sim K$.

2. Misalkan $M = \{a, b, c, d\}$ dan $N = \{2, 3, 4\}$. Jika kita mendaftar semua pemetaan dari M ke N , maka tidak ada satupun yang merupakan pemetaan bijektif sehingga M tidak ekuivalen dengan N .

Setelah memperhatikan contoh di atas, kita tidak mengalami kesulitan untuk menentukan apakah dua himpunan ekuivalen atau tidak. Dua himpunan berhingga dikatakan ekuivalen

apabila banyaknya elemen dari kedua himpunan tersebut sama, sehingga untuk himpunan berhingga definisi 5.1 menjadi:

Himpunan H dan K dikatakan ekuivalen, apabila banyaknya elemen dari himpunan H sama dengan banyaknya elemen dari himpunan K .

Contoh:

1. Misalkan $G = \{x \mid 0 \leq x \leq 1, x \in \text{bilangan real}\}$ dan $H = \{x \mid 0 \leq x \leq 8, x \in \text{bilangan real}\}$. Pemetaan $f: G \rightarrow H$ didefinisikan oleh $f(x) = 8x, \forall x \in G$.

Kita mudah menunjukkan bahwa suatu pemetaan bijektif.

Ambil sebarang $a, b \in G$ sedemikian hingga $f(a) = f(b)$, yaitu $8a = 8b$. Maka kita memperoleh bahwa $a = b$. Hal ini menunjukkan bahwa f suatu pemetaan injektif (satu-satu).

Ambil sebarang $m \in H$, yaitu $0 \leq m \leq 8$ maka $0 \leq m/8 \leq 1$ dan $f(m/8) = m$. Hal ini menunjukkan bahwa f suatu pemetaan surjektif (onto). Jadi f suatu pemetaan bijektif, sehingga $G \sim H$.

2. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ dan $D = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$. Pemetaan $g: A \rightarrow D$ didefinisikan oleh $g(x) = 2x - 1, \forall x \in A$.

Tunjukkan bahwa g suatu pemetaan bijektif.

Karena ada pemetaan g yang bijektif dari A ke D maka $A \sim D$.

Dengan memperhatikan contoh di atas, kita ketahui bahwa suatu himpunan dapat ekuivalen dengan himpunan bagian sejatinya, yaitu

- Contoh (1), $G \subset H$ dan $G \sim H$
- Contoh (2), $D \subset A$ dan $A \sim D$

Tetapi hal ini terjadi pada himpunan tak berhingga. Dengan kata lain, sifat ini merupakan karakteristik dari himpunan tak berhingga. Karakteristik inilah yang diambil untuk mendefinisikan himpunan tak berhingga.

5.2 Himpunan Berhingga dan Tak Berhingga

Definisi 5.2

Suatu himpunan dikatakan tak berhingga apabila himpunan itu ekuivalen dengan himpunan bagian sejatinya. Jika tidak demikian himpunan itu disebut himpunan berhingga.

Definisi 5.2 ini dapat pula dikatakan bahwa suatu himpunan dikatakan tak berhingga, apabila ada suatu himpunan bagian sejatinya yang ekuivalen dengan himpunan semula. Dengan notasi matematika, definisi tersebut dapat ditulis sebagai berikut:

Himpunan H disebut tak berhingga apabila $\exists G \subset H, G \neq \emptyset$ dan $G \neq H$ sehingga $G \sim H$.

Berdasarkan definisi di atas, relasi ekuivalensi antara himpunan-himpunan mempunyai sifat reflesif, simetris, dan transitif, berturut-turut sebagai berikut:

- a. Untuk setiap himpunan H , berlaku hubungan $H \sim H$
(Refleksif)
- b. Untuk setiap himpunan H dan K , jika $H \sim K$ maka $K \sim H$
(Simetris)
- c. Untuk setiap himpunan H , K dan M , jika $H \sim K$ dan $K \sim M$ maka $H \sim M$. **(Transitif)**

Apakah himpunan kosong merupakan himpunan tak berhingga? Himpunan kosong tidak mempunyai himpunan bagian sejati, maka himpunan kosong bukan merupakan himpunan tak berhingga. Jadi, himpunan kosong merupakan himpunan berhingga. Demikian pula himpunan tunggal, yaitu himpunan yang memuat satu elemen adalah himpunan berhingga.

Teorema 5.1

H adalah suatu himpunan tak berhingga jika dan hanya jika ada suatu pemetaan injektif $g: H \rightarrow H$ sedemikian sehingga $g(H) \neq H$.

Bukti:

- Misalkan H suatu himpunan, menurut definisi 5.1 maka ada himpunan bagian sejati dari H , misalkan G sedemikian sehingga $G \sim H$. Karena $G \sim H$ maka $H \sim G$ sehingga ada suatu pemetaan $f: H \rightarrow G$ dan f merupakan pemetaan bijektif.

Dibentuk suatu pemetaan $g: H \rightarrow H$ yang didefinisikan oleh $g(x) = f(x)$, $\forall x \in H$. Karena f suatu pemetaan bijektif, maka g suatu pemetaan injektif dan $G = g(H) \subset H$, tetapi $G \neq H$ meskipun $G \subset H$.

- Sebaliknya, jika ada suatu pemetaan $g: H \rightarrow H$ dan $g(H) \neq H$, serta g pemetaan injektif maka kita dapat membentuk suatu pemetaan $k: H \rightarrow g(H)$ yang didefinisikan oleh $k(x) = g(x)$, $\forall x \in H$. Karena g suatu pemetaan injektif, maka k suatu pemetaan injektif pula. Dan karena $k(x) = g(x)$, $\forall x \in H$ maka k suatu pemetaan surjektif. Sehingga k suatu pemetaan bijektif. Akibatnya $H \sim g(H)$. Dan karena $g(H) \subset H$ berarti ada himpunan bagian sejati dari H yaitu $g(H)$ yang ekuivalen dengan H , sehingga H merupakan suatu himpunan tak berhingga.

Teorema 5.2

Jika H suatu himpunan tak berhingga dan $H \subset K$ maka K suatu himpunan tak berhingga pula.

Bukti:

Diketahui H suatu himpunan tak berhingga dan $H \subset K$, kita harus membuktikan bahwa K suatu himpunan tak berhingga pula. Menurut teorema 5.1, kita harus menunjukkan bahwa ada suatu pemetaan $f: K \rightarrow K$ yang injektif (satu-satu) sedemikian sehingga $f(K) \neq K$.

H suatu himpunan tak berhingga, menurut **Teorema 5.1** berarti ada suatu pemetaan $a: H \rightarrow H$ dengan a suatu pemetaan injektif

dan $a(H) \neq H$. Selanjutnya dibentuk pemetaan $f: K \rightarrow K$ yang didefinisikan oleh:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha(x), & \text{Jika } x \in H \\ x, & \text{Jika } x \in (K-H) \end{cases}$$

Dengan demikian kita tinggal menunjukkan bahwa:

- a. f suatu pemetaan injektif
 - b. $f(K) \neq K$
- a. Ambil sebarang $x, y \in K$ sedemikian hingga $f(x) = f(y)$. Jika $x, y \in H$ dan karena $f(x) = f(y)$, maka $\alpha(x) = \alpha(y)$ sehingga $x = y$, sebab α suatu pemetaan injektif. Dan jika $x, y \in (K-H)$ menurut definisi pemetaan $f: K \rightarrow K$ dan karena $f(x) = f(y)$, maka $x = y$.

Jika $x \in H$ dan $y \in (K-H)$ maka $f(x) = \alpha(x) \in H$ dan $f(y) = y \in (K-H)$. Hal ini bertentangan dengan ketentuan bahwa $f(x) = f(y)$.

Jadi f merupakan fungsi injektif.

- b.
$$\begin{aligned} f(K) &= f(H \cup (K-H)) \\ &= f(H) \cup f(K-H) \\ &= \alpha(H) \cup (K-H) \\ &\neq K \end{aligned}$$

Karena $\alpha(H) \subset H$ dan $\alpha(H) \neq H$

Dari (a) dan (b) dapat disimpulkan bahwa K suatu himpunan tak berhingga

Teorema 5.3

Jika K suatu himpunan berhingga dan $M \subset K$ maka M suatu himpunan berhingga pula.

Bukti:

Akan kita buktikan dengan cara bukti tak langsung, yaitu dengan mengandaikan bahwa M suatu himpunan tak berhingga. Karena $M \subset K$, menurut teorema 5.2 maka diperoleh bahwa K suatu tak berhingga pula. Hal ini bertentangan dengan ketentuan bahwa K suatu himpunan berhingga sehingga pengandaian tersebut tidak benar. Maka pengandaian tersebut harus diingkar, jadi M suatu himpunan berhingga.

Pada contoh, kita telah menunjukkan bahwa $A \sim D$ dengan $A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ dan $D = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$. Mengingat $D \subset A$, menurut definisi 5.2, maka A Suatu himpunan tak berhingga. Apakah $A - \{1\}$ merupakan himpunan tak berhingga? Demikian pula, apakah $A - \{2\}$ merupakan himpunan tak berhingga?

Hal yang sedang kita bahas ini adalah suatu teorema yang dinyatakan sebagai berikut.

Teorema 5.4

Jika H suatu himpunan tak berhingga, $t \in H$ maka $H - \{t\}$ adalah suatu himpunan tak berhingga pula.

Bukti:

Kita menggunakan **Teorema 5.1**, yaitu kita harus memperlihatkan adanya suatu pemetaan, misalnya $\theta: H - \{t\} \rightarrow H - \{t\}$, yang injektif dan $\theta(H - \{t\}) \neq H - \{t\}$.

Menurut ketentuan, H suatu himpunan tak berhingga maka ada suatu pemetaan $f: H \rightarrow H$ yang injektif dan $f(H) \neq H$. Karena $t \in H$ maka ada dua kemungkinan, yaitu:

- a. $t \notin f(H)$ dan
- b. $t \in f(H)$

- a. Jika $t \notin f(H)$, kita bentuk suatu pemetaan $\theta: H - \{t\} \rightarrow H - \{t\}$ yang didefinisikan oleh $\theta(x) = f(x)$, $\forall x \in H - \{t\}$. Sehingga kita tinggal memperlihatkan bahwa θ suatu pemetaan injektif dan $\theta(H - \{t\}) \neq H - \{t\}$. Karena θ suatu pemetaan injektif dan $\theta(x) = f(x)$, $\forall x \in H - \{t\}$ maka θ suatu pemetaan injektif pula.

$t \in H$ maka $f(x) \in f(H)$, karena $t \notin H - \{t\}$ maka k tidak dipetakan oleh pemetaan θ . $t \notin f(H)$, maka $t \notin f(t)$ dan $\theta(x) = f(x)$, $\forall x \in H - \{t\}$. Hal ini berarti $f(H - \{t\}) \neq H - \{t\}$.

- b. Jika $t \in f(H)$ karena f pemetaan injektif dan $f(H) \neq H$, maka ada tepat satu $a \in H$ sedemikian hingga $f(a) = t$ dan ada $b \in H$ tetapi $b \notin f(H)$.

Kita bentuk suatu pemetaan $g: H \rightarrow H$ yang didefinisikan oleh $g(x) = f(x)$, $\forall x \in H$ dan $x \neq a$ dan $g(a) = b$.

Berdasarkan pembentukan g , maka g suatu pemetaan injektif dan $g(H) \neq H$ sebab $t \in H$ dan $t = f(a) \neq g(t)$.

Selanjutnya dibentuk pemetaan $\theta_1: (H - \{t\}) \rightarrow (H - \{t\})$ yang didefinisikan oleh $\theta_1(x) = g(x)$, $\forall x \in H - \{t\}$.

Mirip seperti bukti (a), tunjukkanlah bahwa θ_1 suatu pemetaan injektif dan $\theta_1(H - \{t\}) \neq H - \{t\}$. Selanjutnya anda dapat menyimpulkan bahwa $H - \{t\}$ suatu pemetaan himpunan tak berhingga.

Himpunan $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ dengan n suatu bilangan asli dinamakan suatu segmen bilangan asli dan ditulis dengan notasi A_n .

Segmen-segmen bilangan asli antara lain:

$$A_1 = \{1\}$$

$$A_2 = \{1, 2\}$$

$$A_3 = \{1, 2, 3\}$$

$$A_4 = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$A_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

dan seterusnya

Mudah kita pahami bahwa setiap segmen bilangan asli merupakan himpunan berhingga. Hal ini dapat dibuktikan dengan induksi matematika.

- $A_1 = \{1\}$ jelas suatu himpunan berhingga
- Misalkan untuk suatu bilangan asli k , suatu himpunan berhingga. Kita harus memperlihatkan bahwa suatu himpunan berhingga.

Andaikan A_{k+1} suatu himpunan tak berhingga dan $A_k = A_{k+1} - \{k+1\}$, menurut teorema 5.4, maka A_k suatu himpunan tak berhingga pula. Hal ini bertentangan dengan asumsi dalam induksi bahwa A_k suatu himpunan berhingga. Maka pengandaian tersebut harus diingkar, sehingga diperoleh bahwa A_{k+1} suatu himpunan berhingga.

Sifat segmen bilangan asli ini secara formal dinyatakan sebagai teorema berikut.

Teorema 5.5

Untuk setiap bilangan asli n , maka $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ adalah suatu himpunan berhingga.

5.3 Rangkuman

1. Himpunan H dan K dikatakan ekuivalen, apabila banyaknya elemen dari himpunan H sama dengan banyaknya elemen dari himpunan K .
2. H adalah suatu himpunan tak berhingga bila dan hanya bila ada suatu pemetaan $\theta: H \rightarrow H$, dengan θ suatu pemetaan injektif dan $\theta(H) \neq H$.
3. Dari teorema di atas dapat diturunkan (dibuktikan) sifat-sifat himpunan tak berhingga berikut ini.
 - a. Jika H suatu himpunan tak berhingga dan $H \subset K$ maka K suatu himpunan tak berhingga pula. Sebab akibat dari teorema ini diperoleh sifat himpunan sebagai berikut.
Jika M suatu himpunan berhingga dan $K \subset M$ maka K suatu himpunan berhingga pula.
 - b. Jika H suatu himpunan tak berhingga dan $t \in H$ maka $H - \{t\}$ adalah suatu himpunan tak berhingga pula.
4. $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ dengan suatu bilangan asli disebut segmen bilangan asli. Untuk setiap bilangan asli n , segmen A_n merupakan himpunan berhingga.

5.4 Latihan Soal

1. Jika $H \sim K$ dan $K \sim M$, buktikan bahwa $H \sim M$.
2. Jika A adalah himpunan bilangan asli dan B adalah himpunan bilangan bulat, tunjukkanlah bahwa $A \sim B$ dan B merupakan himpunan tak berhingga.
3. Jika H dan K masing-masing himpunan tak berhingga, manakah di antara $H \cup K$ dan $H \cap K$ yang merupakan himpunan tak berhingga? Buktikan jawaban anda.
4. Misalkan H suatu himpunan tak berhingga dan K suatu himpunan berhingga dengan $K \subset H$. Apakah $H - K$ merupakan himpunan berhingga atau himpunan tak berhingga? Buktikan jawaban anda.
5. Tunjukkan bahwa $P = \{(a, b) \mid a, b \in \text{bilangan asli}\}$ adalah suatu himpunan tak berhingga.
6. Buktikanlah bahwa untuk sebarang himpunan H dan K berlaku $H \times K \sim K \times H$



6. Grup dan Sifat-sifatnya

6.1 Pengertian Grup

Definisi 6.1

Suatu himpunan G yang tidak kosong dengan satu operasi biner “ $*$ ” membentuk suatu grup jika dan hanya jika memenuhi sifat-sifat berikut

a. Tertutup

Untuk setiap $a, b \in G$ dapat ditemukan satu anggota $c \in G$ sehingga $a * b = c$.

$$(\forall a, b \in G \exists c \in G \text{ sehingga } a * b = c)$$

b. Asosiatif

$$\forall a, b, c \in G \text{ maka } (a * b) * c = a * (b * c)$$

c. G memiliki elemen identitas i

$$\exists i \in G, \forall a \in G \text{ sehingga } a * i = i * a = a$$

d. Setiap anggota G mempunyai invers

$$\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G \text{ sehingga } a * a^{-1} = a^{-1} * a = i$$

Jika himpunan G terhadap operasi biner $*$ membentuk suatu grup maka grup G ini dinyatakan dengan notasi $(G, *)$. Tidak setiap grup memiliki sifat komutatif terhadap operasi binernya. Jika grup $(G, *)$ masih memenuhi sifat bahwa:

- e. Operasi biner $*$ pada G bersifat komutatif yaitu untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$, maka grup $(G, *)$ disebut grup abelian (grup komutatif).

Contoh:

1. Himpunan bilangan bulat $B = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ terhadap operasi biner penjumlahan $+$.
 - a. Sifat tertutup dipenuhi yaitu penjumlahan bilangan bulat menghasilkan bilangan bulat.
 - b. Sifat asosiatif dipenuhi, karena penjumlahan bilangan bulat bersifat asosiatif.
 - c. Bilangan bulat terhadap operasi $+$ mempunyai elemen identitas 0 sebab untuk setiap $a \in B$ maka $a + 0 = 0 + a = a$.
 - d. Setiap anggota bilangan bulat mempunyai invers terhadap operasi $+$ yaitu untuk setiap $a \in B$ ada $a^{-1} = -a \in B$ sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
Jadi B dengan operasi $+$ merupakan suatu grup dan ditulis $(B, +)$.
 - e. Sifat komutatif dipenuhi pula, yaitu untuk setiap $a, b \in B$ maka $a + b = b + a$.
Jadi $(B, +)$ merupakan **grup komutatif**.

2. $R = \{x \mid x \in \text{bilangan real}\}$ terhadap penjumlahan
- Tertutup, sebab penjumlahan bilangan real menghasilkan bilangan real.
 - Sifat asosiatif dipenuhi.
 - R mempunyai elemen identitas terhadap operasi penjumlahan yaitu 0, yang disebut elemen netral.
 - Setiap bilangan real mempunyai invers penjumlahan.
 - Sifat komutatif dipenuhi.

Jadi $(R, +)$ merupakan grup komutatif.

3. $G = \{0, 1, 2\}$ adalah himpunan bilangan bulat modulo 3 dengan operasi penjumlahan. Hasil penjumlahan modulo 3 pada G disajikan dalam tabel di bawah ini.

$+ 3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

- Jika dalam kotak hanya terdiri dari anggota G maka sifat tertutup dipenuhi.
- Himpunan bilangan modulo 3 memenuhi sifat asosiatif terhadap penjumlahan bilangan modulo.
- G mempunyai elemen identitas yaitu 0.
- Setiap anggota G mempunyai invers
 Invers 0 adalah 0
 Invers 1 adalah 2
 Invers 2 adalah 1

- e. Letak anggota G dalam tabel simetris terhadap diagonal utama, sehingga $1 + 2 = 2 + 1$
Jadi $(G, +3)$ merupakan grup komutatif.
4. $B = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ dengan operasi perkalian.
- Sifat tertutup dipenuhi, karena perkalian bilangan bulat menghasilkan bilangan bulat.
 - Perkalian bilangan bulat memenuhi sifat asosiatif.
 - B mempunyai elemen identitas yaitu 1.
Untuk setiap (anggota yang bukan 0) berlaku
$$a \times 1 = 1 \times a = a$$
 - Bilangan bulat tidak mempunyai invers perkalian

sebab $2 \times \frac{1}{2} = 1$ dan $\frac{1}{2} \notin B$.

Jadi **bukan grup**.

5. $R = \{x \mid x \in \text{bilangan real}\}$ dengan operasi perkalian.
- Sifat tertutup dipenuhi, karena perkalian bilangan real menghasilkan bilangan real.
 - Perkalian bilangan real memenuhi sifat asosiatif.
 - Mempunyai elemen identitas 1.
 - Pada $(R, \times)$ semua anggota yang bukan 0 (nol) mempunyai invers.

Misalnya:

Invers 2 adalah $\frac{1}{2}$

Invers $-\frac{1}{3}$ adalah -3

Tetapi $0 \in R$ tidak mempunyai invers, sebab tidak ada bilangan real yang memenuhi $0 \times a = 1$, untuk $a \in R$.

Jadi **bukan grup**.

6. $M = \{0, 1, 2\}$ adalah himpunan bilangan bulat modulo 3. Semua hasil perkalian bilangan modulo 3 disajikan dalam tabel di bawah ini.

$\times 3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$(M, \times)$ bukan suatu grup, sebab 0 (nol) tidak mempunyai invers. Demikian pula untuk himpunan bilangan modulo lainnya bukan suatu grup terhadap operasi perkalian.

7. $D = \{-1, 1\}$ terhadap operasi perkalian.
- Merupakan operasi biner yang tertutup. (Mengapa?)
 - D terhadap operasi perkalian mempunyai elemen identitas yaitu 1.
 - Setiap elemen D terhadap operasi perkalian mempunyai invers, yaitu
 - $1^{-1} = 1$
 - $(-1)^{-1} = -1$

Jadi merupakan suatu grup. Tunjukkan bahwa suatu grup abelian.

6.2 Sifat-Sifat Sederhana dari Grup

Teorema 6.1 (Sifat kanselasi, pelenyapan, atau penghapusan)

Jika $(G, *)$ suatu grup maka untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku

- Jika $a * b = a * c$ maka $b = c$ (Kanselasi kiri)
- Jika $b * a = c * a$ maka $b = c$ (Kanselasi kanan)

Bukti:

$(G, *)$ adalah suatu grup dan $a \in G$ maka ada $a^{-1} \in G$ sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = i$, dengan i adalah elemen identitas.

- Menurut ketentuan $a * b = a * c$ maka $a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$

$$(a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c \text{ (Sifat asosiatif)}$$

$$i * b = i * c \text{ (Invers suatu grup)}$$

$$b = c \text{ (Elemen identitas suatu grup)}$$

- Menurut ketentuan $b * a = c * a$ maka $(b * a) * a^{-1} = (c * a) * a^{-1}$

$$b * (a * a^{-1}) = c * (a * a^{-1}) \text{ (Sifat asosiatif)}$$

$$b * i = c * i \text{ (Invers suatu grup)}$$

$$b = c \text{ (Elemen identitas suatu grup)}$$

Teorema 6.2

Jika $(G, *)$ suatu grup dan $a, b \in G$ maka persamaan $a * x = b$ dan $y * a = b$ mempunyai penyelesaian yang tunggal.

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa persamaan $a * x = b$ mempunyai penyelesaian yang tunggal.

- a. Akan dibuktikan bahwa persamaan $a * x = b$ mempunyai penyelesaian.

$(G, *)$ suatu grup dan $a \in G$ maka ada $a^{-1} \in G$.

$$a * x = b$$

$$a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * b$$

$$(a^{-1} * a) * x = a^{-1} * b$$

$$i * x = a^{-1} * b$$

$$x = a^{-1} * b$$

$a^{-1} \in G$ dan $b \in G$ maka $a^{-1} * b \in G$ (Sifat tertutup dari suatu grup)

Sehingga $a^{-1} * b$ merupakan penyelesaian dari persamaan $a * x = b$.

- b. Selanjutnya dibuktikan tunggalnya penyelesaian $a * x = b$.

Misalkan persamaan $a * x = b$ mempunyai penyelesaian x_1 dan x_2 .

Berarti $a * x_1 = b$ dan $a * x_2 = b$, sehingga $a * x_1 = a * x_2$.

Dengan sifat pelenyapan, maka diperoleh $x_1 = x_2$.

Jadi, persamaan $a * x = b$ mempunyai penyelesaian yang tunggal.

Akan dibuktikan bahwa persamaan $y * a = b$ mempunyai penyelesaian yang tunggal.

- a. Akan dibuktikan bahwa persamaan $y * a = b$ mempunyai penyelesaian.

$(G, *)$ suatu grup dan $a \in G$ maka ada $a^{-1} \in G$.

$$y * a = b$$

$$(y * a) * a^{-1} = b * a^{-1}$$

$$y * (a * a^{-1}) = b * a^{-1}$$

$$y * i = b * a^{-1}$$

$$y = b * a^{-1}$$

$a^{-1} \in G$ dan $b \in G$ maka $b * a^{-1} \in G$.

Sehingga $b * a^{-1}$ merupakan penyelesaian dari persamaan $y * a = b$.

- b. Selanjutnya dibuktikan tunggalnya penyelesaian $y * a = b$.

Misalkan persamaan $y * a = b$ mempunyai penyelesaian y_1 dan y_2 .

Berarti $y_1 * a = b$ dan $y_2 * a = b$, sehingga $y_1 * a = y_2 * a$.

Dengan sifat pelenyapan, maka diperoleh $y_1 = y_2$.

Jadi, persamaan $y * a = b$ mempunyai penyelesaian yang tunggal.

Akibat dari teorema 6.1 dan 6.2

- Elemen identitas dalam suatu grup adalah tunggal.
- Invers dari setiap anggota suatu grup adalah tunggal.
- Dalam suatu grup untuk setiap $a \in G$, invers dari a^{-1} adalah $(a^{-1})^{-1} = a$.

Bukti:

- a. Elemen identitas merupakan penyelesaian dari persamaan $a * x = a$.

Jika ruas kiri dan kanan dikalikan dengan a^{-1} dari kiri

$$a * x = a$$

$$a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * a$$

$$(a^{-1} * a) * x = i$$

$$i * x = i$$

$$x = i$$

Jadi i adalah penyelesaian tunggal dari persamaan $a * x = a$

- b. Invers dari a yaitu a^{-1} , merupakan penyelesaian dari persamaan $a * x = i$.

Jika kedua ruas dikalikan dengan a^{-1} dari kiri

$$a * x = i$$

$$a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * i$$

$$(a^{-1} * a) * x = a^{-1} * i$$

$$i * x = a^{-1}$$

$$x = a^{-1}$$

Jadi a^{-1} merupakan penyelesaian tunggal dari persamaan $a * x = i$

- c. $(a^{-1})^{-1}$ merupakan penyelesaian dari persamaan $a^{-1} * x = i$

Jika kedua ruas dikalikan dengan a dari kiri

$$a^{-1} * x = i$$

$$a * (a^{-1} * x) = a * i$$

$$(a * a^{-1}) * x = a$$

$$i * x = a$$

$$x = a$$

Jadi a adalah invers dari a^{-1} atau $(a^{-1})^{-1} = a$.

Teorema 6.3

Jika $(G, *)$ suatu grup dan $a, b \in G$ maka $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

Bukti:

Jika $a, b \in G$ maka $a * b \in G$ sehingga $(a * b)^{-1} \in G$.

$$(a * b) * (a * b)^{-1} = i \dots\dots\dots (i)$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) &= (a * (b * b^{-1})) * a^{-1} && \text{(Sifat asosiatif)} \\ &= (a * i) * a^{-1} && \text{(Invers suatu grup)} \\ &= a * a^{-1} && \text{(Elemen identitas)} \\ &= i && \text{(Invers suatu grup)} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } (a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = i \dots\dots\dots (ii)$$

Dari (i) dan (ii) maka

$$\begin{aligned} (a * b) * (a * b)^{-1} &= (a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) \\ (a * b)^{-1} &= (b^{-1} * a^{-1}) && \text{(Sifat pelenyapan)} \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $(a * b)^{-1} = (b^{-1} * a^{-1})$.

Catatan:

- Suatu grup dengan operasi biner perkalian disebut **grup multiplikatif**.
- **Grup aditif** adalah grup dengan operasi biner penjumlahan.

Banyaknya anggota suatu grup ditulis dengan notasi " $n(G)$ " dan disebut **order** atau **order dari grup G**. Suatu grup yang banyaknya anggota tak berhingga (*infinite*) disebut **grup tak berhingga** (*infinite group*). Sedangkan suatu grup yang banyaknya anggota berhingga disebut **grup berhingga** (*finite group*). Jika G suatu grup yang ordernya kecil (banyaknya anggota G sedikit) maka untuk melihat sifat-sifatnya akan mudah apabila kita menyusun tabel hasil operasi biner dari setiap pasang elemen G .

6.3 Grup Abstrak

Apabila $G = \{i, a, b, c, \dots\}$ dengan $i, a, b, \dots$ elemen yang tidak didefinisikan pada objek tertentu, dan dilengkapi operasi biner " $*$ ", yang memenuhi semua sifat grup maka $(G, *)$ disebut grup abstrak.

Grup ini merupakan pola bagi grup lainnya, dan merupakan abstraksi dari elemen-elemen dan operasi tertentu. Elemen identitas dalam grup abstrak dinyatakan dengan " i ". Operasi biner pada grup abstrak didefinisikan dengan "tabel Cayley".

Catatan:

- Jika $G = \{i, a\}$ maka $(G, *)$ disebut grup abstrak ordo 2
- Jika $G = \{i, a, b\}$ maka $(G, *)$ disebut grup abstrak ordo 3

Contoh:

$G = \{i, a, b\}$ dengan operasi biner " $*$ " dalam tabel

$*$	i	a	b
i	i	a	b
a	a	b	i
b	b	i	a

Pada tabel di atas setiap anggota hanya muncul sekali pada tiap baris dan kolom sehingga memenuhi sifat grup.

Sifat-sifat grup dapat dilihat dalam tabel dengan cara sebagai berikut.

- Jika dalam kotak semua elemen adalah anggota G maka $(G, *)$ memenuhi sifat tertutup.
- Sifat asosiatif dapat dicoba satu persatu.
- Baris dan kolom yang urutan anggota sama dengan urutan baris paling luar menunjukkan elemen identitas yaitu " i ".
- Apabila i muncul pada baris dan kolom yang sama berarti anggota tersebut mempunyai invers dirinya sendiri. Jadi, invers i adalah i dan invers a adalah a .
Apabila i muncul pada baris ke-2 kolom ke-3 dan muncul pada baris ke-3 kolom ke-2 maka kedua anggota tersebut saling invers. Jadi $b^{-1} = c$ dan $c^{-1} = b$.
Apabila tidak demikian berarti anggota tersebut tidak mempunyai invers.
- Persamaan $a * x = b$ mempunyai penyelesaian tunggal apabila setiap baris dalam kotak semua anggota berlainan.

Persamaan $y * a = b$ mempunyai penyelesaian tunggal apabila setiap kolom dalam kotak semua anggota berlainan.

- f. Apabila letak anggota dalam kota simetris terhadap diagonal utama maka sifat komutatif dipenuhi.

6.4 Rangkuman

1. Setiap grup $(G, *)$ harus memenuhi sifat-sifat
 - a. Tertutup, $\forall a, b \in G, \exists c \in G$ sehingga $a * b = c$
 - b. Asosiatif, $\forall a, b, c \in G$ maka $(a * b) * c = a * (b * c)$
 - c. G mempunyai elemen identitas
 $\exists i \in G, \forall a \in G$ sehingga $a * i = i * a = a$
 - d. Setiap anggota G mempunyai invers
 $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G$ sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = i$

Catatan:

Elemen identitas dapat dinyatakan dengan i atau e atau u .

2. Jika himpunan G dengan operasi biner “ $*$ ” merupakan suatu grup maka ditulis $(G, *)$.
3. Jika suatu grup $(G, *)$ bersifat komutatif, yaitu untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$ maka grup $(G, *)$ disebut grup abelian (grup komutatif).
4. Jika banyaknya elemen himpunan G sedikit maka untuk memeriksa apakah G terhadap suatu operasi merupakan suatu grup atau bukan, disusun tabel hasil operasi setiap pasang elemen-elemen G , yang disebut tabel Cayley.

8. Sifat-sifat sederhana dari grup $(G, *)$
 - a. $\forall a, b, c \in G$ berlaku $a * b = a * c$ maka $b = c$
 $b * a = c * a$ maka $b = c$
 - b. Persamaan $a * x = b$ dan $y * a = b$ mempunyai penyelesaian tunggal.
 - c. Elemen identitas dalam grup adalah tunggal.
 - d. Invers dari setiap anggota G adalah tunggal.
 - e. Invers dari invers a adalah a dan ditulis $(a^{-1})^{-1} = a$.
 - f. Jika $a, b \in G$ maka $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$
6. Suatu grup dengan operasi perkalian disebut grup multiplikatif. Suatu grup dengan operasi penjumlahan disebut grup aditif.
7. Banyaknya anggota dalam grup G disebut order dari grup G ditulis $n(G)$. Grup yang mempunyai banyak anggota berhingga disebut grup berhingga (*grup finite*). Grup yang mempunyai anggota tak berhingga disebut grup tak berhingga (*grup infinite*).
8. $G = \{i, a, b, \dots\}$ dengan $i, a, b, \dots$ elemen yang tidak didefinisikan pada objek tertentu dan dilengkapi satu operasi biner “*” memenuhi semua sifat grup maka $(G, *)$ disebut grup abstrak. Operasi biner pada grup abstrak didefinisikan dengan tabel Cayley

6.5 Latihan Soal

1. Selidikilah apakah himpunan G dengan operasi biner di bawah ini merupakan grup.
 - a. G = himpunan bilangan modulo 5 yang bukan nol dengan operasi perkalian.

b. G = himpunan bilangan bulat genap dengan operasi penjumlahan

c. $G = \{A, B, C, D\}$ dengan operasi perkalian matriks dan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d. G = himpunan bilangan modulo 4 yang bukan nol dengan operasi perkalian bilangan modulo 4.

e. $G = \{x | x = a\sqrt{b}, a \text{ bilangan bulat dan } b \text{ bilangan asli}\}$ dengan operasi penjumlahan.

f. $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ dengan operasi komposisi fungsi dan

$$f_1(x) = x \quad f_2(x) = \frac{1}{x} \quad f_3(x) = 1 - x$$

$$f_4(x) = \frac{1}{1-x} \quad f_5(x) = \frac{x}{x-1} \quad f_6(x) = \frac{x-1}{x}$$

2. Jika $a \in G$ dan $a * a = a$ maka $a = i$. Buktikan!
3. Jika untuk setiap $a \in G$ berlaku $a * a = i$ maka $(G, *)$ grup komutatif. Buktikan!



7. Subgrup

7.1 Pengertian Subgrup

Definisi 7.1

Jika G suatu grup dan A adalah himpunan bagian dari G maka A^{-1} merupakan himpunan semua elemen a^{-1} dengan $a \in A$, atau ditulis

$$A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$$

Definisi 7.2

Misalkan $(G, *)$ suatu grup. S disebut subgrup dari G jika dan hanya jika $S \subset G$ dan $(S, *)$ merupakan suatu grup.

Untuk menyatakan suatu subgrup dapat digunakan huruf S atau H atau huruf lain yang dianggap perlu sehubungan dengan himpunannya.

Contoh:

1. $G = \{1, -1, i, -i\}$ dengan $i = \sqrt{-1}$, terhadap operasi perkalian merupakan suatu grup.

Perhatikanlah suatu himpunan bagian dari G yaitu $H = \{-1, 1\}$.

Himpunan H terhadap operasi perkalian merupakan suatu grup.

Hasil kali 1 dan -1 yaitu -1 berada dalam H , sifat asosiatif jelas berlaku. Elemen identitasnya adalah 1 dan setiap elemen dari H mempunyai invers, yaitu

- $(-1)^{-1} = -1$
- $1^{-1} = 1$

$H \subset G$, $(G, \times)$ suatu grup dan $(H, \times)$ merupakan suatu grup pula, sehingga H adalah subgrup dari G .

2. Himpunan bilangan real terhadap operasi penjumlahan merupakan suatu grup.

Himpunan bilangan bulat terhadap operasi penjumlahan adalah suatu grup.

Himpunan bilangan bulat adalah himpunan bagian dari bilangan real.

Sehingga terhadap operasi penjumlahan, himpunan bilangan bulat adalah subgrup dari himpunan bilangan real.

$$R = \{x \mid x \in \text{bilangan real}\}$$

$$B = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$(B, +) \text{ subgrup dari } (R, +)$$

7.2 Sifat-Sifat Subgrup

Teorema 7.1

Misalkan $(G, *)$ suatu grup, $S \subset G$ dan $S \neq \emptyset$. S adalah subgrup dari G jika dan hanya jika

- a. Untuk setiap $a, b \in S$ terdapat $a * b \in S$ (S tertutup pada operasi “ $*$ ”)
- b. Untuk setiap $a \in S$ terdapat $a^{-1} \in S$

Bukti:

- a. Diketahui $(S, *)$ subgrup dari $(G, *)$

Akan dibuktikan bahwa

$$\forall a, b \in S$$

$$\forall a \in S \text{ terdapat } a^{-1} \in S$$

Ambil $a, b \in S$, karena S subgrup maka memenuhi sifat tertutup, asosiatif, mempunyai elemen identitas dan setiap anggota mempunyai invers.

- Dari sifat tertutup diperoleh
 $\forall a, b \in S$ maka $a * b \in S$
- Dari setiap anggota S mempunyai invers
 $\forall a \in S$ maka $a^{-1} \in S$

- b. Diketahui $\forall a, b \in S$ memenuhi $a * b \in S$ dan $\forall a \in S$ maka $a^{-1} \in S$.

Akan dibuktikan $(S, *)$ subgrup dari $(G, *)$

1. $\forall a, b \in S$ memenuhi $a * b \in S$
Jadi sifat tertutup dipenuhi.

2. Karena $S \subset G$ maka S mempunyai sifat asosiatif.

3. $\forall a \in S$ maka $a^{-1} \in S$

Karena S tertutup maka $a * a^{-1} = i$ dan $i \in S$. S mempunyai elemen identitas.

4. $\forall a \in S$ maka $a^{-1} \in S$

Berarti setiap anggota mempunyai invers.

Jadi $(S, *)$ subgrup dari $(G, *)$.

Teorema 7.2

Misalkan $(G, *)$ suatu grup, $S \neq \emptyset$ dan $S \subset G$. S subgrup dari G bila dan hanya bila untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a * b^{-1} \in S$.

Bukti:

a. Akan dibuktikan bahwa jika S subgrup dari G maka untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a * b^{-1} \in S$

S subgrup dari G berarti $(S, *)$ suatu grup.

Ambil $b \in S$ karena S suatu grup maka $b^{-1} \in S$.

Ambil $a \in S$ dan $b^{-1} \in S$, karena S adalah grup maka $a * b^{-1} \in S$.

b. Akan dibuktikan bahwa jika untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a * b^{-1} \in S$ maka S adalah subgrup dari G .

- Ambil sebarang $a \in S$

Menurut ketentuan $a * a^{-1} \in S$

Karena $a * a^{-1} = i$ maka $i \in S$. Ini berarti S memuat elemen identitas

- Ambil sebarang $b \in S$ dan $i \in S$

Menurut ketentuan $i * b^{-1} = b^{-1}$ maka $b^{-1} \in S$. Ini berarti setiap elemen S mempunyai invers.

- Ambil $a \in S$ dan $b^{-1} \in S$
 $a * (b^{-1})^{-1} \in S$ sehingga $a * (b^{-1})^{-1} = a * b$. Ini berarti $a * b \in S$ maka S tertutup terhadap operasi $“*”$.
- Karena $S \subset G$ dan $(G, *)$ suatu grup maka operasi $“*”$ pada S juga berlaku sifat asosiatif.

Jadi S subgrup dari G bila dan hanya bila $\forall a, b \in S$ berlaku $a * b^{-1} \in S$.

Definisi 7.3

Misalkan $(G, *)$ suatu grup dengan elemen identitas i . $(G, *)$ dan $(\{i\}, *)$ merupakan subgrup dari G dan disebut subgrup tidak sejati dari G . Subgrup lainnya disebut subgrup sejati.

Teorema 7.3

Jika $(T, *)$ subgrup dari $(S, *)$ dan $(S, *)$ subgrup dari $(G, *)$ maka $(T, *)$ subgrup dari $(G, *)$.

Bukti:

$(T, *)$ subgrup dari $(S, *)$ berarti $T \subset S$ dan $(T, *)$ grup.

$(S, *)$ subgrup dari $(G, *)$ berarti $S \subset G$ dan $(S, *)$ grup.

Jika $T \subset S$ dan $S \subset G$ maka $T \subset G$

$T \subset G$ dan $(T, *)$ grup.

Jadi $(T, *)$ subgrup dari $(G, *)$.

Teorema 7.4

$(G, *)$ suatu grup. Apabila H dan S masing-masing adalah subgrup dari G maka $H \cap S$ suatu subgrup dari G .

Bukti:

Ambil $a, b \in H \cap S$

$a \in H \cap S$ maka $a \in H$ dan $a \in S$

$b \in H \cap S$ maka $b \in H$ dan $b \in S$

$a \in H$ dan $b \in H$ maka $a * b \in H$

$a \in S$ dan $b \in S$ maka $a * b \in S$

$a * b \in H$ dan $a * b \in S$ maka $a * b \in H \cap S$

Jadi $H \cap S$ tertutup terhadap operasi “*” (i)

Ambil $a \in H \cap S$ maka $a \in H$ dan $a \in S$

$a \in H$ dan H suatu subgrup maka $a^{-1} \in H$

$a \in S$ dan S suatu subgrup maka $a^{-1} \in S$

$a^{-1} \in H$ dan $a^{-1} \in S$ maka $a^{-1} \in H \cap S$

Jadi setiap elemen $H \cap S$ mempunyai invers (ii)

Dari (i) dan (ii) dapat disimpulkan bahwa $H \cap S$ suatu subgrup dari G .

Teorema 7.5

$(G, *)$ suatu grup. Jika S subgrup dari G maka

- a. $SS = S$
- b. $S^{-1} = S$

Bukti:

$(G, *)$ suatu grup dan S merupakan subgrup dari G .

- a. $SS = S$

i. Akan dibuktikan bahwa $SS \subset S$

Ambil sebarang $y \in SS$ maka $y = a * b$ dengan $a, b \in S$.

Karena $a, b \in S$ dan S suatu subgrup maka $a * b \in S$, $y \in SS$, $y = a * b$ dan $a * b \in S$. Berarti $y \in S$.

Jadi $SS \subset S$

ii. Akan dibuktikan bahwa $S \subset SS$

Ambil $z \in S$ dan $i \in S$.

Karena S subgrup maka $z * i \in SS$.

Tetapi karena $z * i = z$ maka $z \in SS$.

Jadi $S \subset SS$.

Dari (i) dan (ii) sehingga diperoleh $SS = S$.

- b. $S^{-1} = S$

i. Akan dibuktikan bahwa $S \subset S^{-1}$

Ambil $a \in S$ dan karena S suatu subgrup maka $a^{-1} \in S$.

Jika $a^{-1} \in S$ maka $(a^{-1})^{-1} \in S^{-1}$ (Definisi 6.1).

Karena $(a^{-1})^{-1} = a$ maka $a \in S^{-1}$

Jadi, jika $a \in S$ maka $a \in S^{-1}$, berarti $S \subset S^{-1}$

ii. Akan dibuktikan bahwa $H^{-1} \subset H$

Ambil $b \in S^{-1}$ maka $b = y^{-1}$ dengan $y \in S$

$y \in S$ dan S suatu subgrup maka $y^{-1} \in S$.

$b = y^{-1}$ dan $y^{-1} \in S$ maka $b \in S$

Jadi, jika $b \in S^{-1}$ maka $b \in S$, berarti $S^{-1} \subset S$.

Dari (i) dan (ii) sehingga diperoleh $S^{-1} = S$.

Teorema 7.6

Apabila $(G, *)$ suatu grup sedangkan H dan S merupakan subgrup dari G , maka HS merupakan subgrup dari G jika dan hanya jika $HS = SH$.

Bukti:

$(G, *)$ suatu grup sedangkan H dan S merupakan subgrup dari G .

- a. Dibuktikan HS subgrup $G \Rightarrow HS = SH$

Menurut teorema 6.5 (b), jika HS subgrup maka

$$(HS)^{-1} = HS \dots\dots\dots (i)$$

Begitu pula H subgrup maka $H^{-1} = H$ dan S subgrup maka $S^{-1} = S$

$$(HS)^{-1} = S^{-1} H^{-1} \text{ (Buktikan sebagai latihan)}$$

$$(HS)^{-1} = SH \dots\dots\dots (ii)$$

Dari (i) dan (ii) disimpulkan bahwa $HS = SH$

- b. Dibuktikan $HS = SH \Rightarrow HS$ suatu subgrup dari G

Ambil sebarang $a, c \in H$ dan $b, d \in S$ dan karena H dan S masing-masing subgrup dari G maka $a * c \in H$ dan $b * d \in S$.

Ambil $(a * b) \in H S$ dan $(c * d) \in H S$ maka

$$\begin{aligned}
 (a * b) * (c * d) &= ((a * b) * c) * d && \text{(Sifat asosiatif)} \\
 &= (a * (b * c)) * d && \text{(Sifat asosiatif)} \\
 &= (a * (c * b) * d) && \text{(HS = SH)} \\
 &= ((a * c) * b) * d && \text{(Sifat asosiatif)} \\
 &= (a * c) * (b * d) && \text{(Sifat asosiatif)}
 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } (a * b) * (c * d) = (a * c) * (b * d)$$

Karena $a * c \in H$ dan $b * d \in S$ maka $(a * c) * (b * d) \in H S$ sehingga $(a * b) * (c * d) \in H S$ pula.

Hal ini berarti HK tertutup terhadap operasi “*” .. (i)

Ambil $a \in H$ dan $b \in S$ maka $(a * b) \in H S$

$a \in H$ dan H suatu subgrup maka $a^{-1} \in H$

$b \in S$ dan S suatu subgrup maka $b^{-1} \in S$

$a^{-1} \in H$ dan $b^{-1} \in S$ maka $a^{-1} * b^{-1} \in H S$

Ingat bahwa

$$\begin{aligned}
 (a * b)^{-1} &= b^{-1} * a^{-1} \\
 &= a^{-1} * b^{-1} && \text{(Karena HS = SH)}
 \end{aligned}$$

Sehingga $(a * b)^{-1} \in H S$ pula

Jadi jika $(a * b) \in H S$ maka $(a * b)^{-1} \in H S$.

Ini berarti setiap elemen HS mempunyai invers terhadap operasi “*” (ii)

Dari (i) dan (ii) maka HS merupakan subgrup dari G.

7.3 Rangkuman

1. S disebut subgrup dari $(G, *)$ jika dan hanya jika $S \subset G$ dan $(S, *)$ merupakan suatu grup.
2. $S \subset G$ dan $S \neq \emptyset$ maka S subgrup dari G bila dan hanya bila
 - a. $\forall a, b \in S$ berlaku $a * b \in S$
 - b. $\forall a \in S$ maka $a^{-1} \in S$
3. G dan $\{e\}$ adalah subgrup tak sejati dari G .
4. Jika $(S, *)$ subgrup dari $(G, *)$ dan $(T, *)$ subgrup dari $(S, *)$ maka $(T, *)$ subgrup dari $(G, *)$
5. Jika H dan S adalah subgrup dari G maka $H \cap S$ suatu subgrup dari G
6. Jika S subgrup dari $(G, *)$ maka $SS = S$ dan $S^{-1} = S$.
7. H dan S merupakan subgrup dari grup $(G, *)$. HS subgrup dari G jika dan hanya jika $HS = SH$.

7.4 Latihan Soal

1. $G = \{1, 2, 3, 4\}$ himpunan bilangan bulat modulo 5 yang bukan nol. $(G, \times)$ suatu grup komutatif. Tentukan subgrup dari $(G, \times)$.
2. $(G, *)$ suatu grup, H dan S masing-masing adalah subgrup dari G . Buktikan bahwa $(HS)^{-1} = S^{-1}H^{-1}$.
3. $(G, *)$ suatu grup dan $a \in G$. Buktikanlah bahwa $H = \{y \mid y \in G \text{ dan } y * a = a * y\}$ adalah suatu subgrup dari G .



8. Grup Simetri

8.1 Pengertian Permutasi

Definisi 8.1

Permutasi adalah pemetaan satu lawan satu fungsi bijektif dari himpunan n simbol ke himpunan itu sendiri.

Jika $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ maka suatu fungsi berikut merupakan permutasi.

$$1 \rightarrow f(1) = j_1$$

$$2 \rightarrow f(2) = j_2$$

$$3 \rightarrow f(3) = j_3$$

$$\cdot \quad \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \quad \cdot$$

$$n \rightarrow f(n) = j_n$$

Jika f bijektif dan $j_i \in A$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$

Permutasi disajikan dengan notasi 2 baris berikut ini.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

Contoh:

a. $A = \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} f: 1 &\rightarrow f(1) = 1 \\ 2 &\rightarrow f(2) = 2 \end{aligned} \quad \text{ditulis } f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} g: 1 &\rightarrow g(1) = 2 \\ 2 &\rightarrow g(2) = 1 \end{aligned} \quad \text{ditulis } g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Jadi terdapat dua permutasi pada A.

b. $A = \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} f: 1 &\rightarrow f(1) = 3 \\ 2 &\rightarrow f(2) = 1 \\ 3 &\rightarrow f(3) = 2 \end{aligned} \quad \text{ditulis } f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Urutan baris pertama dapat diubah, asal bayangan masing-masing anggota tetap, akan menghasilkan permutasi yang sama. Apabila bayangan yang ada berubah, maka akan menghasilkan permutasi yang lain.

Banyaknya permutasi pada ada 6, yaitu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Himpunan A disebut himpunan yang elemen-elemennya dipermutasikan. Apabila elemen-elemen yang dipermutasikan diketahui, permutasi dengan notasi 2 baris dapat dinyatakan dalam notasi siklis atau dalam bentuk sikel. Permutasi dapat diuraikan menjadi bagian-bagian yang elemen terakhirnya mempunyai bayangan elemen pertama. Setiap bagian disebut **sikel**. Suatu sikel yang terdiri atas satu anggota boleh tidak ditulis asal tidak mengubah permutasi. Sikel yang terdiri atas 2 anggota disebut **transposisi**.

Contoh:

Ubahlah permutasi berikut ini menjadi sikel-sikel

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Jawab:

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ adalah $1 \rightarrow 2$
 $2 \rightarrow 3$
 $3 \rightarrow 1$

Ditulis: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$

Jadi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3)$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ adalah $1 \rightarrow 3$
 $2 \rightarrow 1$
 $3 \rightarrow 2$

Ditulis: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

Jadi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ 3 \ 2)$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ditulis $1 \rightarrow 1$
 $2 \rightarrow 3 \rightarrow 2$

Jadi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2 \ 3) = (2 \ 3)$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1 \ 2)(3)$

e. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1)(2)(3)(4)$ harus ditulis lengkap

Contoh:

Tuliskan siklus berikut dalam notasi 2 baris

- $(1 \ 3 \ 4 \ 2)$
- $(1 \ 3 \ 5)$
- $(1 \ 5 \ 4 \ 3)$

Jawab:

- a. $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ berarti $1 \rightarrow 3$ atau $1 \rightarrow 3$

$$\begin{array}{ll} 3 \rightarrow 4 & 2 \rightarrow 1 \\ 4 \rightarrow 2 & 3 \rightarrow 4 \\ 2 \rightarrow 1 & 4 \rightarrow 2 \end{array}$$

$$\text{Jadi } (1 \ 3 \ 4 \ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- b. $(1 \ 3 \ 5) = (1 \ 3 \ 5)(2)(4)$

$$\text{Jadi } (1 \ 3 \ 5) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- c. $(1 \ 5 \ 4 \ 3) = (1 \ 5 \ 4 \ 3)(2)$

$$\text{Jadi } (1 \ 5 \ 4 \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

8.2 Perkalian Permutasi

Permutasi adalah pemetaan atau fungsi, maka permutasi dapat dikomposisikan satu dengan yang lain. Komposisi permutasi disebut juga perkalian permutasi. Pada komposisi fungsi, dikerjakan terlebih dahulu dan dilanjutkan dengan .

Contoh:

Jika $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dan $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, tentukanlah $f \circ g$ dan $g \circ f$.

Jawab:

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

g dikerjakan dahulu oleh f . Ambil satu anggota misalnya 1. Oleh g maka $1 \rightarrow 2$ dan oleh f , $2 \rightarrow 1$.

Jadi oleh $f \circ g$ maka $1 \rightarrow 1$

Skemanya sebagai berikut

$$\begin{array}{l} f \quad g \\ 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \end{array}$$

$$\text{Sehingga } f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Untuk $g \circ f$ atau gf , skemanya sebagai berikut

$$\begin{array}{l} g \quad f \\ 1 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \\ 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \end{array}$$

$$\text{Sehingga } gf = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Catatan:

- Perhatikan bahwa $gf \neq fg$
- Perkalian permutasi pada umumnya tidak berlaku komutatif.

Contoh:

Tentukanlah perkalian permutasi berikut.

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c. $(1 \ 3 \ 2 \ 4) (1 \ 4 \ 3)$

Jawab:

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ dengan $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ dikerjakan dahulu

Dengan mudah dapat dikerjakan sebagai berikut

$$\begin{array}{cc} \text{II} & \text{I} \\ \begin{pmatrix} \textcircled{1} & \triangle & \boxed{3} \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \textcircled{1} & \boxed{3} & \triangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

c. Sikel harus diubah menjadi 2 baris

$$\begin{aligned} (1 \ 3 \ 2 \ 4) (1 \ 4 \ 3) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8.3 Grup Simetri dari Himpunan Permutasi

Pada $A = \{1, 2, 3\}$ terdapat 6 buah permutasi. Himpunan permutasi $P = \{a, b, c, d, e, f\}$ dengan

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

dengan operasi perkalian permutasi membentuk suatu grup.

Teorema 8.1

Himpunan permutasi merupakan grup dengan operasi perkalian permutasi, dan disebut **Grup Simetri**.

Bukti:

Misalkan: $P = \{a, b, c\}$ dengan a, b, c permutasi dari n simbol, dengan

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \\ l_1 & l_2 & l_3 & \cdots & l_n \end{pmatrix}$$

Dengan j_i, k_i, l_i adalah salah satu dari $1, 2, 3, \dots, n$ dan untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad ba &= \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$b \in P, a \in P \Rightarrow ba \in P$ (**Sifat Tertutup**)

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad cb &= \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \\ l_1 & l_2 & l_3 & \cdots & l_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \\ l_1 & l_2 & l_3 & \cdots & l_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (cb)a &= \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \\ l_1 & l_2 & l_3 & \cdots & l_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ l_1 & l_2 & l_3 & \cdots & l_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$ba = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \text{ (Lihat bagian pertama)}$$

$$\begin{aligned}
 c(ba) &= \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \\ l_1 & l_2 & l_3 & \cdots & l_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ l_1 & l_2 & l_3 & \cdots & l_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$(cb)a = c(ba)$ (**Sifat Asosiatif**)

- G mempunyai elemen identitas $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} a i &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \\ &= a \end{aligned}$$

- Setiap anggota G mempunyai invers

Invers dari $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$ adalah

$$a^{-1} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}, \text{ karena}$$

$$\begin{aligned} a^{-1} a &= \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} = i \end{aligned}$$

Demikian pula invers dari $b = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$ adalah

$$b^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

Contoh:

$G = \{i, a, b, c, d, e\}$ dengan operasi perkalian permutasi,

$$i = (1) (2) (3) \quad a = (1 \ 2 \ 3) \quad b = (1 \ 3 \ 2)$$

$$c = (2 \ 3) \quad d = (1 \ 3) \quad e = (1 \ 2)$$

Perkalian permutasi mudah dikerjakan jika dinyatakan dengan notasi dua baris, yaitu:

$$\begin{aligned} i &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & a &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & b &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ c &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & d &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & e &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beberapa perkalian permutasi terdapat sebagai berikut:

$$ab = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = i$$

$$ac = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = e$$

$$bb = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = a$$

$$bc = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = d$$

$$cd = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = a$$

Kerjakan perkalian permutasi dengan anggota yang lain, hasilnya disajikan dalam tabel berikut ini.

<i>*</i>	<i>i</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>i</i>	<i>i</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>i</i>	<i>e</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>i</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>c</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>i</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>d</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>i</i>	<i>a</i>
<i>e</i>	<i>e</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>i</i>

Sifat yang dipenuhi oleh $(G, *)$ adalah

- Tertutup, sebab dalam kotak hanya terdiri dari anggota G
- Perkalian permutasi memenuhi sifat asosiatif
- G mempunyai elemen identitas i
- Setiap anggota G mempunyai invers

$$i^{-1} = i \qquad a^{-1} = b \qquad b^{-1} = a$$

$$c^{-1} = c \qquad d^{-1} = d \qquad e^{-1} = e$$

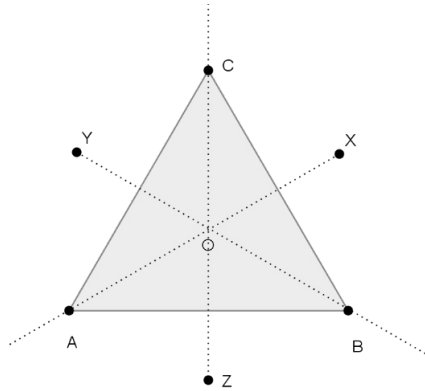
Jadi $(G, *)$ merupakan suatu grup, dan disebut **Grup Simetri** dari himpunan permutasi.

8.4 Grup Simetri dari Bangun Geometri

Suatu bangun geometri dapat dimasukkan dalam bingkainya dengan transformasi sehingga bangun itu invariant, atau berimpit dengan dirinya sendiri. Bangun geometri tersebut antara lain, segitiga sama sisi, persegi, persegi panjang, jajargenjang, dan belahketupat. Transformasi tersebut adalah rotasi atau pemutaran dan refleksi atau pencerminan.

Contoh:

Suatu segitiga sama sisi ABC dapat dimasukkan dalam bingkainya dalam 6 cara, sehingga segitiga ABC berimpit dengan dirinya sendiri. Dalam hal ini, dapat dikatakan bahwa ada 6 transformasi sehingga segitiga sama sisi ABC invariant.



Keenam transformasi tersebut adalah tiga rotasi dan tiga refleksi.

- a. Ketiga rotasi itu adalah rotasi pada bidang dengan pusat O dan arah perputaran berlawanan dengan arah perputaran jam, yaitu
 - I rotasi dengan sudut 360°
 - R rotasi dengan sudut 120°
 - R^2 rotasi dengan sudut 240°
- b. Ketiga refleksi itu adalah
 - A refleksi terhadap sumbu A_x
 - B refleksi terhadap sumbu B_x
 - C refleksi terhadap sumbu C_x

Himpunan dengan operasi komposisi transformasi merupakan grup dan sebut Grup Simetri dari segitiga samasisi.

Transformasi geometri tersebut dapat dikaitkan dengan permutasi dengan 3 simbol. Pada titik sudut A , B , dan C berturut-turut diberi nomor 1, 2, dan 3.

Setelah diputar dengan R , posisi menjadi:

$$A \rightarrow B \quad B \rightarrow C \quad C \rightarrow A \quad \text{atau}$$

$$1 \rightarrow 2 \quad 2 \rightarrow 3 \quad 3 \rightarrow 1$$

$$\text{Jadi } R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Setelah diputar dengan R^2 posisi menjadi

$$1 \rightarrow 3 \quad 2 \rightarrow 1 \quad 3 \rightarrow 2$$

$$\text{Jadi } R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1) (2) (3)$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3)$$

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1 \quad 3 \quad 2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2 \quad 3)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 3)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1 \quad 2)$$

Komposisi transformasi dapat dilakukan sebagai berikut

$$RR^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = I$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = R^2$$

Dengan cara yang sama dapat dibuat tabel komposisi transformasi sebagai berikut

$*$	I	R	R^2	A	B	C
I	I	R	R^2	A	B	C
R	R	R^2	I	C	A	B
R^2	R^2	I	R	B	C	A
A	A	B	C	I	R	R^2
B	B	C	A	R^2	I	R
C	C	A	B	R	R^2	I

8.5 Rangkuman

1. Permutasi adalah pemetaan satu lawan satu atau fungsi bijektif dari himpunan simbol ke himpunan itu sendiri.
2. Permutasi dapat dinyatakan dengan notasi 2 baris dan notasi siklis.

a. Notasi 2 baris : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$ dengan j salah satu $1, 2, 3, \cdots, n$

b. Notasi siklis $(1\ 2\ 3\ \cdots\ n)$

3. Perkalian permutasi sesuai dengan komposisi fungsi, $\alpha \cdot \beta$ berarti β dikerjakan dahulu dilanjutkan dengan α , dilakukan dengan notasi 2 baris.
4. Himpunan permutasi dengan operasi perkalian permutasi merupakan grup, dan disebut grup simetri.
5. Bangun geometri dapat dimasukkan dalam bingkainya dengan transformasi, sehingga bangun tersebut

berimpit dengan dirinya sendiri. Bangun geometri tersebut adalah segitiga sama sisi, persegi, persegi panjang, belah ketupat, dan jajar genjang.

6. Transformasi yang menyebabkan bangun geometri tersebut invarian adalah rotasi pada bidang dan refleksi.
7. Himpunan transformasi merupakan grup dengan komposisi transformasi, dan disebut grup simetri dari bangun geometri.

8.6 Latihan Soal

1. Ubahlah permutasi berikut menjadi notasi siklis
 - a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
 - b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$
2. Ubahlah permutasi berikut menjadi notasi 2 baris
 - a. $(1 \ 3 \ 4)(5 \ 2 \ 6)$
 - b. $(1 \ 3 \ 4 \ 2 \ 5)$
3. Tentukan hasil kali permutasi berikut dan tentukan inversnya
 - a. $(1 \ 3 \ 4)(1 \ 2 \ 4)$
 - b. $(1 \ 2 \ 3 \ 5)(3 \ 2 \ 5 \ 1 \ 4)$
4. $G = \{i, a, b, c\}$ dengan

$$i = (1)(2)(3)(4)$$

$$a = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Tunjukkan bahwa $(G,*)$ grup dengan “ $*$ ” merupakan perkalian permutasi.

5. Suatu persegi ABCD dapat dimasukkan dalam bingkai dengan 8 cara, sehingga persegi ABCD berimpit dengan dirinya sendiri. Dalam hal ini ada 8 transformasi sehingga persegi ABCD invariant. Transformasi itu adalah:
 - a. Rotasi pada bidang dengan pusat O perpotongan diagonal dan arah perputaran berlawanan arah dengan arah perputaran jam, yaitu:
 - I rotasi dengan sudut 360°
 - R rotasi dengan sudut 90°
 - R^2 rotasi dengan sudut 180°
 - R^3 rotasi dengan sudut 270°
 - b. Refleksi atau pencerminan, yaitu
 - X refleksi terhadap sumbu X
 - Y refleksi terhadap sumbu Y
 - A refleksi terhadap sumbu AC
 - B refleksi terhadap sumbu BD

Buatlah tabel komposisi transformasi pada $G = \{I, R, R^2, R^3, X, Y, A, B\}$. Jelaskan bahwa $(G,*)$ merupakan grup.



9. Grup Siklik

9.1 Pengertian Grup Siklik

Definisi 9.1

- a^m adalah $a \times a \times a \times \dots \times a$ dari m factor dengan m bilangan bulat positif.
- a^{-m} adalah $a^{-1} \times a^{-1} \times \dots \times a^{-1}$ dari m factor. $a^{-m} = (a^{-1})^m$, dengan a^{-1} merupakan invers dari a dan m bilangan bulat positif.
- a^0 adalah elemen identitas. Jadi $a^0 = i$.

Teorema 9.1

$(a^m)^{-1} = (a^{-1})^m$, dengan a^{-1} merupakan invers dari a .

Bukti:

$$\begin{aligned}
(a^m)^{-1} &= (a^m \times a^m \times a^m \times \dots \times a^m)^{-1} \\
&= a^{-m} \times a^{-m} \times \dots \times a^{-m} \\
&= a^{-1} \times a^{-1} \times \dots \times a^{-1} \quad (a^{-1} \text{ sebanyak } m \text{ factor}) \\
&= (a^{-1})^m
\end{aligned}$$

Teorema 9.2

$(a^m)^n = a^{mn}$, dengan m dan n bilangan bulat.

Bukti:

Akan dibuktikan dengan Induksi Matematika sebagai berikut.

a. Untuk $n = 1$ maka $(a^m)^1 = a^{m \cdot 1} \Leftrightarrow a^m = a^m$

b. Misalkan teorema benar untuk $n = k$

$$\text{Jadi } (a^m)^k = a^{mk}$$

Jika $n = k + 1$ maka

$$(a^m)^n = (a^m)^{k+1}$$

$$(a^m)^n = a^{mk} \cdot a^{m \cdot 1}$$

$$= a^{mk+m \cdot 1}$$

$$= a^{m(k+1)}$$

Jadi teorema tersebut juga benar untuk $n = k+1$. Sehingga teorema benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ bilangan bulat.

Teorema 9.3

$a^m \times a^n = a^{m+n}$, dengan m dan n bilangan bulat.

Bukti:

Dengan m dan n bilangan bulat, mungkin positif (+), negatif (-), atau nol. Ada 9 kemungkinan hubungan antara m dan n tersebut, yaitu:

$*$	i	a	b	c	d	e
i	i	a	b	c	d	e
a	a	b	i	e	c	d
b	b	i	a	d	e	c
c	c	d	e	i	a	b
d	d	e	c	b	i	a
e	e	c	d	a	b	i

Ambil salah satu kemungkinan, misalnya $m > 0$, $n < 0$ dan $|m| > |n|$

n negatif dapat ditulis sebagai $n = -p$, dengan p bilangan bulat positif, $m > p$.

$$a^m \times a^n = a^m \times a^{-p}$$

$$= \underbrace{(a \times a \times \dots \times a)}_{m \text{ factor}} \times \underbrace{(a^{-1} \times a^{-1} \times \dots \times a^{-1})}_{p \text{ factor}}$$

$$= \underbrace{(a \times a \times \dots \times a)}_{(m-1) \text{ factor}} \times \underbrace{(a \times a^{-1})}_i \times \underbrace{(a^{-1} \times a^{-1} \times \dots \times a^{-1})}_{(p-1) \text{ factor}}$$

$$= \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{(m-2) \text{ factor}} \times \underbrace{(i \times a \times a^{-1})}_{(p-2) \text{ factor}} \times \underbrace{(a^{-1} \times a^{-1} \times \cdots \times a^{-1})}_{(p-2) \text{ factor}}$$

Dan seterusnya, karena $m > p$ sehingga

$$a^m \times a^n = \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{(m-p) \text{ factor}} \times \underbrace{(i \times i \times \cdots \times i)}_{p \text{ factor}}$$

$$= a^{m-p} \times i^p$$

$$= a^{m+(-p)} \times i$$

$$= a^{m+n}$$

Kemungkinan yang lainnya di buktikan dengan cara yang sama.

Teorema 9.4

Jika $a b = b a$ sedangkan n adalah bilangan bulat maka

$$(ab)^n = a^n b^n$$

Bukti:

n bilangan bulat berarti ada 3 kemungkinan untuk n yaitu positif, negatif, atau nol. Ambil salah satu, misalnya n negatif maka $n = -p$ dengan p bilangan bulat positif.

Jika $ab = ba$ maka $(ab)^{-1} = (ba)^{-1}$

$$\begin{aligned}
 (ab)^n &= (ab)^{-p} \\
 &= ((ab)^{-1})^p \\
 &= (a^{-1}b^{-1})^p \\
 &= \underbrace{(a^{-1}b^{-1})(a^{-1}b^{-1})(a^{-1}b^{-1}) \dots (a^{-1}b^{-1})}_{p \text{ faktor}} \\
 &= \underbrace{(a^{-1} \cdot a^{-1} \dots a^{-1})}_{p \text{ faktor}} \underbrace{(b^{-1} \cdot b^{-1} \dots b^{-1})}_{p \text{ faktor}} \\
 &= a^{-p} b^{-p} \\
 &= a^n b^n
 \end{aligned}$$

Untuk kemungkinan yang lain, diserahkan kepada anda sebagai latihan.

Definisi 9.2

Suatu grup S atau subgrup S dari G disebut siklik. Jika dan hanya jika ada $a \in G$ sehingga $S = \{a^k \mid k \in \text{bilangan bulat}\}$.

a disebut generator atau penghasil (pembentuk) S . Grup siklik dengan generator a ditulis " $S = [a]$ ".

Definisi 9.3

Misalkan $G = \{a^0, a^1, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots\}$ adalah grup siklik dengan generator a . Jika ada bilangan bulat positif terkecil n sehingga $a^n = i$, maka dikatakan a berorder (bertingkat) n . Jika tidak ada n sehingga $a^n = i$, kecuali $n = 0$ maka generator a berorder tak berhingga.

Suatu grup siklik mungkin berhingga atau tak berhingga. Jika G suatu grup dengan n anggota, maka dikatakan G berorder n berorder .

Contoh:

1. Misalkan $S = \{i, a, b\}$ adalah grup perkalian permutasi dengan

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ambil $a \in S$

$$a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = b$$

$$a^3 = a^2 \cdot a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = i$$

$$a^4 = a^3 \cdot a = i \cdot a = a$$

$$a^5 = a^3 \cdot a^2 = i \cdot a^2 = a^2$$

$$a^6 = a^3 \cdot a^3 = i \cdot i = i$$

$$S = \{i, a, b\} = \{a, b, i\} = \{a, a^2, a^3 = i\}$$

S grup siklik dengan generator a berorder 3, sebab 3 adalah bilangan bulat positif sehingga $a^3 = i$.

Dengan cara yang sama diperoleh $S = \{b, b^2, b^3 = i\}$, yaitu grup siklik dengan generator b berorder 3.

2. Misalkan $G = \{1, -1, i, -i\}$ dengan $i = \sqrt{-1}$ dengan $i^2 = -1$ dengan operasi perkalian pada himpunan bilangan bulat, maka $(G, \times)$ merupakan grup dengan elemen identitas 1.

Ambil $i \in G$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i \cdot i^2 = i \cdot (-1) = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = i^2$$

$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = i^3$$

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$G = \{1, -1, i, -i\} = \{i, -1, -i, 1\} = \{i, i^2, i^3, i^4 = 1\}$$

$(G, \times)$ adalah grup siklik dengan generator i berorder 4. Karena 4 adalah bilangan bulat positif terkecil sehingga $i^4 = 1$, elemen identitas dari G .

Selidikilah apakah G merupakan grup siklik dengan generator $-i$. Perhatikan sekarang penjumlahan berulang dalam memahami grup siklik.

Definisi 9.4

- ma adalah $a + a + \cdots + a$, dengan m suku dan m bilangan bulat positif.
- $m(-a)$ dimaksud adalah $(-a) + (-a) + \cdots + (-a)$, dengan m suku; $-m \cdot a = m(-a)$ dan $-a$ adalah invers penjumlahan dari a .
- $0 \times a = 0$ adalah elemen identitas grup aditif.

Teorema 9.5

- $ma + na = (m+n)a$
- $(-ma) + (-na) = -(m+n)a$

Bukti:

$$\begin{aligned}
 \text{a. } ma + na &= \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{m \text{ suku}} + \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n \text{ suku}} \\
 &= \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{(m+n) \text{ suku}} \\
 &= (m+n)a
 \end{aligned}$$

Jadi $ma + na = (m+n)a$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } (-ma) + (-na) &= m(-a) + n(-a) \\
 &= \underbrace{(-a) + (-a) + \cdots + (-a)}_{m \text{ suku}} + \underbrace{(-a) + (-a) + \cdots + (-a)}_{n \text{ suku}}
 \end{aligned}$$

$$= \underbrace{(-a) + (-a) + \cdots + (-a)}_{(m+n) \text{ suku}}$$

$$= -(m+n)a$$

$$\text{Jadi } (-ma) + (-na) = -(m+n)a$$

Teorema 9.6

$n(a+b) = na + nb$ dengan a, b bilangan bulat dan n bilangan bulat positif.

Bukti:

$$n(a+b) = \underbrace{(a+b) + (a+b) + \cdots + (a+b)}_{n \text{ suku}}$$

Dengan sifat komutatif dan asosiatif diperoleh:

$$\begin{aligned} n(a+b) &= \underbrace{a+a+\cdots+a}_{n \text{ suku}} + \underbrace{b+b+\cdots+b}_{n \text{ suku}} \\ &= na + nb \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } n(a+b) = na + nb$$

Contoh:

1. Misalkan B = himpunan bilangan bulat, maka $(B, +)$ merupakan grup.

Ambil $1 \in B$

$$1 + 1 = 2$$

$$1 + 1 + 1 = 3$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

Setiap bilangan bulat n dapat dinyatakan dengan $1 + 1 + 1 + \dots + 1$, jumlah dari n suku.

Jadi $(B, +)$ merupakan grup siklik dengan generator 1 dan merupakan grup siklik.

2. $G = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$ maka $(G, +)$ merupakan grup.

Ambil $3 \in G$

$$3 + 3 = 6 \quad \text{atau} \quad 6 = 2 \cdot 3$$

$$3 + 3 + 3 = 9 \quad \text{atau} \quad 9 = 3 \cdot 3$$

Setiap anggota G dapat dinyatakan sebagai $k \cdot 3$, dengan k bilangan bulat.

Jadi $(G, +)$ merupakan grup siklik tak berhingga dengan generator 3.

Teorema 9.7

Setiap grup siklik adalah komutatif

Bukti:

Misalkan G grup siklik dengan generator a

$$G = [a] = \{a^n \mid n \text{ bilangan bulat}\}$$

Misalkan $g_1, g_2 \in G$

Berarti ada bilangan bulat s dan t sehingga $g_1 = a^s$ dan $g_2 = a^t$, maka

$$g_1 \cdot g_2 = a^s \cdot a^t$$

$$= a^{s+t}$$

$$= a^{s+t}, \text{ karena } s + t = t + s$$

$$= a^t \cdot a^s$$

$$=g_2 \cdot g_1$$

Jadi $g_1, g_2 \in G$ berlaku $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$ sehingga G grup merupakan komutatif.

Teorema 9.8

Jika G adalah grup siklik dengan generator a yang berorder n , maka $a^0, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}$ adalah anggota yang berlainan satu sama lain.

Bukti:

Perhatikan anggota G : $a^0, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}$

Dalam hal ini a adalah generator G berorder n , berarti n bilangan bulat positif terkecil sehingga $a^n = i$.

Andaikan teorema itu tidak benar, maka ada bilangan bulat s dan t dengan $0 \leq s < t < n$ sehingga $a^s = a^t$.

$a^s \in G$ dan $a^{-s} \in G$ karena $0 \leq s < t < n$ maka $0 < t - s < n$

Karena $a^s = a^t$, maka

$$a^s \cdot a^{-s} = a^t \cdot a^{-s}$$

$$i = a^{t-s}$$

Jadi $a^{t-s} = i$, dengan $t - s < n$

Ini bertentangan dengan ketentuan bahwa n adalah bilangan bulat positif terkecil yang bersifat $a^n = i$. Ternyata pengandaian salah.

Jadi $a^0, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}$ semuanya berlainan.

Sekarang jika ada bilangan bulat $k > n$ maka $k = q \cdot n + r$ dengan q dan r bilangan bulat dan $0 \leq r < n$ (Teorema sisa).

$$a^n = i$$

$$(a^n)^q = (i)^q = i$$

$$\text{Jadi } a^{nq} = i$$

$$\text{Perhatikan } a^k = a^{nq+r}$$

$$= a^{nq} \cdot a^r$$

$$= i \cdot a^r$$

$$= a^r, \text{ dengan } r < n$$

Dengan demikian setiap a^k dengan $k > n$ akan sama dengan salah satu dari $a^0, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}$.

Jadi hanya ada n anggota G yang berlainan.

Teorema 9.9

Setiap subgroup S dari grup siklik G adalah siklik.

Jika a adalah generator dari G , maka generator dari S adalah a^m dengan m bilangan bulat positif terkecil sehingga a^m merupakan anggota dari S .

Bukti:

G grup siklik dengan generator a . Jadi $G = [a]$.

S subgroup dari G , berarti $S \subset G$ dan S merupakan grup.

Misalkan m bilangan bulat positif terkecil sehingga a^m merupakan anggota dari S . Ambil sebarang anggota dari S , misalnya $a^p \in S$ dengan $p > m$.

Menurut teorema sisa, ada bilangan bulat positif q dan bilangan bulat r sehingga $p = m \cdot q + r$ dengan $0 \leq r < m$.

$$p = m \cdot q + r \Rightarrow r = p - m \cdot q$$

$$a^{mq} = (a^m)^q = a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdots a^m, \text{ dengan } q \text{ factor}$$

$$a^m \in S \Rightarrow a^mq \in S \text{ dan } a^{-mq} \in S$$

$$a^r = a^{p-mq} = a^p \cdot a^{-mq} \text{ dengan } a^p \in S \text{ dan } a^{-mq} \in S$$

Jadi $a^r \in S$ dengan $0 \leq r < m$

Hal ini bertentangan dengan ketentuan bahwa m bilangan bulat positif terkecil yang bersifat $a^m \in S$.

$$\text{Jadi } r = 0 \text{ dan } a^p = a^{mq} = (a^m)^q$$

Anggota S berbentuk $(a^m)^q$, dan S merupakan grup siklik dengan generator a^m .

Teorema 9.10

Jika G grup siklik, dengan generator a berorder $n > 0$, sedangkan S adalah subgroup siklik dengan generator a^m , maka m merupakan factor dari n dan S berorder $\frac{n}{m}$.

Pembuktian harap Anda kerjakan sebagai latihan.

Teorema 9.11

Misalkan G adalah suatu grup siklik dengan order n , sedangkan $a^t \in G$ dengan $0 < t < n$. Maka a^t merupakan generator dari G jika dan hanya jika $(n, t) = 1$.

Pembuktian harap Anda kerjakan sebagai latihan.

Contoh:

1. Misalkan $G = \{z_k \mid z_k \text{ adalah akar dari persamaan } z^4 = 1, z \text{ bilangan kompleks}\}$.

Jadi $G = \{1, -1, i, -i\}$ dengan elemen identitas 1.

G adalah grup siklik dengan generator i berorder $n = 4$.

$S = \{1, -1\}$ merupakan subgrup dari G , akan ditunjukkan bahwa S merupakan subgrup siklik.

$$S = \{1, -1\} = \{-1, 1\} = \{i^2, (i^2)^2\}$$

Jadi S adalah subgrup siklik dengan generator i^2 berorder $k = 2$.

$n(G) = 4, n(S) = 2$ dan 2 adalah factor dari 4.

2. $G = \{a, a^2, a^3, \dots, a^{16} = i\}$ adalah grup siklik.

Misalkan $S = \{i, a^4, a^8, a^{12}\}$.

Tunjukkan bahwa merupakan subgrup siklik dari .

Perhatikan tabel di bawah ini

*	i	a^4	a^8	a^{12}
i	i	a^4	a^8	a^{12}
a^4	a^4	a^8	a^{12}	i
a^8	a^8	a^{12}	i	a^4
a^{12}	a^{12}	i	a^4	a^8

Berdasarkan tabel, diperoleh

- Sifat tertutup dipenuhi
- $i^{-1} = i$
- $(a^4)^{-1} = a^{12}$

$$d. (a^8)^{-1} = a^8$$

$$e. (a^{12})^{-1} = a^4$$

Jadi S merupakan subrup dari G

$$S = \{i, a^4, a^8, a^{12}\} = \{a^4, (a^4)^2, (a^4)^3, i\}$$

Sehingga S merupakan grup siklik dengan generator a^4 .

$$n(G) = 16 \text{ dan } n(S) = 4.$$

9.2 Rangkuman

1. Perkalian berulang

$$a. a^m = a \cdot a \cdot a \cdots a, \text{ dengan } m \text{ factor}$$

$$b. a^{-m} = a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot a^{-1} \cdots a^{-1} \text{ dengan } m \text{ factor dan } a^{-1} \text{ adalah invers dari } a; a^{-m} = (a^{-1})^m$$

$$c. a^0 = i$$

$$d. (a^m)^{-1} = (a^{-1})^m$$

$$e. a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$f. (a^m)^n = a^{mn}$$

$$g. \text{ Jika } ab = ba \text{ maka } (ab)^n = a^n \cdot b^n$$

2. Penjumlahan berulang

$$a. ma = a + a + a + \cdots + a, \text{ dengan } m \text{ suku}$$

$$b. m(-a) = (-a) + (-a) + \cdots + (-a), \text{ dengan } m \text{ suku; } m(-a) = -m \cdot a$$

$$c. 0 \cdot a = 0$$

$$d. ma + na = (m+n) a$$

$$e. (-ma) + (-na) = -(m+n) a$$

$$f. n(a+b) = na + nb$$

3. Suatu grup G disebut siklik jika dan hanya jika $G = \{a^k \mid k \text{ bilangan bulat}\}$
4. $G = \{a, a^2, a^3, a^4, \dots\}$ adalah grup siklik dengan generator
 - a. Jika ada bilangan bulat positif n sehingga $a^n = i$ maka a berorder n dan G mempunyai n anggota yang semuanya berlainan.
 - b. Jika tidak ada n sehingga $a^n = i$, kecuali $n = 0$ maka a berorder tak berhingga dan G mempunyai anggota tak berhingga.
 - c. G berorder n berarti mempunyai n anggota yang berlainan.
5. Setiap grup siklik adalah komutatif
6. Setiap grup S dari grup siklik G adalah siklik. Jika a generator dari G maka generator dari S adalah a^m dengan m bilangan bulat positif terkecil sehingga $a^m \in S$.
7. Jika G grup siklik generator a berorder $n > 0$ dan S subgrup siklik dengan generator a^m maka m factor dari n dan S berorder n/m .
8. G suatu grup siklik dengan order n dan $a^t \in G$ dengan $0 < t < n$ maka a^t merupakan generator dari G jika dan hanya jika $(n, t) = 1$.

9.3 Latihan Soal

1. Apakah $G = \{z_k \mid z_k \text{ akar dari persamaan } z^6 = 1, z \text{ bilangan kompleks}\}$ dengan operasi perkalian merupakan grup siklik? Jelaskan!
2. Jika G adalah grup siklik dengan generator a berorder $n > 0$ dan S merupakan subgrup siklik dengan generator a^m maka m factor dari n dan S berorder $\frac{n}{m}$. Buktikan!
3. Jika G suatu grup siklik dengan order n dan $a^t \in G$ dengan $0 < t < n$ maka a^t merupakan generator dari G jika dan hanya jika $(n, t) = 1$. Buktikan!
4. Dari soal nomor 1, misalkan $G = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6 = i\}$. Tentukanlah:
 - a. Subgrup siklik dari G
 - b. Anggota dari G yang dapat menjadi generator grup siklik G
5. Misalkan G adalah grup siklik dengan generator a . Buktikanlah bahwa G merupakan suatu grup tak berhingga jika dan hanya jika $a^k = a^t \Rightarrow k = t$



10. Koset dan Teorema Lagrange

10.1 Pengertian Koset

Definisi 10.1

Jika H suatu subgrup dari grup $(G, *)$ dan $a \in G$ maka $Ha = \{h * a \mid h \in H\}$ disebut koset kanan dari H dalam G , sedangkan $aH = \{a * h \mid h \in H\}$ disebut koset kiri dari H dalam G .

Subgrup dapat dinyatakan dengan H atau S atau huruf yang lain. Dalam contoh berikut H dan S dua-duanya muncul, tetapi dalam pembahasan koset selanjutnya akan digunakan S .

- Apabila $(G, +)$ merupakan grup dan S subgrup dari G , maka
 $aS = \{a + s \mid s \in S\}$ dan $Sa = \{s + a \mid s \in S\}$
- Apabila $(G, \times)$ merupakan grup dan S subgrup dari G , maka
 $aS = \{a \times s \mid s \in S\}$ dan $Sa = \{s \times a \mid s \in S\}$

Secara umum, $a * s$ ditulis as dan $s * a$ ditulis sa .

Contoh:

1. Misal: $G = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ sedangkan $(G, +)$ merupakan grup.

$$S = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

maka $S_2 = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$ adalah koset kanan dari S

$S_3 = \{\dots, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$ adalah koset kanan dari S

$1S = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$ adalah koset kiri dari S

2. Misalkan B adalah himpunan bilangan bulat maka B dengan operasi penjumlahan merupakan grup. H_5 adalah himpunan bilangan bulat kelipatan 5, maka H_5 dengan operasi penjumlahan juga merupakan grup.

$H_5 \subset B$, jadi H_5 merupakan subgrup dari B .

Koset kanan dimana H_5 dalam B untuk $4 \in B$ adalah $H_5 4$.

$$B = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$H_5 = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$$

$$H_5 4 = \{h + 4 \mid h \in H_5\} \Leftrightarrow H_5 4 = \{\dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots\}$$

$3H_5$ koset kiri dari H_5 dalam B

$$3H_5 = \{3 + h \mid h \in H_5\} \Leftrightarrow 3H_5 = \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\}$$

3. Misal:

$G = \{i, a, b, c, d, e\}$ sedangkan $(G, *)$ adalah grup dengan

$$i = (1) \quad (2) \quad (3) \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

"*" adalah operasi perkalian permutasi

Hasil kali anggota G disajikan dalam tabel berikut ini

<i>*</i>	<i>i</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>i</i>	<i>i</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>i</i>	<i>e</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>i</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>c</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>i</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>d</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>i</i>	<i>a</i>
<i>e</i>	<i>e</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>i</i>

Subgrup dari G adalah $\{i, a, b\}$, $\{i, c\}$, $\{i, d\}$, $\{i, e\}$

Misalkan $S = \{i, c\}$

Koset kanan dari S dalam G adalah

$$Si = \{i, c\} \quad Sc = \{c, i\}$$

$$Sa = \{ia, ca\} = \{a, d\} \quad Sd = \{id, cd\} = \{d, a\}$$

$$Sb = \{ib, cb\} = \{b, e\} \quad Se = \{ie, ce\} = \{e, b\}$$

Koset kiri dari S dalam G adalah

$$iS = \{i, c\} \quad cS = \{c, i\}$$

$$aS = \{ai, ac\} = \{a, e\} \quad dS = \{di, dc\} = \{d, b\}$$

$$bS = \{bi, bc\} = \{b, d\} \quad eS = \{ei, ec\} = \{e, a\}$$

4. Misal $G = \{1, -1, i, -i\}$ dengan $i = \sqrt{-1}$ atau $i^2 = -1$, maka $(G, \times)$ merupakan grup dengan elemen identitas 1, Misal $S = \{1, -1\}$, maka S merupakan subgrup dari G
- Koset kanan dari S dalam G adalah
- $$S1 = \{1, -1\} \quad Si = \{i, -i\}$$
- $$S(-1) = \{-1, 1\} \quad S(-i) = \{-i, i\}$$

Koset kiri dari S dalam G adalah

$$1S = \{1, -1\} \quad iS = \{i, -i\}$$

$$(-1)S = \{-1, 1\} \quad (-i)S = \{-i, i\}$$

5. Misalkan $G = \{I, R, R^2, A, B, C\}$ menyatakan grup transformasi dari segitiga sama sisi $A B C$. Subgrup dari G adalah $\{I, R, R^2\}$, $\{I, A\}$, $\{I, B\}$, dan $\{I, C\}$. Misalkan $S = \{I, R, R^2\}$.

Koset kanan dari S dalam G adalah

$$SI = \{I, R, R^2\} \quad SA = \{A, C, B\}$$

$$SR = \{R, R^2, I\} \quad SB = \{B, A, C\}$$

$$SR^2 = \{R^2, I, R\} \quad SC = \{C, B, A\}$$

Koset kiri dari S dalam G adalah

$$IS = \{I, R, R^2\} \quad AS = \{A, B, C\}$$

$$RS = \{R, R^2, I\} \quad BS = \{B, C, A\}$$

$$R^2S = \{R^2, I, R\} \quad CS = \{C, A, B\}$$

Perhatikan lagi definisi koset. Misalkan S adalah subgrup dari $(G, *)$.

Misalkan anggota dari S adalah $h_1, h_2, h_3, \dots$ yang semuanya berlainan.

Jika $a \in G$ dan $a \notin S$, maka anggota dan koset kanan Sa adalah $h_1 * a, h_2 * a, h_3 * a, \dots$, yang semuanya berlainan pula. Sebab jika ada anggota dalam Sa yang sama, yaitu $h_i * a = h_j * a$, dengan sifat kanselasi diperoleh $h_i = h_j$. Hal ini tidak mungkin karena anggota dari S semuanya berlainan. Begitu pula anggota dari koset kanan Sa tidak ada yang sama dengan anggota dari S . Sebab andaikan ada yang sama, misalkan $h_i * a = h_j$, dengan $h_i, h_j \in S$ yang berarti

$$h_i^{-1} * (h_i * a) = h_i^{-1} * h_j$$

$$(h_i^{-1} * h_i) * a = h_i^{-1} * h_j$$

$$i * a = h_i^{-1} * h_j$$

$$a = h_i^{-1} * h_j$$

S suatu subgrup maka S suatu grup. Sehingga, apabila $h_j \in S$ maka $h_i^{-1} \in S$ pula. $h_i, h_i^{-1} \in S$ maka $(h_i * h_i^{-1}) \notin S$ (karena sifat tertutup). Karena $a = h_i^{-1} * h_j$ maka $a \in S$. Hal ini pun tidak mungkin, sebab tadi mengambil $a \in G$ dengan $a \notin S$.

Pernyataan ini dapat ditunjukkan melalui contoh 3, yaitu $S = \{i, c\}$.

- Jika $i \in S$ dan $c \in S$ maka $Si = S$ dan $Sc = S$
- Jika $a \notin S$ dan $b \notin S$ maka $Sa \notin S$ dan $Sb \notin S$

Untuk memahami sifat-sifat koset, perlu Anda perhatikan bahwa

$$(Sa) a^{-1} = Si = S$$

$$(Sb) b^{-1} = Si = S$$

Dalam contoh 3 diketahui bahwa a dan b saling invers, yaitu $a^{-1} = b$ dan $b^{-1} = a$. Ambil $Sa = \{a, d\}$ dan $Sb = \{b, e\}$.

$$(Sa) a^{-1} = (Sa) b = \{ab, db\} = \{i, c\} = S$$

$$(Sb) b^{-1} = (Sb) a = \{ba, ea\} = \{i, c\} = S$$

10.2 Sifat-Sifat Koset

Teorema 10.1

Jika S adalah subgroup dari grup G , dan $a \in S$ maka $Sa = S$

Bukti:

i. Akan dibuktikan bahwa $Sa \subset S$

Sa adalah koset kanan dari S , yang anggotanya adalah hasil kali anggota S dan a , dari kanan. Karena S adalah subgroup yang memenuhi sifat tertutup, dan $a \in S$ maka hasil kali setiap anggota S dengan a merupakan anggota S pula.

Jadi $Sa \subset S$

ii. Akan dibuktikan bahwa $S \subset Sa$

Karena $a \in S$ maka $a^{-1} \in S$, sehingga

$$S = \{(sa^{-1})a \mid s \in S\} \subset Sa$$

Dari (i) dan (ii) sehingga diperoleh $Sa = S$

Teorema 10.2

Jika G adalah grup dan S adalah subgrup dari grup G maka $Sa = Sb$ jika dan hanya jika $a^{-1}b \in S$.

Bukti:

G adalah grup dan S adalah subgrup dari grup G .

i. Akan dibuktikan bahwa $Sa = Sb \Rightarrow ab^{-1} \in S$

Misalkan $Sa = Sb$, maka

$$(Sa) b^{-1} = (Sb) b^{-1}$$

$$Sab^{-1} = Si$$

$$Sab^{-1} = S$$

Karena $i \in S$ maka $ab^{-1} = i(ab^{-1}) \in S$

Jadi $Sa = Sb \Rightarrow ab^{-1} \in S$

ii. Akan dibuktikan bahwa $S \subset Sa$

Misalkan $b^{-1} \in S$

Menurut teorema 10.1 bahwa $Sab^{-1} = S$ maka

$$(Sab^{-1})b = Sb$$

$$(Sa)(b^{-1}b) = Sb$$

$$Sai = Sb$$

$$Sa = Sb$$

Jadi $ab^{-1} \in S \Rightarrow Sa = Sb$

Dari (i) dan (ii) sehingga diperoleh bahwa $Sa = Sb \Leftrightarrow ab^{-1} \in S$

Teorema 10.3

Jika S adalah subgrup dari grup G maka $b \in Sa$ jika dan hanya jika $Sa = Sb$.

Bukti:

i. Akan dibuktikan $b \in Sa \Rightarrow Sa = Sb$

Misalkan $b \in Sa$ maka $b = s_j a$ untuk $s_j \in S$

$$b a^{-1} = (s_j a) a^{-1}$$

$$b a^{-1} = s_j (a a^{-1})$$

$$b a^{-1} = s_j i$$

$$b a^{-1} = s_j$$

Maka $ba^{-1} \in S$

Berdasarkan teorema 10.2, jika $ba^{-1} \in S$ maka $Sa = Sb$

ii. Akan dibuktikan $Sa = Sb \Rightarrow b \in Sa$

$b \in Sb$, sebab S memuat i sehingga $ib = b$

$b \in Sb$ dan $Sa = Sb$ maka $b \in Sa$

Jadi $Sa = Sb \Rightarrow b \in Sa$

Dari (i) dan (ii) diperoleh bahwa $b \in Sa \Leftrightarrow Sa = Sb$

Teorema 10.4

Jika S adalah subgrup dari grup G maka

- G adalah gabungan semua koset kanan Sa , dengan $a \in G$
- Untuk setiap $a, b \in G$, jika $Sa \cap Sb \neq \emptyset$ maka $Sa = Sb$

Bukti:

a. Akan dibuktikan bahwa $G = \bigcup_{a \in G} Sa$, dengan menggunakan kesamaan dua himpunan.

i. Ambil $x \in G$ dan Sx koset kanan dari S di G , $i \in S$ dan $ix \in Sx$

Karena $ix = x$, maka $x \in Sx$ dan $x \in \bigcup_{a \in G} Sa$

Jadi $G \subset \bigcup_{a \in G} Sa$

ii. Ambil $y \in \bigcup_{a \in G} Sa$, berarti ada $p \in G$ sehingga

$y \in Sp$, berarti ada $s_j \in S$ dan $Y = s_j p$

Jika $s_j \in S$ maka $s_j \in G$

Karena $s_j \in G$ dan $p \in G$ maka $s_j p \in G$ atau $y \in G$

Jadi $\bigcup_{a \in G} Sa \subset G$

Karena $G \subset \bigcup_{a \in G} Sa$ dan $\bigcup_{a \in G} Sa \subset G$ maka $G = \bigcup_{a \in G} Sa$

b. Akan dibuktikan $\forall a, b \in G$ jika $Sa \cap Sb \neq \emptyset$ maka $Sa = Sb$

Andaikan $Sa \cap Sb \neq \emptyset$ berarti ada $c \in Sa \cap Sb$ maka $c \in Sa$ dan $c \in Sb$

Menurut (Teorema 11.3)

$c \in Sa$ jika dan hanya jika $Sa = Sc$

$c \in Sb$ jika dan hanya jika $Sb = Sc$

$c \in Sa \cap Sb \Leftrightarrow Sa = Sb = Sc$

Jadi $Sa \cap Sb \neq \emptyset \Rightarrow Sa = Sb$

Demikian pula untuk koset kiri S dalam G

Teorema 10.4 dapat ditunjukkan dalam contoh 3, yaitu $G = \{i, a, b, c, d, e\}$ adalah himpunan permutasi dari 3 anggota, $(G, *)$ merupakan grup, dan $S = \{i, c\}$ adalah subgrup.

Perhatikan dalam contoh 3 koset kanan dari S dalam G .

1. $i \in S$ dan $c \in S \Rightarrow Si = S$ dan $Sc = S$
2. Hanya ada 3 buah koset kanan yang berlainan, yaitu $\{i, c\}$, $\{a, d\}$, dan $\{b, e\}$
3. $Sa = Sd$ dan $Sb = Se$
4. Jika $Sa \neq Sb$ maka $Sa \cap Sb = \emptyset$. $Sa = \{a, d\}$ dan $Sb = \{b, e\}$
5. $\bigcup_{a \in G} Sa = Si \cup Sa \cup Sb \cup Sc \cup Sd \cup Se = \{i, a, b, c, d, e\} = G$

$$\text{Jadi } G = \bigcup_{a \in G} Sa$$

Teorema 10.5

Misalkan $(G, *)$ adalah grup dan S merupakan subgrup dari G . Jika i adalah elemen identitas dari G , $a \in G$ dan $a \neq i$ maka Sa bukan grup dari G .

Bukti:

Buktinya anda buat sendiri sebagai latihan. Teorema 10.5 dapat ditunjukkan dengan contoh.

Teorema 10.6

Misalkan $(G, *)$ adalah grup dan S merupakan subgrup dari G maka $\forall a \in G$ berlaku $S \sim Sa$.

Bukti:

Misalkan $a \in G$ dan $a \neq S$ maka $Sa \neq S$

Perhatikan pemetaan $f: S \rightarrow Sa$ dengan $f(s) = sa, \forall s \in S$

Anggota dari Sa diperoleh dari perkalian setiap $s \in S$ dengan $a \in G$. Berarti setiap anggota dari Sa merupakan bayangan anggota dari S .

Akan dibuktikan pemetaan itu satu lawan satu.

Misalkan $s_1, s_2 \in S$ dan $f(s_1) = f(s_2)$

Karena $f(s_1) = s_1 a$ dan $f(s_2) = s_2 a$, maka $s_1 a = s_2 a$

Dengan pelenyapan yang berlaku dalam grup, diperoleh $s_1 = s_2$.

Jadi f adalah pemetaan satu lawan satu.

$\forall s_1, s_2 \in S$, jika $f(s_1) = f(s_2)$ maka $s_1 = s_2$

Demikian pula sebaliknya

Pemetaan $g: Sa \rightarrow S$ dengan $g(sa) = s, \forall s \in S$ juga pemetaan satu lawan satu.

Jadi $S \sim Sa$.

Teorema 10.7

Jika $(G, *)$ adalah grup dan S merupakan subgrup dari G maka $\forall a, b \in G$ berlaku $Sa \sim Sb$.

Pembuktian harap Anda kerjakan sebagai latihan.

10.3 Teorema Lagrange

Teorema 10.8 (Teorema Lagrange)

Jika G suatu grup berhingga dan S adalah subgrup dari G , maka order dari S membagi habis order dari G , dan ditulis " $n(S) \mid n(G)$ ".

Bukti:

Misalkan G adalah suatu grup berhingga dengan order m dan S merupakan subgrup dari G dengan order k . Jadi G mempunyai tepat m buah anggota yang berlainan dan S mempunyai tepat k buah anggota yang berlainan.

Buatlah koset kanan S dalam G

Menurut teorema

- $G = \cup Sa$
- $\forall a, b \in G$ berlaku $Sa \cap Sb = \emptyset$ atau $Sa = Sb$

Karena S berhingga dan $\forall a, b \in S$ berlaku $Sa \sim Sb$, maka banyaknya anggota $Sa =$ banyaknya anggota Sb . Demikian pula $S \sim Sa$.

Apabila banyaknya koset kanan yang terbentuk l buah maka $m = l \times k$.

Berarti k factor dari m atau m habis dibagi oleh k , dan ditulis $k \mid m$.

Jadi $n(S) \mid n(G)$.

Definisi 10.2

Jika G suatu grup dan S adalah subgrup dari G maka yang disebut indeks dari S dalam G adalah banyaknya koset kanan yang berbeda dari S dalam G , dan ditulis $i_G(S)$. Jika G suatu

grup berhingga maka $i_G(S) = \frac{n(G)}{n(S)}$.

Contoh:

$T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dengan operasi perkalian modulo 7 membentuk suatu grup. $S = \{1, 2, 4\}$ dan $D = \{1, 6\}$ terhadap operasi “perkalian” merupakan subgrup dari T .

Koset-koset kanan dari S dalam T adalah $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ dengan

$$S_1 = \{1 \times 1, 2 \times 1, 4 \times 1\} = \{1, 2, 4\}$$

$$S_2 = \{1 \times 2, 2 \times 2, 4 \times 2\} = \{2, 4, 1\}$$

$$S_4 = \{1 \times 4, 2 \times 4, 4 \times 4\} = \{4, 1, 2\}$$

$$\text{Maka } S_1 = S_2 = S_4 = S$$

$$S_3 = \{1 \times 3, 2 \times 3, 4 \times 3\} = \{3, 6, 5\}$$

$$S_5 = \{1 \times 5, 2 \times 5, 4 \times 5\} = \{5, 3, 6\}$$

$$S_6 = \{1 \times 6, 2 \times 6, 4 \times 6\} = \{6, 5, 3\}$$

$$\text{Maka } S_3 = S_5 = S_6$$

Jadi banyaknya koset kanan S dalam G ada 2 atau $i_G(S) = 2$.

Nampak bahwa $n(S) = 3$ dan $n(T) = 6$, sehingga $i_T = \frac{n(T)}{n(S)} = \frac{6}{3} = 2$

Coba periksalah bahwa koset-koset kanan dari D dalam T adalah $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$ dengan $D_1 = D_6 = D$, $D_2 = D_5 = \{2, 5\}$, dan $D_3 = D_4 = \{3, 4\}$, sehingga $i_T(D) = 3$.

Tentukan periode setiap elemen dari T (ingat definisi periode elemen suatu grup). Periksalah jawaban anda dengan jawaban berikut ini.

$$\begin{array}{lll} p(1)=1 & p(2)=3 & p(3)=6 \\ p(4)=3 & p(5)=6 & p(6)=2 \end{array}$$

Catatan:

$$p(4) = 3, \text{ sebab } 4^3 = 64 = 1 \text{ (modulo 7)}$$

Teorema 10.9

Jika G suatu grup berhingga dengan $a \in G$ maka $p(a) \mid n(G)$, yaitu periode a membagi habis order dari G .

Bukti:

Misalkan G adalah suatu grup berhingga dengan order atau tingkat m , maka $n(G) = m$.

Ambil $a \in G$

Jika $a = i$ maka $p(i) = 1$ dan 1 membagi habis m .

Jadi $p(a) \mid n(G)$

Jika $a \neq i$, buatlah grup siklik generator a .

Misalkan $P(a) = k$, maka $a^k = i$ dan misalkan himpunan perpangkatan a adalah $S = \{a, a^2, a^3, \dots, a^{k-1}, a^k = i\}$.

S adalah grup siklik dengan generator a dan merupakan subgrup dari G . Order S yaitu $n(S) = k$, sebab semua anggota dari S berlainan.

Menurut teorema Lagrange $n(S) \mid n(G)$ atau $k \mid m$, dengan $k = p(a)$.
Jadi $p(a) \mid n(G)$.

Teorema 10.10

Jika G suatu grup berhingga yang berorder bilangan prima maka G merupakan grup siklik.

Bukti:

Misalkan $n(G) = m$, dengan m suatu bilangan prima maka pembagi dari m hanyalah 1 dan m saja.

Sehingga G tidak mempunyai grup sejati.

Ambil $a \in G$ dan $a \neq i$ maka himpunan perpangkatan a , yaitu $S = \{a, a^2, a^3, \dots, a^m = i\}$ merupakan subgrup dari G .

Karena G tidak mempunyai subgrup dan $a \neq i$, maka $S = G$.

Jadi S suatu grup siklik maka G merupakan grup siklik pula.

Definisi 10.3

Jika G suatu grup dan S merupakan subgrup dari G , maka a kongruen dengan b modulo S , ditulis $a \equiv b \pmod{S}$ bila dan hanya bila $ab^{-1} \in S$.

Contoh:

Misalkan G adalah suatu grup bilangan bulat dengan operasi “penjumlahan” dan S adalah himpunan bilangan kelipatan 3, maka S adalah subgrup dari G .

- $17 \equiv 8 \pmod{S}$, sebab $17 + (-8) = 9 \in S$
- $20 \not\equiv 15 \pmod{S}$, sebab $20 + (-5) = 5 \notin S$

Relasi kongruensi modul 5 ini membagi G dalam 3 kelas yaitu:

- $0^- = [0] = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\} = [3] = [6] = [-3] = \dots$
- $1^- = [1] = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\} = [4] = [7] = [-2] = \dots$
- $2^- = [2] = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\} = [5] = [8] = [-1] = \dots$

0^- atau $[0]$ dibaca kelas 0.

Nama suatu kelas biasanya dipilih elemen positif atau nol yang terkecil dalam kelas tersebut. Misalnya kelas $\{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$ diberi nama kelas 2 ditulis $[2]$ atau 2^- .

Sekarang kita menghubungkan kelas ekuivalensi dengan koset kanan dalam G .

$$S_0 = \{\dots, -6 + 0, -3 + 0, 0 + 0, 3 + 0, 6 + 0, \dots\}$$

$$S_1 = \{\dots, -6 + 1, -3 + 1, 0 + 1, 3 + 1, 6 + 1, \dots\}$$

$$S_2 = \{\dots, -6 + 2, -3 + 2, 0 + 2, 3 + 2, 6 + 2, \dots\}$$

$$S_3 = \{\dots, -6 + 3, -3 + 3, 0 + 3, 3 + 3, 6 + 3, \dots\} = S_0$$

$$S_4 = S_1$$

$$S_5 = S_2, \text{ dan seterusnya}$$

Nampak bahwa

- $S_0 = S = 0^-$
- $S_1 = 1^-$
- $S_2 = 2^-$

Contoh ini mengarahkan kita pada teorema berikut ini.

Teorema 10.11

Jika G suatu grup dan H adalah subgroup dari G , maka untuk setiap $a \in G$, berlaku hubungan $Ha = \{y \in G \mid a \equiv y \pmod{H} = \bar{a}\}$

Teorema 10.12

Jika G suatu grup dan S merupakan subgroup dari G maka $\forall a, b \in G$ relasi $a \equiv b \pmod{S}$ adalah relasi ekuivalensi.

Pembuktian harap Anda kerjakan sebagai latihan.

10.4 Rangkuman

1. Definisi koset

Jika H suatu subgroup dari grup $(G, *)$ dan $a \in G$ maka $Ha = \{h * a \mid h \in H\}$ disebut koset kanan dari H dalam G , sedangkan $aH = \{a * h \mid h \in H\}$ disebut koset kiri dari H dalam G .

Subgrup dapat dinyatakan dengan H atau S atau huruf lain sesuai kebutuhan. Dalam pembahasan koset, subgroup dapat dinyatakan dengan S .

Pada $(G, +)$, $Sa = \{s + a \mid s \in S\}$ dan $aS = \{a + s \mid s \in S\}$

Pada $(G, \times)$, $Sa = \{s \times a \mid s \in S\}$ dan $aS = \{a \times s \mid s \in S\}$

2. Sifat-sifat koset

Jika $(G, *)$ suatu grup, S subgroup dari G dan $a, b \in G$ maka

- a. $a \in S$ jika dan hanya jika $Sa = s$
- b. $Sa = Sb$ jika dan hanya jika $ab^{-1} \in S$
- c. $b \in Sa$ jika dan hanya jika $Sa = Sb$

- d. G adalah himpunan koset kanan Sa dengan $a \in G$
 Jadi $G = \bigcup_{a \in G} Sa$ dan Jadi $G = \bigcup_{a \in G} aS$
- e. $Sa = Sb$ atau $Sa \cap Sb = \emptyset$
- f. Jika $a \neq i$ dan i merupakan elemen identitas dari G ,
 maka Sa bukan subgrup dari G
- g. $a, b \in G$ berlaku hubungan $S \sim Sa$ dan $Sa \sim Sb$
3. Teorema Lagrange
 Jika G suatu grup berhingga dan S adalah subgrup dari G , maka $n(S) \mid n(G)$, yaitu order dari S membagi habis order dari G .
4. Jika S suatu subgrup dari G , maka indeks dari S dalam G ditulis $i_G(S)$ adalah banyaknya koset kanan S yang
 berlainan dalam G ; $i_G(S) = \frac{n(G)}{n(S)}$
5. Jika G suatu grup berhingga dan $a \in G$ maka $p(a) \mid n(G)$,
 yaitu periode a membagi habis order dari G .
6. Jika G suatu grup berhingga dan $a \in G$ maka $a^{n(G)} = i$
7. Jika G suatu grup berhingga yang berorder bilangan prima, maka G suatu grup siklik.
8. Misalkan S adalah subgrup dari G . Untuk $a, b \in G$, $a \equiv b \pmod{S}$ jika dan hanya jika $ab^{-1} \in S$.
9. Jika H adalah subgrup dari G , maka untuk setiap $a \in G$
 berlaku $Ha = \{y \in G \mid a \equiv y \pmod{H}\} = a^{-1}$
10. Jika S adalah subgrup dari G maka relasi kongruensi modulo S merupakan relasi ekuivalensi.

10.5 Latihan Soal

1. Diketahui G suatu grup dan S merupakan subgrup dari G , dan $a, b \in G$. Buktikan $a \in Sb$ jika dan hanya jika $Sa = Sb$.
2. Tunjukkan bahwa relasi kongruensi $a \equiv b \pmod{H}$ merupakan suatu relasi ekuivalensi jika H adalah subgrup dari G dan $a, b \in G$.
3. Diketahui bahwa H adalah subgrup dari $(G, *)$ dan $a \in G$, berlaku hubungan $aHa^{-1} = \{a * h * a^{-1} \mid h \in H\}$. Tunjukkan bahwa aHa^{-1} adalah subgrup dari G .
4. Tuliskanlah semua koset kanan dari H dalam G , jika G suatu grup siklik dengan generator a dan $n(G) = 10$, sedangkan H adalah subgrup dengan generator a^2 .
5. Misalkan $(G, *)$ adalah grup, S adalah subgrup dari G , dan $a \in G$. Jika $a \neq i$ maka Sa bukan subgrup dari G . Buktikan.



11. Subgrup Normal

11.1 Pengertian Subgrup Normal

Definisi 11.1

Jika N subgrup dari G , maka N disebut subgrup normal dari G jika dan hanya jika $gN = Ng$, untuk setiap $g \in G$.

Contoh:

$G = \{i, a, b, c, d, e\}$ dan $(G, *)$ grup dengan “*”. Perhatikan permutasi

$$i = (1)(2)(3) \quad a = (1 \ 2 \ 3) \quad b = (1 \ 3 \ 2)$$

$$c = (2 \ 3) \quad d = (1 \ 3) \quad e = (1 \ 2)$$

Ambil $N = \{i, a, b\}$ subgrup dari G .

Koset kanan dari N dalam G adalah

$$Ni = \{i, a, b\} \quad Nc = \{ic, ac, bc\} = \{c, e, d\}$$

$$Na = \{ia, aa, ab\} = \{a, b, i\} \quad Nd = \{id, ad, bd\} = \{d, c, e\}$$

$$Nb = \{ib, ab, bb\} = \{b, i, a\} \quad Ne = \{ie, ae, be\} = \{e, d, c\}$$

Koset kiri dari N dalam G adalah

$$iN = \{i, a, b\} \qquad cN = \{ci, ca, cb\} = \{c, d, e\}$$

$$aN = \{ai, aa, ba\} = \{a, b, i\} \qquad dN = \{di, da, db\} = \{d, e, c\}$$

$$bN = \{bi, ba, bb\} = \{b, i, a\} \qquad eN = \{ei, ea, eb\} = \{e, c, d\}$$

$\forall x \in G$ memenuhi $xN = Nx$. Jadi $N = \{i, a, b\}$ subgrup normal.

Definisi di atas hanya dapat digunakan pada subgrup yang berhingga.

Definisi 11.2

Jika N subgrup dari G , maka N disebut subgroup normal dari G jika dan hanya jika untuk setiap $g \in G$ dan $n \in N$ berlaku hubungan $g n g^{-1} \in N$.

Contoh:

$G = \{i, a, b, c, d, e\}$ dan $(G, *)$ grup dengan $""$. Perhatikan permutasi dari tiga elemen, misalnya 1, 2, dan 3 yaitu

$$G = \{(1) = i, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

Subgrup dari G , yaitu $N = \{(1), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 3)\}$. Ambil sebarang sebarang elemen $g \in G$ dan sebarang elemen $n \in N$. Misalkan $g = (1\ 2)$ dan $n = (1\ 3\ 2)$. Karena G suatu grup dan $g \in G$ maka ada $g^{-1} \in G$. Jika $g = (1\ 2)$ maka $g^{-1} = (2\ 1)$.

$$\text{Periksalah bahwa } g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = (1)$$

Perhatikanlah sekarang komposisi berikut ini.

- $(1\ 2) \cdot (1\ 2\ 3) \cdot (2\ 1) = (2\ 3) \cdot (1\ 3) = (1\ 3\ 2) \in N$
- $(2\ 3) \cdot (1\ 3\ 2) \cdot (3\ 2) = (1\ 3) \cdot (2\ 3) = (1\ 2\ 3) \in N$
- $(1\ 3\ 2) \cdot (1\ 3\ 2) \cdot (2\ 3\ 1) = (1\ 3\ 2) \in N$

Coba periksalah bahwa $g \cdot n \cdot g^{-1} \in N$ untuk setiap $g \in G$ dan untuk setiap $n \in N$. Jadi N adalah subgrup normal dari G .

11.2 Sifat-Sifat Subgrup Normal

Teorema 11.1

N adalah subgrup normal dari G jika dan hanya jika $g N g^{-1} = N$, untuk setiap $g \in G$.

Bukti:

i. Akan dibuktikan N subgrup normal $\Rightarrow \forall g \in G, g N g^{-1} = N$.

Karena G grup dan $g \in G$ maka ada $g^{-1} \in G$.

N subgrup normal dari G , berarti $\forall g \in G$ berlaku hubungan $gN = Ng$.

Kalikan ruas kanan dan ruas kiri dengan g^{-1} dari kanan.

$$gN = Ng$$

$$g N g^{-1} = N g g^{-1}$$

$$g N g^{-1} = N i$$

$$g N g^{-1} = N$$

ii. Akan dibuktikan bahwa $\forall g \in G, g N g^{-1} = N \Rightarrow N$ subgrup normal.

Kalikan ruas kanan dan kiri dengan g dari kanan.

$$g N g^{-1} = N$$

$$g N g^{-1} g = N g$$

$$g N i = N g$$

$$g N = N g$$

Jadi N adalah subgrup normal

Dari (i) dan (ii) diperoleh bahwa N subgrup normal jika dan hanya jika $gNg^{-1} = N$, untuk setiap $g \in G$.

Teorema 11.2

Setiap subgrup S dari grup G yang komutatif adalah subgrup normal.

Bukti:

Ambil $a \in G$ dan S subgrup dari G .

$$aS = \{as \mid a \in G \text{ dan } s \in S\}$$

$$Sa = \{sa \mid a \in G \text{ dan } s \in S\}$$

$a \in G$ dan $s \in S \subset G$, maka $s \in G$. Jadi $as \in G$.

Karena G adalah grup komutatif maka $as = sa$.

Berarti $\forall a \in G, aS = Sa$.

Jadi S adalah subgrup normal.

Misalkan N suatu subgrup normal dari G , $a, b \in G$ sedangkan Na dan Nb adalah koset-koset kanan dari N dalam G . Perhatikan perkalian dua koset kanan dari N berikut ini.

$$\begin{aligned} (Na)(Nb) &= N(aN)b \\ &= N(Na)b \quad (\text{Karena } N \text{ subgrup normal maka } Na=aN) \\ &= NN(a * b) \\ &= N(a * b) \end{aligned}$$

Ini menyatakan bahwa jika N subgrup normal dari G , maka hasil kali dua koset kanan dari N adalah koset kanan dari N pula. Secara formal, hal ini dapat dinyatakan dengan teorema berikut ini.

Teorema 11.3

Jika N Suatu subgrup dari G maka N adalah subgrup normal dari G jika dan hanya jika hasil kali dua koset kanan dari N dalam G adalah koset kanan dari N dalam G pula.

Bukti:

- i. Akan dibuktikan N subgrup normal dari $G \Rightarrow Na Nb = N(a * b)$, untuk setiap $a, b \in G$.

N subgrup normal dari G maka $Na = aN$, untuk setiap $a \in G$.

Untuk setiap $a, b \in G$.

$$\begin{aligned} (Na) (Nb) &= N (aN) b \\ &= N(Na) b \text{ (Karena } N \text{ subgrup normal maka } Na = aN) \\ &= NN (a * b) \\ &= N (a * b) \end{aligned}$$

$a, b \in G$ dan $(G, *)$ suatu grup maka $(a * b) \in G$.

Ini berarti $N (a * b)$ adalah koset kanan dari N dalam G .

Jadi hasil kali dua koset kanan dari N adalah koset kanan dari N dalam G pula.

- ii. Akan dibuktikan bahwa untuk $a, b, c \in G$ maka $(Na) (Nb) = Nc \Rightarrow N$ subgrup normal dari G .

Ambil $i \in N$, karena $(Na) (Nb) = Nc$ maka

$$\begin{aligned} (i * a)(i * b) &= i * c \\ a * b &= c \end{aligned}$$

Sehingga dari ketentuan $(Na)(Nb) = Nc$ diperoleh $(Na)(Nb) = N(a * b)$, untuk setiap $a, b \in G$.

Ambil $b = a^{-1}$, maka

$NaNa^{-1} = N(a * a^{-1})$, (Karena N subgrup normal maka $Na = aN$)

$aNa^{-1} = Ni$, (Karena $N = NN$)

$aNa^{-1} = N$

Ini berarti bahwa N adalah subgrup normal dari G .

Dari (i) dan (ii) diperoleh bahwa N adalah subgrup normal dari G jika dan hanya jika hasil kali dua koset kanan dari N dalam G adalah koset kanan dari N dalam G pula.

11.3 Grup Faktor

Teorema 11.4

Jika $(G, *)$ suatu grup dan N adalah subgrup normal dari G , maka G/N terhadap operasi perkalian himpunan merupakan suatu grup.

Pembuktian teorema ini harap anda kerjakan sebagai latihan.

Jika G adalah suatu grup berhingga, berapakah order G/N ?

Ingat bahwa G/N adalah himpunan semua koset kanan N dalam G , sedangkan banyaknya koset kanan N dalam G adalah indeks dari N dalam G , yaitu:

$$i_G(N) = \frac{n(G)}{n(N)}$$

maka

$$n(G/N) = i_G = \frac{n(G)}{n(N)}$$

Hal ini dinyatakan sebagai teorema berikut ini.

Teorema 11.5

Jika G suatu grup berhingga dan N adalah subgrup normal dari G , maka

$$n(G/N) = \frac{n(G)}{n(N)}$$

Contoh:

Misalkan $G = \{a, a^2, a^3, a^4, \dots, a^{11}, a^{12} = i\}$ adalah grup siklik dan $N = \{i, a^3, a^6, a^9\}$ adalah suatu subgrup normal dari G , $n(G) = 12$ dan $n(N) = 4$.

Periksalah bahwa

$$n(G/N) = n(G)/n(N) = 12/4 = 3$$

Dengan menunjukan semua koset kanan N dari G atau semua elemen dari G/N .

Elemen-elemen G/N adalah

- $Ni = Na^2 = Na^6 = Na^9 = N$
- $Na = Na^4 = Na^7 = Na^{10} = \{a, a^4, a^7, a^{10}\}$
- $Na^2 = Na^5 = Na^8 = Na^{11} = \{a^2, a^5, a^8, a^{11}\}$

Jadi $n(G/N) = 3$ atau $n(G/N) = \{N, Na, Na^2\}$

11.4 Rangkuman

1. Jika N subgroup dari G , maka N disebut subgroup normal dari G jika dan hanya jika $gN = Ng$, untuk setiap $g \in G$.
2. Jika N subgroup dari G , maka N disebut subgroup normal dari G jika dan hanya jika untuk setiap $g \in G$ dan $n \in N$ berlaku hubungan $g n g^{-1} \in N$. Syarat $g n g^{-1} \in N$ untuk setiap $n \in N$ dapat diganti dengan $g n g^{-1} \subset N$.
3. N adalah subgroup normal dari G jika dan hanya jika $gNg^{-1} = N$.
4. Setiap subgroup S dari grup G yang komutatif adalah subgroup normal.
5. Jika N suatu subgroup dari G , maka N adalah subgroup normal dari G jika dan hanya jika hasil kali dua koset kanan dari N dalam G adalah koset kanan dari N dalam G pula.
6. Jika $(G, *)$ suatu grup dan N adalah subgroup normal dari G , maka G/N terhadap operasi perkalian himpunan merupakan suatu grup, dan G/N disebut grup factor G oleh N .
7. Jika G suatu grup berhingga dan N adalah subgroup normal dari G , maka

$$n(G / N) = \frac{n(G)}{n(N)}$$

11.5 Latihan Soal

1. Jika $(G, *)$ suatu grup dan N adalah subgrup normal dari G , maka buktikanlah bahwa himpunan semua koset kanan N dalam G , yaitu G/N terhadap operasi perkalian himpunan merupakan suatu grup.
2. Jika $(G, *)$ suatu grup, N subgrup dari G , dan $i_G(N)=2$, maka buktikanlah bahwa N suatu subgrup normal dari G .
3. Jika $(G, *)$ suatu grup, sedangkan N dan H masing-masing adalah subgrup normal dari G , maka buktikanlah bahwa $N \cap H$ suatu subgrup normal dari G .

4. $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \text{ dan } d \text{ bilangan real dengan } a, d \neq 0 \right\}$ terhadap operasi perkalian matriks merupakan

suatu grup. Jika $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \text{ bilangan real} \right\}$.
Buktikanlah:

- a. N subgrup normal dari G
 - b. G/N adalah grup abelian
5. Diketahui $G = \{i, a, b, c, d, e, f, g\}$ dengan operasi perkalian permutasi dan

$$i = (1)(2)(3)(4) \quad d = (1 \ 4) (2 \ 3)$$

$$a = (1 \ 2 \ 3 \ 4) \quad e = (1 \ 2) (3 \ 4)$$

$$b = (1 \ 3) (2 \ 4) \quad f = (1 \ 3)$$

$$c = (1 \ 4 \ 3 \ 2) \quad g = (2 \ 4)$$

Tentukan:

- a. Subgrup normal N dalam G
- b. Grup factor G/N



12. Homomorfisme Grup

12.1 Pengertian Homomorfisme

Definisi 12.1

Misalkan (G, o) dan $(G', *)$ masing-masing adalah grup. Pemetaan $f: G \rightarrow G'$ disebut **homomorfisme** dari G ke G' jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $f(a o b) = f(a) * f(b)$.

Homomorfisme disebut pula pemetaan yang mempertahankan atau mengawetkan operasi, dan dapat disajikan dengan skema berikut ini.

(G, o)	$(G', *)$ atau (G, o)	$(G', *)$
$a \longrightarrow a'$	$a \longrightarrow f(a)$	
$b \longrightarrow b'$	$b \longrightarrow f(b)$	
$a o b \longrightarrow a' * b'$	$a o b \longrightarrow f(a o b) = f(a) * f(b)$	

Definisi 12.2

- Suatu homomorfisme dari grup $G \rightarrow G'$ yang injektif disebut **monomorfisme**.
- Suatu homomorfisme dari grup $G \rightarrow G'$ yang surjektif disebut **epimorfisme**.
- Suatu homomorfisme dari grup $G \rightarrow G'$ yang bijektif disebut **isomorfisme**.

Definisi 13.2

- Suatu homomorfisme dari suatu grup ke dalam grup itu sendiri disebut **endomorfisme**.
- Suatu endomorfisme yang bijektif disebut **automorfisme**.

Apabila antara grup (G, o) dan grup $(G', *)$ terdapat homomorfisme, maka dikatakan bahwa (G, o) dan $(G', *)$ homomorfik.

Contoh:

- Misalkan $G = \{0, 1, 2, 3\}$ dengan operasi penjumlahan modulo 4. $G' = \{1, i, -1, -i\}$ himpunan akar dari persamaan $Z^4 = 1$, dengan Z bilangan kompleks. $(G, +_4)$ merupakan grup dengan elemen identitas 0, sedangkan $(G', \times)$ merupakan grup dengan elemen identitas 1.

Tabel $(G, +_4)$

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Tabel $(G', \times)$

	1	i	-1	-i
1	1	i	-1	-i
i	i	-1	-i	1
-1	-1	-i	1	i
-i	-i	1	i	-1

Grup $(G, +_4)$ dan $(G', \times)$ memiliki struktur yang sama dan mempunyai tabel Cayley yang tepat sama atau identic.

Pemetaan $f: G \rightarrow G'$ merupakan korespondensi satu-satu, jadi homomorfisme ini adalah isomorfisme. Kedua grup $(G, +_4)$ dan $(G', \times)$ dikatakan isomorfik dengan isomorfisme sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccc}
 (G, +_4) & & (G', \times) \\
 0 & \longleftrightarrow & f(0) = 1 \\
 1 & \longleftrightarrow & f(1) = i \\
 2 & \longleftrightarrow & f(2) = -1 \\
 3 & \longleftrightarrow & f(3) = -i
 \end{array}$$

$$f(0 + 2) = f(0) \times f(2) = 1 \times -1 = -1$$

$$f(1 + 2) = f(1) \times f(2) = i \times -1 = -i$$

$$f(1 + 3) = f(1) \times f(3) = i \times -i = 1$$

$$f(2 + 3) = f(2) \times f(3) = -1 \times -i = i$$

$$\forall a, b \in G \quad f(a + b) = f(a) \times f(b)$$

$$2. \quad B = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

a. Perhatikan pemetaan $f: B \rightarrow B$ dengan $f(x) = 2x$

$$\forall x \in B, f(x) = 2x$$

$$\forall x \in B, f(y) = 2y$$

$$\forall x, y \in B, f(x+y) = 2(x+y)$$

$$= 2x + 2y$$

$$= f(x) + f(y)$$

$f(x)$ suatu homomorfisme, karena pemetaan dari B ke B maka f merupakan endomorfisme.

b. Perhatikan pemetaan $f: B \rightarrow B$ dengan $f(x) = -x$

$$\forall x \in B, f(x) = -x$$

$$\forall x \in B, f(y) = -y$$

$$\forall x, y \in B, f(x+y) = -(x+y)$$

$$= (-x) + (-y)$$

$$= f(x) + f(y)$$

$f(x)$ suatu homomorfisme, karena pemetaan dari B ke B merupakan pemetaan bijektif maka f merupakan automorfisme.

12.2 Sifat-Sifat Homomorfisme

Teorema 12.1

Misalkan (G, o) dan $(G', *)$ adalah grup, sedangkan pemetaan $f: G \rightarrow G'$ merupakan homomorfisme, maka:

- $f(i) = i'$, i elemen identitas dalam G dan i' adalah elemen identitas dalam G'
- $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$, untuk setiap $x \in G$
 $f(x)^{-1}$ adalah $(f(x))^{-1}$ yaitu invers dari $f(x)$ dalam G'

Bukti:

- Akan dibuktikan $f(x) = i'$ dengan i elemen identitas G dan i' elemen identitas G' .

i' adalah elemen identitas dalam G' maka

$$f(x) * i' = f(x) \dots \dots \dots (i)$$

Untuk $x \in G$ dan $i \in G$ maka $x o i = x$, sehingga

$$f(x o i) = f(x) \dots \dots \dots (ii)$$

Dari (i) dan (ii), maka

$$f(x) * i' = f(x o i)$$

$$f(x) * i' = f(x) * f(i), \text{ karena } f \text{ merupakan homomorfisme}$$

$$i' = f(i)$$

Jadi peta (bayangan) elemen identitas dalam G adalah elemen identitas dalam G' .

- Akan dibuktikan bahwa $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

$$i' = f(i), \text{ dan } i = x o x^{-1}, \text{ untuk } x \in G \text{ sehingga}$$

$$i' = f(x o x^{-1})$$

$$i' = f(x) * f(x^{-1}), \text{ karena } f \text{ suatu homomorfisme}$$

$$f(x)^{-1} * i' = f(x)^{-1} * f(x) * f(x^{-1})$$

$$f(x)^{-1} = i' * f(x^{-1})$$

$$f(x)^{-1} = f(x^{-1}), \text{ untuk setiap } x \in G.$$

Jadi bayangan invers x dalam G adalah invers bayangan x dalam G' .

Catatan:

Apabila $f: G \rightarrow G'$ merupakan homomorfisme dan G merupakan suatu grup, maka G' adalah grup. Tetapi, apabila G' suatu grup maka G belum tentu merupakan grup.

Teorema 12.2

Jika $f: G \rightarrow G'$ merupakan homomorfisme dan G merupakan grup komutatif maka G' merupakan grup komutatif.

Bukti:

Ambil $a, b \in G$ dan $a', b' \in G'$ dengan $f(a) = a'$ dan $f(b) = b'$ serta (G, o) dan $(G', *)$.

$$f(a \circ b) = f(a) * f(b) = a' * b'$$

G grup komutatif, $\forall a, b \in G$ sehingga $a \circ b = b \circ a$.

$$f(a \circ b) = f(b \circ a) = f(b) * f(a) = b' * a'$$

Jadi $\forall a', b' \in G'$ memenuhi $a' * b' = b' * a'$, yang berarti G' merupakan grup komutatif.

Teorema 12.3

Misalkan (G, o) dan $(G', *)$ adalah grup. Jika pemetaan $f: G \rightarrow G'$ merupakan homomorfisme yang surjektif maka $N = \{x \in G \mid x = f^{-1}(i'), i' \in G'\}$ adalah subgrup normal dari G .

Bukti:

- i. Akan dibuktikan bahwa N subgrup yaitu jika $ab \in N$ maka $ab^{-1} \in N$

Ambil $a, b \in N$ maka $f(a) = i'$ dan $f(b) = i'$

$f(ab) = f(a) * f(b)$, sehingga

$$\begin{aligned} f(ab^{-1}) &= f(a) * f(b^{-1}) \\ &= f(a) * (f(b))^{-1} \\ &= i' * (i')^{-1} \\ &= i' * i' \\ &= i' \end{aligned}$$

Jadi $ab^{-1} \in N$, sehingga N merupakan subgrup.

- ii. Akan dibuktikan bahwa N merupakan subgrup normal, yaitu jika $g \in G$ dan $n \in N$ maka $g n g^{-1} \in N$.

$$\begin{aligned} f(g n g^{-1}) &= f(g) * f(n) * f(g^{-1}) \\ &= f(g) * i' * (f(g))^{-1} \\ &= i' \end{aligned}$$

Jadi $g n g^{-1} \in N$ sehingga N merupakan subgrup normal

12.3 Rangkuman

1. Definisi homomorfisme

Misalkan (G, o) dan $(G', *)$ adalah grup. Pemetaan $f: G \rightarrow G'$ disebut homomorfisme dari G ke G' , jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $f(a o b) = f(a) * f(b)$.

- Suatu homomorfisme dari $G \rightarrow G'$ yang injektif disebut **monomorfisme**.
- Suatu homomorfisme dari $G \rightarrow G'$ yang surjektif disebut **epimorfisme**.
- Suatu homomorfisme dari $G \rightarrow G'$ yang bijektif disebut **isomorfisme**.
- Suatu homomorfisme dari $G \rightarrow G$ yaitu homomorfisme dalam grup itu sendiri disebut **endomorfisme**.
- Suatu endomorfisme yang bijektif disebut **automorfisme**.

2. Jika pemetaan $f: G \rightarrow G'$ merupakan homomorfisme maka

- $f(i) = i'$, i elemen identitas dalam G dan i' adalah elemen identitas dalam G' .
- $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$, untuk setiap $x \in G$ dan $(f(x))^{-1}$ yaitu invers dari $f(x)$ dalam G' .

3. Jika $f: G \rightarrow G'$ merupakan homomorfisme dan G merupakan grup komutatif maka G' merupakan grup komutatif.

4. Misalkan (G, o) dan $(G', *)$ adalah grup. Jika pemetaan $f: G \rightarrow G'$ merupakan homomorfisme yang surjektif maka $N = \{x \in G \mid x = f^{-1}(i'), i' \in G'\}$ adalah subgroup normal dari G .

12.4 Latihan Soal

1. Misalkan G suatu grup dan N subgrup normal dari G . Pemetaan $f: G \rightarrow G/N$ didefinisikan $f(x) = Nx$, untuk setiap $x \in G$. Tunjukkan bahwa f suatu homomorfisme dari G onto G/N .
2. Misalkan (G, o) dan $(G', *)$ adalah grup, sedangkan pemetaan $f: G \rightarrow G'$ merupakan homomorfisme. Buktikan bahwa himpunan semua peta (bayangan) anggota dari G dalam G' oleh homomorfisme f merupakan subgrup dari G' .
3. Misalkan G adalah himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan dan G' adalah himpunan bilangan bulat selain nol dengan operasi perkalian. Pemetaan $f: G \rightarrow G'$ didefinisikan oleh $f(x) = 2^x$, untuk setiap $x \in G$. Tunjukkan bahwa f adalah homomorfisme.
4. Misalkan (G, o) dan $(G', *)$ adalah grup. Pemetaan $f: G \rightarrow G'$ adalah suatu homomorfisme, sedangkan $H \subset G$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in H$ berlaku $f(x) = i'$, i' adalah elemen identitas dalam G' . Buktikan bahwa H adalah subgrup normal dari G .
5. $G = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots\}$ adalah himpunan vector dengan operasi penjumlahan vector. $G' =$ himpunan pasangan bilangan real dengan operasi penjumlahan. Tunjukkan $f: G \rightarrow G'$ merupakan homomorfisme.



13. Isomorfisme

13.1 Pengertian Isomorfisme

Definisi 13.1

Homomorfisme $f: G \rightarrow G'$ disebut isomorfisme, jika f sekaligus epimorfisme dan monomorfisme yaitu f suatu homomorfisme satu-satu dari G onto G' .

Definisi isomorfisme ini mengaitkan pemetaan yang lain, yaitu epimorfisme dan monomorfisme. Apabila ditulis lengkap sebagai berikut:

Misalkan $G = \{a, b, c, d, \dots\}$ dan (G, o) merupakan grup.

$G' = \{a', b', c', d', \dots\}$ dan $(G, *)$ merupakan grup.

Isomorfisme antara (G, o) dan $(G, *)$ adalah pemetaan satu lawan satu.

$f: G \rightarrow G'$, yang bersifat

$$\forall a \in G \longrightarrow f(a) = a'$$

$$\forall b \in G \longrightarrow f(b) = b'$$

$$\forall a, b \in G \longrightarrow f(a \circ b) = f(a) * f(b)$$

Dengan kata lain bahwa $f: G \rightarrow G'$ merupakan isomorfisme jika

$$a \longleftrightarrow a'$$

$$b \longleftrightarrow b'$$

$$\text{Maka } (a \circ b) \longleftrightarrow f(a \circ b) = f(a) * f(b)$$

Grup G dan G' dikatakan isomorph atau isomorfik, jika ada isomorfisme antara G dan G' . Selanjutnya notasi $G \approx G'$ “dibaca” G isomorfik dengan G' .

Teorema 13.1

Dalam suatu isomorfisme antara G dan G' berlaku:

- a. Jika i elemen identitas dari G , dan i' elemen identitas dari G' maka i berpasangan dengan i' dan “ditulis”

$$i \longleftrightarrow i'$$

- b. Jika $a \in G$ berpasangan dengan $a' \in G'$ maka invers dari a berpasangan dengan invers dari a' , ditulis

$$a \longleftrightarrow a'$$

$$a^{-1} \longleftrightarrow (a')^{-1}$$

Bukti:

- a. Akan di buktikan jika $i \in G$ dan $i' \in G$ maka $i \longleftrightarrow i'$

Misalkan i berpasangan dengan sebarang $x' \in G'$.

Ambil $a \in G$ dan $a' \in G'$ sehingga a berpasangan dengan a' dan $i o a = a$

Skemanya sebagai berikut:

$$i \longleftrightarrow x'$$

$$a \longleftrightarrow a'$$

$$i o a \longleftrightarrow x' * a', \text{ sebab pemetaan itu isomorfisme}$$

$$a \longleftrightarrow x' * a'$$

Jadi $a \longleftrightarrow a'$ dan $a \longleftrightarrow x' * a'$. Karena pemetaannya satu lawan satu, maka $x' * a' = a'$ atau $x' = i'$. Jadi dalam isomorfisme $i \longleftrightarrow i'$.

- b. Akan dibuktikan jika $a \longleftrightarrow a'$ maka $a^{-1} \longleftrightarrow (a')^{-1}$

Misalkan a^{-1} berpasangan dengan sebarang $y' \in G'$ sedangkan a berpasangan dengan a' .

Dinyatakan dengan skema berikut:

$$a \longleftrightarrow a'$$

$$a^{-1} \longleftrightarrow y'$$

$$a o a^{-1} \longleftrightarrow a' * y', \text{ sebab pemetaan itu isomorfisme}$$

$$i \longleftrightarrow a' * y', \text{ sebab } a o a^{-1} = i$$

Menurut teorema (a) di atas $i \longleftrightarrow i'$, karena pemetaannya satu lawan satu maka $a' * y' = i'$ yang berarti $y' = (a')^{-1}$.

Jadi dalam isomorfisme, jika $a \longleftrightarrow a'$ maka

$$a^{-1} \longleftrightarrow (a')^{-1}.$$

Contoh:

$G = \{0, 1, 2, 3\}$ dengan operasi penjumlahan modulo 4 dan $G' = \{1, 2, 3, 4\}$ dengan operasi perkalian modulo 5. $(G, +)$ dan $(G, \times)$ masing-masing merupakan grup. Tabel-tabel berikut ini adalah tabel operasi biner pada G dan G' .

Tabel $(G, +_4)$

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Tabel $(G, \times_5)$

$\times_5$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

G dan G' memiliki struktur yang sama meskipun tabel Cayley kedua grup itu kelihatan tidak identik, $(G, +_4)$ dan $(G, \times_5)$ tetap isomorfik. Coba sekarang membuat tabel Cayley $(G, \times_5)$ dengan urutan anggota sebagai berikut:

$\times_5$	1	2	4	3
1	1	2	4	4
2	2	4	3	1
4	4	3	1	2
3	3	1	2	4

Ternyata tabel $(G, +_4)$ dan tabel $(G, \times_5)$ dengan urutan 1, 2, 4, 3 adalah identik.

Untuk mengetahui apakah kedua grup $(G, +_4)$ dan $(G, \times_5)$ isomorfik atau tidak, jangan hanya melihat identik tidaknya tabel Cayley.

Dari $(G, +_4)$ dapat diketahui

0 = invers dari 0

1 = invers dari 3

2 = invers dari 2

3 = invers dari 1

0 dan 2 mempunyai invers dirinya sendiri.

2 dan 3 saling invers.

Dari $(G, \times_5)$ dapat diketahui

1 = invers dari 1

2 = invers dari 3

3 = invers dari 2

4 = invers dari 4

1 dan 4 mempunyai invers dirinya sendiri

2 dan 3 saling invers

Untuk menentukan isomorfisme, caranya sebagai berikut:

Dibentuk pemetaan $f: G \rightarrow G'$ dengan definisi sebagai berikut.

$$f(0) = 1 \quad \text{atau} \quad 0 \longleftrightarrow 1$$

$$f(1) = 2 \quad 1 \longleftrightarrow 2$$

$$f(2) = 4 \quad 2 \longleftrightarrow 4$$

$$f(3) = 3 \quad 3 \longleftrightarrow 3$$

Periksalah bahwa untuk setiap $x, y \in G$ berlaku hubungan $f(x + y) = f(x) \times f(y)$, misalkan:

$$\left. \begin{array}{l} f(3 + 2) = f(1) = 2 \\ f(3) \times f(2) = 3 \times 4 = 2 \end{array} \right\} \text{Jadi } f(3 + 2) = f(3) \times f(2)$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1 + 3) = f(0) = 1 \\ f(1) \times f(3) = 2 \times 3 = 1 \end{array} \right\} \text{Jadi } f(1 + 3) = f(1) \times f(3)$$

Dibentuk lagi $f: G \rightarrow G'$ dengan definisi berikut:

$$f(0) = 1 \quad \text{atau} \quad 0 \longleftrightarrow 1$$

$$f(1) = 3 \quad 1 \longleftrightarrow 3$$

$$f(2) = 4 \quad 2 \longleftrightarrow 4$$

$$f(3) = 2 \quad 3 \longleftrightarrow 2$$

Periksalah bahwa untuk setiap $x, y \in G$ berlaku hubungan $f(x + y) = f(x) \times f(y)$, misalkan:

$$\left. \begin{array}{l} f(2 + 3) = f(1) = 3 \\ f(2) \times f(3) = 4 \times 2 = 3 \end{array} \right\} \text{Jadi } f(2 + 3) = f(2) \times f(3)$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1 + 3) = f(0) = 1 \\ f(1) \times f(3) = 3 \times 2 = 1 \end{array} \right\} \text{Jadi } f(1 + 3) = f(1) \times f(3)$$

Jadi $G = \{0, 1, 2, 3\}$ suatu grup dengan operasi penjumlahan modulo 4 dan $G' = \{1, 2, 3, 4\}$ suatu grup dengan operasi perkalian modulo 5 merupakan isomorfik atau " $G \approx G'$ ".

Contoh:

Misalkan G adalah himpunan semua bilangan real positif dengan operasi perkalian, dan G' adalah himpunan semua bilangan real dengan operasi penjumlahan.

Jawab:

- a. Pemetaan $f: G \rightarrow G'$ didefinisikan oleh $f(x) = \log x$, untuk setiap $x \in G$.

Ambil sebarang $a, b \in G$ maka $f(a) = \log a$ dan $f(b) = \log b$
 $f(ab) = \log ab = \log a + \log b$.

Elemen identitas dalam G adalah 1 dan $f(1) = \log 1 = 0$, yaitu elemen identitas dalam G' .

Jadi, pemetaan $f: G \rightarrow G'$ dengan $f(x) = \log x$ adalah **isomorfisme**.

- b. Pemetaan $f: G \rightarrow G'$ dengan $f(x) = {}^b\log x$ yaitu fungsi logaritma dengan dasar $b > 0$ dan $b \neq 1$.

Misalkan m_1 dan $m_2 \in G$ dan $a_1, a_2 \in G'$ dengan ${}^b\log m_1 = a_1$ dan ${}^b\log m_2 = a_2$, maka:

$${}^b\log (m_1 \times m_2) = {}^b\log m_1 + {}^b\log m_2 = a_1 + a_2$$

$$\text{Jadi } f(m_1 \times m_2) = f(m_1) + f(m_2).$$

Pemetaan $f(x) = {}^b\log x$, dengan $b > 0$ dan $b \neq 1$ merupakan isomorfisme.

Teorema 13.2

- Jika order dari generator suatu grup siklik G tak berhingga, maka G isomorfik dengan G' , grup aditif (penjumlahan) dari semua bilangan bulat.
- Jika generator suatu grup siklik G berorder $n > 0$ maka G isomorfik dengan G' , grup aditif dari semua bilangan modulo n .

Pembuktian harap Anda kerjakan sebagai latihan.

13.2 Rangkuman

- Homomorfisme $f: G \rightarrow G'$ disebut isomorfisme, jika f sekaligus epimorfisme dan monomorfisme, yaitu f suatu homomorfisme satu-satu dari G onto G' .

Jadi $G = \{a, b, c, \dots\}$ grup

$G' = \{a', b', c', \dots\}$ grup

Suatu isomorfisme antara (G, o) dan $(G, *)$ adalah pemetaan satu lawan satu yang mempertahankan atau mengawetkan operasi.

$f: G \rightarrow G'$, yang bersifat

$$\forall a \in G \longrightarrow f(a) = a'$$

$$\forall b \in G \longrightarrow f(b) = b'$$

$$\forall a, b \in G \longrightarrow f(a \circ b) = a' * b'$$

2. Dalam suatu isomorfisme antara G dan G' berlaku sifat:
 - a. Jika i elemen identitas dan i' elemen identitas G' maka $f(i) = i'$ atau

$$i \longleftrightarrow i'$$
 - b. Jika $a \in G$ berpasangan dengan $a' \in G'$ maka invers a berpasangan dengan invers a' atau

$$f(a) = a' \longleftrightarrow f(a^{-1}) = (a')^{-1}$$
3. Jika order dari generator suatu grup siklik G tak berhingga maka G isomorfik dengan G' , grup aditif dari semua bilangan bulat.
4. Jika generator suatu grup siklik G berorder $n > 0$ maka G isomorfik dengan G' , grup aditif dari semua bilangan modulo n .

13.3 Latihan Soal

1. Buktikan bahwa grup siklik dengan order tak berhingga isomorfik dengan grup semua bilangan bulat dengan operasi penjumlahan.
2. Buktikan bahwa grup siklik berorder $n > 0$ isomorfik dengan grup aditif dari semua bilangan bulat modulo n , yang disebut juga kelas sisa modulo n .
3. Misalkan G adalah grup siklik dengan generator a dan $n(G) = 7$, B adalah grup semua bilangan bulat modulo 7

dengan operasi penjumlahan modulo 7. Tunjukkan bahwa G isomorfik dengan B .

4. Buatlah isomorfisme antara $G = \{1, i, -1, -i\}$ dengan operasi perkalian dan $G' = \{I, R, R^2, R^3\}$ dengan operasi rotasi berpusat 0 dan sudut putar 90° dan operasi komposisi transformasi.
5. Misalkan $G = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ dan $(G, +)$ adalah grup. $G' = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ dan $(G', +)$ adalah grup. Pemetaan $f: G \rightarrow G'$ dengan $f(n) = 2n, n \in G$. Jelaskan apakah pemetaan tersebut merupakan isomorfisme.



14. Penyelesaian Latihan Soal

14.1 Penyelesaian Latihan Soal Bab 1

1. $A = \{6, 12, 19, 24, 30, 36, 42, 48\}$
 $B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\}$
2. $P = \{x \mid x = n^2, n \in \text{bilangan cacah dan } n < 5\}$
 $Q = \{x \mid x = \frac{n}{n+1}, n \in \text{bilangan asli dan } n < 5\}$
3. $A = \emptyset$, Karena tidak ada bilangan asli yang memenuhi $x^2 + 1 = 0$
 $B = \emptyset$, Karena tidak ada bilangan prima antara 13 dan 16
 $C \neq \emptyset$, Karena 0 bilangan cacah dan $0 < 1$
4. a. $\{0\} \subset \{0, 1\}$
 b. $\emptyset \in \{\emptyset\}$,

Karena $\{\emptyset\}$ adalah himpunan yang anggotanya $\emptyset$

c. $\{1, 2\} \notin \{1, 3\}$, Karena $2 \notin \{1, 3\}$

d. $1 \notin \{\}$,

Karena $\{\}$ adalah himpunan yang tidak mempunyai anggota

5. a. $\{6, 12\} \subset A$

b. $\{4, 6, 8, 12, 14\} \subset A$

6. Himpunan bagian sejati dari $A = \{0, 1, 2\}$ adalah

$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
$\{0, 1\}$	$\{0, 2\}$	$\{1, 2\}$

7. $2^A = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{r\}, \{s\}, \{p, q\}, \{p, r\}, \{p, s\}, \{q, r\}, \{q, s\}, \{r, s\}, \{p, q, r\}, \{p, q, s\}, \{p, r, s\}, \{q, r, s\}, \{p, q, r, s\}\}$

8. Anggota dari $A = \{1, \{2, 3\}, \emptyset, p\}$ adalah

- 1
- Himpunan yang beranggotakan 2 dan 3
- $\emptyset$
- p

9. $A = \{0, \emptyset, \{0, 1\}\}$, bukan keluarga himpunan karena 0 bukan himpunan.

$B = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$, keluarga himpunan karena setiap anggotanya merupakan himpunan.

$C = \{p, q, \{p, q\}\}$, bukan keluarga himpunan karena p dan q bukan himpunan.

10. Tabel yang menyatakan hubungan antara $n(A)$ dan $n(2^A)$, dengan $n(A) = 0, 1, 2, 3, \dots, N$

A	$n(A)$	$n(2^A)$
$\{ \}$	0	$1 = 2^0$
$\{1\}$	1	$2 = 2^1$
$\{1, 2\}$	2	$4 = 2^2$
$\{1, 2, 3\}$	3	$8 = 2^3$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$\{1, 2, 3, \dots, N\}$	N	2^N

14.2 Penyelesaian Latihan Soal Bab 2

1. Jika $A \subset B$ maka $A \cap B = A$ (Teorema 2.2)

$$(A \cap B)' = A'$$

$$A' \cup B' = A'$$

Jadi $B' \subset A'$

2. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, dan $C = \{2, 4, 5, 7\}$.

- a. $B \cap C = \{4, 5\}$ dan $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\text{Jadi } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- b. $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ dan $A \cap (B \cup C) = \{2, 3, 4\}$
 $A \cap B = \{3, 4\}$
 $A \cap C = \{2, 4\}$
 $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{2, 3, 4\}$
 Jadi $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3. $S = \{1, 2, 3 \dots, 9\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 8\}$, dan $B = \{1, 2, 3, 4\}$
- a. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$
 $(A \cup B)' = \{6, 9\}$
 $A' = \{2, 4, 6, 9\}$ dan $B' = \{5, 6, 7, 8, 9\}$
 $A' \cap B' = \{6, 9\}$
 Jadi $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- b. $A \cap B = \{1, 3\}$
 $(A \cap B)' = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 $A' = \{2, 4, 6, 9\}$ dan $B' = \{5, 6, 7, 8, 9\}$
 $A' \cup B' = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 Jadi $(A \cap B)' = A' \cup B'$
4. $A = \{1, 3, 5, 7, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, dan $C = \{1, 2, 5, 9\}$
- a. $A - B = \{5, 7, 8\}$
 $A - B - C = \{7, 8\}$
- b. $B - C = \{3, 4\}$
 $A \cap (B - C) = \{3\}$

5. $A \cup C = B \cup C$ dan $A \cap C = B \cap C$ maka $A = B$

Bukti:

$$\begin{aligned}
 A &= A \cup (A \cap C) && \text{(Teorema 2.2)} \\
 &= A \cup (B \cap C) && \text{(Ketentuan)} \\
 &= (A \cup B) \cap (A \cup C) && \text{(Sifat distributif)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= (A \cup B) \cap (B \cup C) && \text{(Ketentuan)} \\
&= (B \cup A) \cap (B \cup C) && \text{(Sifat komutatif)} \\
&= B \cup (A \cap C) && \text{(Sifat distributif)} \\
&= B \cup (B \cap C) && \text{(Ketentuan)} \\
&= B && \text{(Teorema 2.2)}
\end{aligned}$$

$$6. (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

Bukti:

$$\begin{aligned}
&(A - B) \cup (B - A) \\
&= (A \cap B') \cup (B \cap A') \\
&\quad \text{(Teorema 2.3)} \\
&= ((A \cap B') \cup B) \cap ((A \cap B') \cup A') \\
&\quad \text{(Sifat distributif)} \\
&= ((A \cup B) \cap (B' \cup B)) \cap ((A \cup A') \cap (B' \cup A')) \\
&\quad \text{(Sifat distributif)} \\
&= ((A \cup B) \cap S) \cap (S \cap (B' \cup A')) \\
&\quad \text{(Sifat gabungan)} \\
&= (A \cup B) \cap (B' \cup A') \\
&\quad \text{(Sifat irisan)} \\
&= (A \cup B) \cap (A' \cup B') \\
&\quad \text{(Sifat komutatif)} \\
&= (A \cup B) \cap (A \cap B)' \\
&\quad \text{(Teorema 2.4)} \\
&= (A \cup B) - (A \cap B) \\
&\quad \text{(Teorema 2.3)}
\end{aligned}$$

7. $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, dan $C = \{3, 4, 7\}$.

a. $B \cap C = \{3, 4\}$

$$A \times (B \cap C) = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$

$$A \times B =$$

$$\{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\}$$

$$A \times C = \{(1, 3), (1, 4), (1, 7), (2, 3), (2, 4), (2, 7)\}$$

$$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$

$$\text{Jadi } A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

b. $B - C = \{5, 6\}$

$$A \times (B - C) = \{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)\}$$

$$(A \times B) - (A \times C) = \{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)\}$$

$$\text{Jadi } A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

8. $(\bigcap_{i \in I} A_i)' = \bigcup_{i \in I} A_i'$

i. Akan dibuktikan bahwa $(\bigcap_{i \in I} A_i)' \subset \bigcup_{i \in I} A_i'$

Ambil $x \in (\bigcap_{i \in I} A_i)'$ maka $x \notin \bigcap_{i \in I} A_i$

$$x \notin A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots$$

$$x \notin A_1 \text{ atau } x \notin A_2 \text{ atau } x \notin A_3 \dots$$

$$x \in A_1' \text{ atau } x \in A_2' \text{ atau } x \in A_3' \dots$$

$$x \in A_1' \cup A_2' \cup A_3' \cup \dots$$

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i'$$

$$\text{Jadi } (\bigcap_{i \in I} A_i)' \subset \bigcup_{i \in I} A_i'$$

ii. Akan dibuktikan bahwa $\bigcup_{i \in I} A'_i \subset (\bigcap_{i \in I} A_i)'$

Ambil $y \in \bigcup_{i \in I} A'_i$ maka

$$y \in A'_1 \cup A'_2 \cup A'_3 \dots$$

$$y \in A'_1 \text{ atau } y \in A'_2 \text{ atau } y \in A'_3 \dots$$

$$y \notin A_1 \text{ dan } y \notin A_2 \text{ dan } y \notin A_3 \dots$$

$$y \notin A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots$$

$$y \notin \bigcap_{i \in I} A_i$$

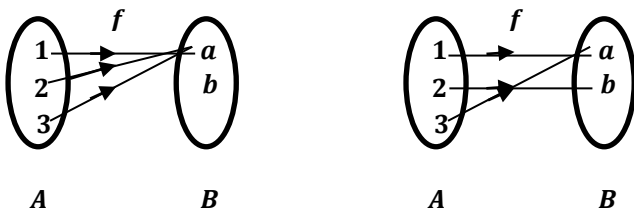
$$y \in (\bigcap_{i \in I} A_i)'$$

$$\text{Jadi } \bigcup_{i \in I} A'_i \subset (\bigcap_{i \in I} A_i)'$$

Dari (i) dan (ii) sehingga diperoleh $(\bigcap_{i \in I} A_i)' = \bigcup_{i \in I} A'_i$

14.3 Penyelesaian Latihan Soal Bab 3

1.



Banyak pemetaan dari A ke B ada 8 buah. Coba tuliskan pemetaan yang lain.

2. R adalah himpunan bilangan real, dan pemetaan $g: R \rightarrow R$ didefinisikan oleh

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{Jika } x \geq 1 \\ x + 2, & \text{Jika } x < 1 \end{cases}$$

- $g(1) = 1^2 - 1 = 0$
- $g(-2) = -2 + 2 = 0$
- $g(5) = 5^2 - 1 = 24$
- $g(-8) = -8 + 2 = -6$

Perhatikan $g(1) = g(-2)$, maka pemetaan g tidak injektif sehingga g bukan pemetaan bijektif. Tetapi pemetaan g adalah surjektif, sebab untuk $y \in R$

- a. Jika $y \geq 1$ ada $x \in R$ sedemikian sehingga $y = x^2 - 1$, yaitu $x = \sqrt{y + 1}$
 - b. Jika $y < 1$ ada $x \in R$ sedemikian sehingga $y = x + 2$, yaitu $x = y - 2$.
3. A adalah himpunan bilangan asli. Pemetaan $f: A \rightarrow A$ didefinisikan dengan $f(x) =$ banyaknya angka pada lambang bilangan x , $\forall x \in A$.

$$\begin{aligned} f(9) &= 1 & f(32) &= 2 \\ f(531) &= 3 & f(10^8) &= 9 \\ f(D) &= \{6, 7, 8, 9\} \end{aligned}$$

f adalah pemetaan surjektif dan bukan pemetaan injektif (Tunjukkanlah).

4. R adalah himpunan bilangan real. Pemetaan $f: R \rightarrow R$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2, \forall x \in R$. Misalkan $A = \{x \mid -1 < x \leq 0, x \in R\}$ dan $B = \{x \mid 0 \leq x < 1, x \in R\}$.
- $f(A) = B$
 - $f(B) = B$
 - $f^{-1}(A) = \{0\}$
 - $f^{-1}(B) = B$
 - $f(A \cap B) = \{0\}$
 - $f(A \cup B) = \{x \mid -1 < x < 1, x \in R\}$
 - $f^{-1}(A \cap B) = \{0\}$
 - $f^{-1}(A \cup B) = B$

5. $f: R \rightarrow R$ didefinisikan oleh $f(x) = 4x + 5, \forall x \in R$.
- Pemetaan f adalah injektif, sebab $\forall x, y \in R$ sedemikian sehingga $4x + 5 = 4y + 5$ sehingga $x = y$.
 - Pemetaan f adalah surjektif, sebab $\forall y \in R$ ada $x \in R$ sedemikian sehingga $f(x) = y$, yaitu $4x + 5 = y$ sehingga $x = \frac{1}{4}(y - 5)$.

Jadi pemetaan f adalah bijektif.

$$f(x) = 4x + 5$$

$$y = 4x + 5$$

$$4x = y - 5$$

$$x = \frac{1}{4}(y - 5)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(x - 5), \forall x \in R$$

6. Banyak pemetaan surjektif dari A ke B ada 6 buah. Coba tuliskan semua pemetaan surjektif tersebut.
7. Banyak pemetaan bijektif dari S ke S sebanyak $3! = 6$. Coba tuliskan semua pemetaan bijektif itu.
8. Banyak pemetaan injektif adalah $2 \binom{4}{2} = 12$ buah. Tuliskan semua pemetaan injektif dari A ke B.

14.4 Penyelesaian Latihan Soal Bab 4

1. $f: R \rightarrow R$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2 + 3x + 1$ dan $g(x) = 2x - 3$ untuk setiap $x \in R$.
 - a. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$$\begin{aligned}
 &= f(2x - 3) \\
 &= (2x - 3)^2 + 3(2x - 3) + 1 \\
 &= 4x^2 - 6x + 1
 \end{aligned}$$
 - b. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$$\begin{aligned}
 &= f(x^2 + 3x + 1) \\
 &= 2(x^2 + 3x + 1) - 3 \\
 &= 2x^2 + 6x - 1
 \end{aligned}$$
 - c. $(g \circ g)(x) = g(g(x))$

$$\begin{aligned}
 &= g(2x - 3) \\
 &= 2(2x - 3) - 3 \\
 &= 4x - 9
 \end{aligned}$$
 - d. $(f \circ f)(x) = f(f(x))$

$$\begin{aligned}
 &= f(x^2 + 3x + 1) \\
 &= (x^2 + 3x + 1)^2 + 3(x^2 + 3x + 1) + 1 \\
 &= x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1
 \end{aligned}$$

2. $f: R \rightarrow R$ dan $g: R \rightarrow R$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2 - 2|x|$ dan $g(x) = x^2 + 1$, untuk setiap $x \in R$.

$$\begin{aligned} \text{a. } (f \circ g)(-2) &= f(g(-2)) \\ &= f((-2)^2 + 1) \\ &= f(5) \\ &= 5^2 - 2|5| \\ &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } (g \circ f)(3) &= g(f(3)) \\ &= g((3)^2 - 2|3|) \\ &= g(3) \\ &= 3^2 + 1 \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } (g \circ f)(-4) &= g(f(-4)) \\ &= g((-4)^2 - 2|-4|) \\ &= f(8) \\ &= 8^2 + 1 \\ &= 65 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } (f \circ g)(5) &= f(g(5)) \\ &= f((5)^2 + 1) \\ &= f(26) \\ &= 26^2 - 2|26| \\ &= 624 \end{aligned}$$

3. f mempunyai pemetaan invers karena bijektif (Tunjukkanlah).

Misalkan $f(x) = y = 3x - 1$ sehingga $x = \frac{1}{3}(y + 1)$.

Jadi $f^{-1}: R \rightarrow R$ didefinisikan oleh $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x +$

$$1), \forall x \in R.$$

Misalkan $g(x) = y = x^3 + 5$ sehingga $x = \sqrt[3]{y-5}$

Jadi $g^{-1}: R \rightarrow R$ didefinisikan oleh

$$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-5}, \forall x \in R.$$

4. Pemetaan $f: R \rightarrow R$ didefinisikan oleh $f(x) = 3x + 4, \forall x \in R$

a. $f(x) = y = 3x + 4$ sehingga $x = \frac{1}{3}(y - 4)$

Jadi $f^{-1}: R \rightarrow R$ didefinisikan oleh $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x - 4), \forall x \in R.$

b.
$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x)) \\ &= f(3x + 4) \\ &= 3(3x + 4) + 4 \\ &= 9x + 12 + 4 \\ (f \circ f)(x) &= 9x + 16\end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ f^{-1})(x) &= f^{-1}(f^{-1}(x)) \\ &= f^{-1}\left(\frac{1}{3}(x - 4)\right) \\ &= \frac{\frac{(x-4)}{3} - 4}{3} \\ &= \frac{x-16}{9}\end{aligned}$$

5. Misalkan R adalah himpunan bilangan real, $A = R - \{3\}$ dan $B = R - \{1\}$. Pemetaan $f: A \rightarrow B$ didefinisikan oleh $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$.

- Ambil $x, y \in A$ sedemikian sehingga $f(x) = f(y)$, yaitu

$$\frac{x-2}{x-3} = \frac{y-2}{y-3}$$

Dapat disimpulkan bahwa $x = y$. Jadi f pemetaan injektif.

- Ambil $t \in B$ sedemikian sehingga $\frac{2-3t}{1-t} \in A$ dan $f\left(\frac{2-3t}{1-t}\right) = t$. Jadi f pemetaan surjektif.

Jadi f pemetaan injektif sekaligus surjektif maka f merupakan pemetaan bijektif.

$f^{-1}: B \rightarrow A$ didefinisikan oleh $f^{-1}(x) = \frac{2-3x}{1-x}, \forall x \in B$.

14.5 Penyelesaian Latihan Soal Bab 5

1. $H \sim K$ maka ada pemetaan $f: H \rightarrow K$.
 $K \sim M$ maka ada pemetaan $f: K \rightarrow M$.
 Pemetaan f dan g merupakan pemetaan bijektif.
 Tunjukkanlah bahwa pemetaan komposisi $g \circ f: H \rightarrow M$ merupakan pemetaan bijektif pula.
 Selanjutnya and adapat menyimpulkan bahwa $H \sim M$.

2. Bentuk suatu pemetaan $f: A \rightarrow B$ seperti pada gambar berikut

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$B = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$

Tuliskan rumus definisi dari pemetaan $f: A \rightarrow B$ tersebut, dan tunjukkanlah bahwa f suatu pemetaan bijektif. Sehingga anda dapat menyimpulkan bahwa $A \sim B$.

Karena $A \sim B$ dan $A \subset B$ maka B suatu himpunan tak berhingga.

3. $H \cup K$ suatu himpunan tak berhingga.

Menurut teorema 5.2, karena H suatu himpunan tak berhingga dan $H \subset (H \cup K)$ maka $H \cup K$ merupakan himpunan tak berhingga.

Untuk $H \cap K$, perhatikan conoth berikut ini.

$$H = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ dan } K = \{1, 0, 1 - 1, -2, -3, \dots\}$$

Tentukanlah $H \cap K$.

4. Misalkan $K = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ dan $H \subset K$ sehingga $\forall a_k \in K$ maka $a_k \in H$. Karena H suatu himpunan tak berhingga dan $a_1 \in H$ maka $H - \{a_1\}$ suatu himpunan tak berhingga pula (menurut teorema 5.4). Selanjutnya $H - \{a_1\} - \{a_2\} = H - \{a_1, a_2\}$ adalah himpunan tak berhingga.

$H - \{a_1, a_2\} - \{a_3\} = H - \{a_1, a_2, a_3\}$ adalah himpunan tak berhingga.

Lanjutkanlah, sehingga anda dapat menyimpulkan bahwa $H \sim K$ suatu himpunan tak berhingga.

5. Pandang himpunan $H = \{(a, 2b) | a, b \in \text{Bilangan asli}\}$.

Karena $P = \{(a, b) | a, b \in \text{Bilangan asli}\}$ maka $H \subset P$.

Selanjutnya bentuklah suatu pemetaan $f: P \rightarrow P$ yang didefinisikan oleh $f((a, b)) = (a, 2b), \forall (a, b) \in P$.

Tunjukkanlah bahwa f suatu pemetaan bijektif. Sehingga anda dapat menyimpulkan bahwa P suatu himpunan tak berhingga.

6. $H \times K = \{(h, k) | h \in H \text{ dan } k \in K\}$

Bentuk suatu pemetaan $f: H \times K \rightarrow K \times H$ yang didefinisikan oleh $f((h, k)) = (k, h), \forall (h, k) \in H \times K$.

Anda tinggal memperlihatkan bahwa f suatu pemetaan bijektif untuk memperoleh kesimpulan bahwa $H \times K \sim K \times H$.

14.6 Penyelesaian Latihan Soal Bab 6

1. Himpunan G dengan operasi biner
 - a. $G =$ Himpunan bilangan modulo 5 yang bukan nol dengan operasi perkalian.

$\times_5$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$$G = \{1, 2, 3, 4\}$$

$(G, \times_5)$ grup komutatif

- b. $G = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ dengan operasi penjumlahan.
 $(G, +)$ adalah grup komutatif.

- c. $G = \{A, B, C, D\}$ dengan operasi perkalian matriks dan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\times$	A	B	C	D
A	A	B	C	D
B	B	A	D	C
C	C	D	A	B
D	D	C	B	A

$$G = \{A, B, C, D\}$$

$(G, \times)$ grup komutatif.

- d. $G =$ Himpunan bilangan modulo 4 yang bukan nol dengan operasi perkalian bilangan modulo 4.

*	1	2	3
1	1	2	3
2	2	0	2
3	3	2	1

- e. $G = \{x \mid x = a\sqrt{b}, a \text{ bilangan bulat dan } b \text{ bilangan asli}\}$ dengan operasi penjumlahan.
 $(G, +)$ adalah grup komutatif.

- f. $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ dengan operasi komposisi fungsi dan

$$\begin{array}{lll}
 f_1(x) = x & f_2(x) = \frac{1}{x} & f_3(x) = 1 - x \\
 f_4(x) = \frac{1}{1-x} & f_5(x) = \frac{x}{x-1} & f_6(x) = \frac{x-1}{x}
 \end{array}$$

I

	o	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
	f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
	f_2	f_2	f_1	f_4	f_3	f_6	f_5
II	f_3	f_3	f_6	f_1	f_5	f_4	f_2
	f_4	f_4	f_5	f_2	f_6	f_3	f_1
	f_5	f_5	f_4	f_6	f_2	f_1	f_3
	f_6	f_6	f_3	f_5	f_1	f_2	f_4

Hasil komposisi fungsi dapat anda lihat pada tabel di atas dengan I dikerjakan terlebih dahulu kemudian dilanjutkan dengan II.

- $f_3(f_4(x)) = f_3\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{x-1} = f_5(x)$
- $f_4(f_2(x)) = f_4\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1} = f_5(x)$
- $f_4(f_6(x)) = f_4\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = x = f_1(x)$
- $f_6(f_6(x)) = f_6\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x}{x-1}} = \frac{1}{1-x} = f_4(x)$

2. $a \in G$ dan $a * a = a$

$$a * a = a$$

$$a^{-1} * (a * a) = a^{-1} * a$$

$$(a^{-1} * a) * a = i$$

$$i * a = i$$

$$a = i$$

3. Ambil $a, b \in G$

$a * a = i$ dan $b * b \in G$ maka $a * b \in G$ sehingga $(a * b) *$

$$(a * b) = i$$

$$(a * b) * (a * b) = i$$

$$(a * b) * (a * b) * b = i * b$$

$$(a * b) * a * (b * b) = b$$

$$(a * b) * a * i = b$$

$$(a * b) * a = b$$

Dikalikan ruas kiri dan kanan dengan a dari kanan.

$$(a * b) * a * a = b * a$$

$$(a * b) * i = b * a$$

$$a * b = b * a$$

Jadi $(G, *)$ grup komutatif.

14.7 Penyelesaian Latihan Soal Bab 7

1. Hasil kali anggota $G = \{1, 2, 3, 4\}$ disajikan dalam tabel berikut.

$\times_5$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Menurut teorema 7.1, S merupakan subgrup dari G jika memenuhi sifat

a. Tertutup, $\forall a, b \in S$ maka $a * b \in S$

b. $\forall a \in S$, terdapat $a^{-1} \in S$

Oleh karena itu subgrup S dapat ditentukan dengan melihat tabel di atas

- Ambilah elemen identitas sebagai anggota S
- Ambilah anggota G yang merupakan invers satu dengan yang lain menjadi anggota S
- Kemudian cek syarat tertutup

Apabila dipenuhi sifat tertutup berarti S subgrup. Apabila tidak dipenuhi sifat tertutup berarti S bukan subgrup dari G .

Untuk $S = \{1, 2, 3\}$

- 1 elemen identitas G
- 2 dan 3 anggota G yang merupakan invers dari anggota yang satu dengan yang lain.
- $3 \times 3 = 4 \notin S$ (Tidak tertutup)

Jadi $S = \{1, 2, 3\}$ bukan subgrup G

Untuk $S = \{1, 4\}$

- 1 elemen identitas G
- 4 anggota G yang merupakan invers dirinya sendiri.
- $4 \times 4 = 1 \in S$ (Sifat tertutup dipenuhi)

Jadi $S = \{1, 4\}$ merupakan subgrup G

- H dan S adalah subgrup dari G dibuktikan bahwa

$$(HS)^{-1} = S^{-1}H^{-1}$$

i. Akan dibuktikan bahwa $(HS)^{-1} \subset S^{-1}H^{-1}$

Ambil $y \in (HS)^{-1}$ maka $y = (a * b)^{-1}$ dengan $a \in H$ dan $b \in S$.

$y = (a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$. Karena $b^{-1} * a^{-1} \in S^{-1}H^{-1}$ (mengapa?)

Jadi, jika $y \in (HS)^{-1}$ maka $y \in S^{-1}H^{-1}$

Ini berarti $(HS)^{-1} \subset S^{-1}H^{-1}$

ii. Akan dibuktikan bahwa $S^{-1}H^{-1} \subset (HS)^{-1}$

Ambil $x \in S^{-1}H^{-1}$ maka $x = c^{-1} * d^{-1}$ dengan $c \in S$ dan $d \in H$

$$x = c^{-1} * d^{-1} = (d * c)^{-1}$$

Karena $d \in H$ dan $c \in S$ maka $(d * c)^{-1} \in (HS)^{-1}$ sehingga $x \in (HS)^{-1}$.

Jadi, jika $x \in S^{-1}H^{-1}$ maka $x \in (HS)^{-1}$

Ini berarti $S^{-1}H^{-1} \subset (HS)^{-1}$.

Dari (i) dan (ii) sehingga diperoleh bahwa $(HS)^{-1} = S^{-1}H^{-1}$.

3. Untuk menunjukkan bahwa S subgrup dari G , maka tunjukkan bahwa

- S tertutup terhadap operasi “ $*$ ”
- Setiap elemen S mempunyai invers

Ambil $b, c \in S$ maka dipenuhi bahwa $b * a = a * b$ dan $c * a = a * c$. Sekarang perhatikan $(b * c) * a = b * (c * a)$ sifat asosiatif dalam G .

$$(b * c) * a = b * (c * a)$$

$$(b * c) * a = b * (a * c) \quad (c \in S)$$

$$= (b * a) * c \quad (\text{Sifat asosiatif dalam } G)$$

$$= (a * b) * c \quad (b \in S)$$

$$= a * (b * c) \quad (\text{Sifat asosiatif dalam } G)$$

$$\text{Jadi } (b * c) * a = a * (b * c)$$

Hal ini berarti $(b * c) \in S$. Sehingga S tertutup terhadap operasi “*”.

Ambil $b \in S$ berarti $b \in G$ dan karena G suatu grup maka ada $b^{-1} \in G$.

$$b * a = a * b$$

$$b^{-1} * (b * a) = b^{-1} * (a * b)$$

$$(b^{-1} * b) * a = (b^{-1} * a) * b$$

$$i * a = (b^{-1} * a) * b$$

$$a = (b^{-1} * a) * b$$

$$a * b^{-1} = ((b^{-1} * a) * b) * b^{-1}$$

$$a * b^{-1} = (b^{-1} * a) * (b * b^{-1})$$

$$a * b^{-1} = (b^{-1} * a) * i$$

$$a * b^{-1} = b^{-1} * a$$

Hal ini menunjukkan bahwa $b^{-1} \in S$. Jadi setiap elemen S mempunyai invers dalam S .

Terbukti bahwa S merupakan subgrup dari G .

14.8 Penyelesaian Latihan Soal Bab 8

1. Permutasi berikut menjadi notasi siklis

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1 \ 2) (4 \ 5)$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 4 \ 3 \ 5 \ 6)$

2. Permutasi berikut menjadi notasi 2 baris

$$\text{a. } (1 \ 3 \ 4)(5 \ 2 \ 6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{b. } (1 \ 3 \ 4 \ 2 \ 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Hasil kali permutasi dan inversnya

$$\begin{aligned} \text{a. } p &= (1 \ 3 \ 4)(1 \ 2 \ 4) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= (1 \ 2)(3 \ 4) \end{aligned}$$

$$p^{-1} = (1 \ 2)(3 \ 4), \text{ karena}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } q &= (1 \ 2 \ 3 \ 5)(3 \ 2 \ 5 \ 1 \ 4) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \\ &= (1 \ 4 \ 5 \ 2) \end{aligned}$$

$$q^{-1} = (1 \ 2 \ 5 \ 4), \text{ karena}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$q^{-1} = (1 \ 2 \ 5 \ 4)$, karena

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

4. $G = \{i, a, b, c\}$ dengan

$$i = (1)(2)(3)(4)$$

$$a = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$$

$$b = (1 \ 3)(2 \ 4)$$

$$c = (1 \ 4 \ 3 \ 2)$$

Perhatikan tabel di bawah ini

$*$	i	a	b	c
i	i	a	b	c
a	a	b	c	i
b	b	c	i	a
c	c	i	a	b

Dari tabel dapat diketahui bahwa

- Tertutup
- Asosiatif
- Mempunyai identitas i
- Setiap elemen G mempunyai invers

$$i^{-1} = i \qquad b^{-1} = b$$

$$a^{-1} = c \text{ R}^2 c^{-1} = a$$

- e. Berlaku sifat komutatif (simetri terhadap diagonal utama)

Jadi G merupakan grup komutatif.

5. Perhatikan tabel di bawah ini.

$*$	I	R	R^2	R^3	X	Y	A	B
I	I	R	R^2	R^3	X	Y	A	B
R	R	R^2	R^3	I	A	B	Y	X
R^2	R^2	R^3	I	R	Y	X	B	A
R^3	R^3	I	R	R^2	B	A	X	Y
X	X	B	Y	A	I	R^2	R^3	R
Y	Y	A	X	B	R^2	I	R	R^3
A	A	X	B	Y	R	R^3	I	R^2
B	B	Y	A	X	R^3	R	R^2	I

Berdasarkan tabel di atas dapat diketahui bahwa

- Tertutup
- Asosiatif
- Identitas I
- Setiap elemen mempunyai invers

$$I^{-1} = I \qquad X^{-1} = X$$

$$R^{-1} = R^3 \qquad Y^{-1} = Y$$

$$(R^2)^{-1} = R^2 \qquad A^{-1} = A$$

$$(R^3)^{-1} = R \qquad B^{-1} = B$$

Jadi $(G,*)$ merupakan grup.

14.9 Penyelesaian Latihan Soal Bab 9

1. Akar dari $z^6 = 1$, dengan $z_k = \text{Cis } \frac{k\pi}{3}$

$$z_1 = \text{Cis } \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$$

$$z_2 = \text{Cis } \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$$

$$z_3 = \text{Cis } \pi = -1$$

$$z_4 = \text{Cis } \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$$

$$z_5 = \text{Cis } \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$$

$$z_6 = \text{Cis } 2\pi = 1$$

$$G = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6 = 1\}$$

$\times$	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_1
z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_1	z_2
z_3	z_4	z_5	z_6	z_1	z_2	z_3
z_4	z_5	z_6	z_1	z_2	z_3	z_4
z_5	z_6	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
z_6	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6

$(G, \times)$ merupakan grup siklik dengan generator z_1 .

2. G grup siklik dengan generator a berorder $n > 0$ sehingga $a^n = i$ dan i elemen identitas G .

S subgrup dari G berarti $S \subset G$ dan S grup.

Jadi $i = a^n \in S$.

Generator S adalah a^m berarti ada $(a^m)^k \in S$

Sehingga $(a^m)^k = i$ dan S berorder k

$$a^n = a^{mk} = i \in S$$

3. G suatu grup siklik dengan order n dan $a^t \in G$ dengan $0 < t < n$

i. Akan dibuktikan jika a^t generator G maka $(n, t) = 1$

a^t generator G sehingga setiap anggota G merupakan perpangkatan dari a^t

$a \in G$ berarti ada bilangan bulat p sehingga $a = (a^t)^p$.

Kalikan kedua ruas dengan a^{-1} dari kanan.

$$a = a^{tp}$$

$$a \cdot a^{-1} = a^{tp} \cdot a^{-1}$$

$$i = a^{tp-1}$$

G grup siklik berorder n berarti $a^n = i$

Jadi $tp - 1$ kelipatan n .

Misalkan $tp - 1 = kn$, dengan k bilangan bulat

$$-kn + tp = 1$$

$$(-k)n + tp = 1$$

Menurut teorema dalam teori bilangan, jika $(-k)$ dan p bilangan bulat sehingga $(-k)n + tp = 1$, maka $(n, t) = 1$.

ii. Akan dibuktikan jika $(n, t) = 1$ maka a^t generator G

G berorder n maka $G = \{a, a^2, a^3, \dots, a^n = i\}$

$(n, t) = 1$ berarti ada bilangan bulat p dan q

Sehingga $pn + qt = 1$ atau $qt = 1 - pn$.

$$(a^t)^q = a^{tq}$$

$$= a^{1-pn}$$

$$= a \cdot a^{-pn}$$

$$= a(a^n)^{-p}$$

$$= a \cdot (i)^{-p}$$

$$= a \cdot i$$

$$= a$$

Ini berarti ada $a \in G$ yang dihasilkan oleh perpangkatan a^t . Oleh karena $G = \{a, a^2, a^3, \dots, a^n = i\}$ maka setiap anggota G dapat dihasilkan dari a^t . Jadi a^t generator G .

4. $G = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6 = i\}$
 - a. Subgrup dari G adalah $S = \{z_3, z_6\}$ dengan $z_3 = -1$ dan $z_6 = 1$
Generator S adalah $z_3 = (z_1)^3$.
 - b. Anggota G yang dapat menjadi generator G adalah z_1 dan z_5 sebab $(1, 6) = 1$ dan $(5, 6) = 1$.

5. Misalkan G adalah grup siklik dengan generator a .

i. Akan dibuktikan G grup tak berhingga maka $a^k = a^t \Rightarrow k = t$

G grup tak berhingga jadi $a^0 = i$

Misalkan $a^k = a^t$ maka $k = t$ atau $k > t$

$$a^k \cdot a^{-t} = a^t \cdot a^{-t}$$

$$a^{k-t} = a^t \cdot a^{-t}$$

$$a^{k-t} = i, \text{ dengan } k > t \text{ atau } k - t > 0$$

Hal ini tidak mungkin karena G tak berhingga. Jadi, $k - t = 0$ atau $k = t$

ii. Akan dibuktikan $a^k = a^t \Rightarrow k = t$ maka G grup tak berhingga

$a^k = a^t \Rightarrow k = t$, ini berarti perpangkatan dari a semuanya berlainan.

Jadi G grup tak berhingga.

14.10 Penyelesaian Latihan Soal Bab 10

1. G suatu grup dan S merupakan subgrup dari G , dan $a, b \in G$.

i. $a \in Sb$ maka $Sa = Sb$

$$a \in Sb$$

$$ab^{-1} \in Sb \ b^{-1}$$

$$ab^{-1} \in Si$$

$$ab^{-1} \in S$$

Menurut teorema 10.2

$$Sab^{-1} = S$$

$$Sab^{-1}b = Sb$$

$$Sa = Sb$$

ii. $Sa = Sb$ maka $a \in Sb$

$$Sa = Sb$$

$$Sab^{-1} = Sbb^{-1}$$

$$Sab^{-1} = Si$$

$$Sab^{-1} = S$$

Menurut teorema 10.2

$$ab^{-1} \in S$$

$$ab^{-1}b \in Sb$$

$$ai \in Sb$$

$$a \in Sb$$

Dari (i) dan (ii) sehingga diperoleh $a \in Sb$ jika dan hanya jika $Sa = Sb$.

2. Untuk menunjukkan bahwa relasi kongruensi modulo H merupakan relasi ekuivalensi harus ditunjukkan bahwa relasi tersebut bersifat refleksif, simetris, dan transitif.

Untuk setiap a maka $a \equiv a \pmod{H}$, sebab $a * a^{-1} \equiv i \in H$

$a \equiv b(\text{mod } H)$, ini berarti $a * b^{-1} \in H$.

Karena H suatu subgrup maka $(a * b^{-1}) \in H$

Sehingga $(b^{-1})^{-1} * a^{-1} \in H$ atau $b * a^{-1} \in H$

Jadi $b \equiv a(\text{mod } H)$

Hal ini menunjukkan bahwa jika $a \equiv b(\text{mod } H)$ maka $b \equiv a(\text{mod } H)$

$a \equiv b(\text{mod } H)$ berarti $a * b^{-1} \in H$

$b \equiv c(\text{mod } H)$ berarti $b * c^{-1} \in H$

Jika $(a * b^{-1}) \in H$ dan $(b * c^{-1}) \in H$ maka $(a * b^{-1}) * (b * c^{-1}) \in H$

$$(a * b^{-1}) * (b * c^{-1}) = a * (b^{-1} * b) * c$$

$$= a * i * c^{-1}$$

$$= a * c^{-1}$$

Jadi $a * c^{-1} \in H$ berarti $a \equiv c(\text{mod } H)$

Hal ini menunjukkan bahwa jika $a \equiv b(\text{mod } H)$ dan $b \equiv c(\text{mod } H)$ maka $a \equiv c(\text{mod } H)$.

3. Ambil $h_1, h_2 \in H$.

Karena H suatu subgrup maka $(h_1 * h_2) \in H$

Misalkan $h_1 * h_2 = h$

Ambil $(a * h_1 * a^{-1}) \in H$ dan $(a * h_2 * a^{-1}) \in H$ maka $(a * h_1 * a^{-1}) * (a * h_2 * a^{-1}) \in H$, sehingga

$$(a * h_1 * a^{-1}) * (a * h_2 * a^{-1}) = (a * h_1) * (a^{-1} * a) * (h_2 * a^{-1})$$

$$= (a * h_1) * i * (h_2 * a^{-1})$$

$$= (a * h_1) * (h_2 * a^{-1})$$

$$= a * (h_1 * h_2) * a^{-1}$$

$$= a * h * a^{-1}$$

Ini berarti $(a * h * a^{-1}) \in aHa^{-1}$, sehingga sifat tertutup dalam aHa^{-1} dipenuhi.

Misalkan $h \in H$ maka $h^{-1} \in H$ dan $a * h * a^{-1} \in aHa^{-1}$

$$\begin{aligned}(a * h * a^{-1})^{-1} &= a^{-1} * h^{-1} * (a^{-1})^{-1} \\ &= a^{-1} * h^{-1} * a\end{aligned}$$

Sehingga $(a * h * a^{-1})^{-1} \in aHa^{-1}$, sehingga setiap elemen dalam aHa^{-1} mempunyai invers.

Jadi aHa^{-1} merupakan subgrup dari G .

4. $G = \{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10} = i\}$

$$S = \{a^2, a^4, a^6, a^8, a^{10} = i\}$$

Ada dua koset kanan dari S dalam G yaitu $\{a, a^3, a^5, a^7, a^9\}$ dan S sendiri

5. $Si = S$. Jika $a = i$ maka $Sa = Si$ dan $Sa \cap Si = \emptyset$

Karena $i \in Si$ maka $i \in Sa$.

Jadi Sa bukan subgrup dari G , karena tidak memuat elemen identitas i .

14.11 Penyelesaian Latihan Soal Bab 11

1. G/N adalah himpunan semua koset kanan N dalam G , dan harus dibuktikan bahwa G/N terhadap operasi perkalian himpunan merupakan suatu grup.

- Ambil $X, Y \in G/N$ akan ditunjukkan bahwa $XY \in G/N$.

Misalkan $X = Na$ dan $Y = Nb, \forall a, b \in G$

$$XY = Na * Nb$$

$$= NNa * b$$

$$= N(a * b) \quad (\text{Koset kanan } N \text{ dalam } G)$$

Ini berarti $XY \in G/N$, yaitu hasil kali dua koset kanan N dalam G adalah koset kanan N dalam G .

- Ambil $X, Y, Z \in G/N$ akan ditunjukkan bahwa $(XY)Z = X(YZ)$
 Misalkan $X = Na, Y = Nb$, dan $Z = Nc, \forall a, b, c \in G$

$$\begin{aligned}(XY)Z &= (Na * Nb) * Nc \\ &= N(a * b) * Nc \\ &= N((a * b) * c) \\ &= N(a * (b * c)) \\ &= Na * N(b * c) \\ &= Na * (Nb * Nc) \\ &= X(YZ)\end{aligned}$$

Ini berarti sifat asosiatif perkalian dalam G/N dipenuhi.

- $u \in G$ maka $Nu = N \in G/N$.
 Ambil $X \in G/N$ dan $X = Na$ untuk $a \in G$
 $XN = Na * Nu = N(a * u) = Na = X$
 $NX = Nu * Na = N(u * a) = Na = X$
 Ini berarti N adalah elemen identitas terhadap perkalian dalam G/N .
- Ambil $X \in G/N$ dan $X = Na$, untuk $a \in G$ terdapat $a^{-1} \in G$ maka $Na^{-1} \in G/N$.
 $Na * Na^{-1} = N(a * a^{-1}) = Nu = N$
 $Na^{-1} * Na = N(a^{-1} * a) = Nu = N$
 Karena N adalah elemen identitas dalam G/N dan Na^{-1} merupakan invers dari Na .
 $X = Na$ adalah sebarang elemen dalam G/N maka setiap elemen dalam G/N mempunyai invers dalam G/N pula.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa G/N terhadap perkalian himpunan merupakan suatu grup.

2. $I_G(N) = 2$ berarti banyaknya koset kanan N dalam G ada 2, misalkan N dan Na dengan $a \in G$.

Jika kita mempertimbangkan koset kirinya $I_G(N) = 2$ berarti banyak koset kiri dalam N ada 2 pula, misalnya N dan bN dengan $b \in G$.

Maka $Na = bN$, untuk $a, b \in G$.

$a \in Na$ dan $Na = bN$ maka $a \in bN$ sehingga $a \in aN$ (i)

$b \in bN$ dan $Na = bN$ maka $b \in Na$ sehingga $b \in Nb$ (ii)

Dari (i) dan (ii) sehingga diperoleh $Na = aN$.

Jadi N adalah subgrup normal dari G .

3. Ambil $a \in N \cap H$ maka $a \in N$ dan $a \in H$.

Ambil $g \in G$ dan $a \in N$, karena N subgrup normal dari

G maka $(g * a * g^{-1}) \in N$ (i)

Ambil $g \in G$ dan $a \in H$, karena H subgrup normal dari

G maka $(g * a * g^{-1}) \in H$ (ii)

Dari (i) dan (ii) sehingga diperoleh bahwa $(g * a * g^{-1}) \in (N \cap H)$, untuk $a \in N \cap H$.

Jadi $N \cap H$ merupakan subgrup normal dari G .

4. Pertama harus menunjukkan bahwa N suatu subgrup dari G .

Ambil dua elemen sebaran dalam N , misalnya

$\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dengan $p, q \in \text{bilangan real}$.

$\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & p+q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, karena $p \in \text{bilangan real}$

dan $q \in \text{bilangan real}$ maka $p+q \in \text{bilangan real}$

sehingga $\begin{pmatrix} 1 & p+q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N$.

(belum lengkap)

5. Untuk menentukan subgrup normal dan grup factor G/N dari $G = \{i, a, b, c, d, e, f, g\}$ dapat ditentukan dengan melihat tabel berikut.

"o"	<i>i</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
<i>i</i>	<i>i</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>i</i>	<i>g</i>	<i>f</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>i</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>d</i>	<i>g</i>	<i>f</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>i</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>e</i>	<i>d</i>
<i>d</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>e</i>	<i>g</i>	<i>i</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>c</i>
<i>e</i>	<i>e</i>	<i>g</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>b</i>	<i>i</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
<i>f</i>	<i>f</i>	<i>e</i>	<i>g</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>i</i>	<i>b</i>
<i>g</i>	<i>g</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>i</i>

Subgrup dari G adalah $\{i, a, b, c\}$, $\{i, d\}$, $\{i, e\}$, $\{i, f\}$, dan $\{i, g\}$.

Ambil subgrup $S = \{i, a, b, c\}$

Menurut teorema, jika $x \in S$ maka $xS = Sx = S$ sehingga

$$iS = Si \qquad aS = Sa$$

$$bS = Sb \qquad cS = Sc$$

Ambil $y \in G$ dan $y \notin S$

$$dS = \{di, da, db, dc\} = \{d, f, e, g\}$$

$$eS = \{ei, ea, eb, ec\} = \{e, g, d, f\}$$

$$fS = \{fi, fa, fb, fc\} = \{f, e, g, d\}$$

$$gS = \{gi, ga, gb, gc\} = \{g, d, f, e\}$$

$$dS = \{id, ad, bd, cd\} = \{d, f, e, g\}$$

$$Se = \{ie, ae, be, ce\} = \{e, f, d, g\}$$

$$Sf = \{if, af, bf, cf\} = \{f, d, g, e\}$$

$$Sg = \{ig, ag, bg, cg\} = \{g, e, f, d\}$$

Jadi

- $S = \{i, a, b, c\}$ merupakan subgrup normal dari G dan dinyatakan dengan N .
- Grup factor $G/N = [\{i, a, b, c\}, \{d, e, f, g\}]$

Catatan:

- $G = \{i, a, b, c, d, e, f, g\}$ di atas disebut grup permutasi oktik.
- G sesuai dengan $\{I, R, R^2, R^3, X, Y, M_1, M_2\}$, yaitu himpunan transformasi dari persegi dan $(G, *)$ sesuai dengan grup simetri dari persegi ABCD.

14.12 Penyelesaian Latihan Soal Bab 12

- $f: G \rightarrow G/N$ didefinisikan oleh $f(x) = Nx$, untuk $x \in G$

Ambil $x, y \in G$ maka $f(x) = Nx$ dan $f(y) = Ny$.

$$f(xy) = Nxy$$

$$= NNxy \quad (\text{Karena } N \text{ subgrup normal dari } G)$$

$$= Nx Ny \quad (\text{Sifat komutatif})$$

$$= f(x) f(y)$$

Jadi f suatu homomorfisme.

Ambil $T \in G/N$ dan misalkan $T = Nt$, untuk $t \in G$ maka $T = Nt = f(t)$.

Ini berarti bahwa setiap elemen dari G/N merupakan peta elemen dari G oleh homomorfisme f .

Jadi f suatu homomorfisme dari G onto G/N .

2. Misalkan $f: (G, o) \rightarrow (G', *)$ suatu homomorfisme dan H adalah himpunan semua peta elemendari G dalam G' oleh homomorfisme f atau $H = \{x \in G' \mid x = f(a), \forall a \in G\}$ maka $H \subset G'$.

Untuk membuktikan bahwa H subgrup dari G' , ditunjukkan bahwa $(H, *)$ suatu grup.

H bukan himpunan kosong, sebab untuk $i \in G$ maka $f(i) = i' \in H$.

- a. Ambil $x, y \in H$ maka $a, b \in G$ sedemikian sehingga $f(a) = x$ dan $f(b) = y$.
 $(a o b) \in G$ maka $f(a o b) \in H$
 f suatu homomorfisme maka
 $f(a o b) = f(a) * f(b)$
 $= x * y$

Karena $f(a o b) \in H$ maka $(x * y) \in H$.

Ini berarti H tertutup terhadap operasi “*” atau operasi “*” merupakan operasi biner dalam H .

- b. G' suatu grup sehingga operasi “*” dalam G' bersifat asosiatif. Karena $H \subset G'$ maka operasi “*” dalam H bersifat asosiatif pula.
- c. Ambil $x \in H$ maka ada $a \in G$ sehingga $f(a) = x$, karena f suatu homomorfisme maka
 $f(a o i) = f(a) * f(i)$ dan $f(i o a) = f(i) * f(a)$
 $f(a)$
 $f(a) = f(a) * i'$ $f(a) = i' * f(a)$
 $x = x * i'$ $x = i' * x$
 Jadi $x * i' = i' * x = x$, untuk setiap $x \in H$. Ini berarti elemen identitas dalam H adalah i' , yaitu elemen identitas dalam G' .

- d. Menurut teorema 12.1, jika $a \in G$ maka $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$

Karena f adalah homomorfisme maka untuk $a \in G$ berlaku

$$f(a \circ a^{-1}) = f(a) * f(a^{-1})$$

$$f(i) = f(a) * f(a)^{-1}$$

$$i' = f(a) * f(a)^{-1}$$

dan

$$f(a^{-1} \circ a) = f(a^{-1}) * f(a)$$

$$f(i) = f(a)^{-1} * f(a)$$

$$i' = f(a)^{-1} * f(a)$$

$$\text{Jadi } f(a) * f(a)^{-1} = f(a)^{-1} * f(a) = i'$$

Ini berarti $f(a)^{-1}$ adalah invers dari $f(a)$ dalam H .

Dari (a), (b), (c), dan (d) disimpulkan bahwa H suatu grup.

Karena $H \subset G'$ dan G' suatu grup maka H subgrup dari G' .

3. Misalkan f adalah pemetaan dari G ke G' dengan $f(x) = 2^x, \forall x \in G$.

Ambil $a, b \in G$ maka $f(a) = 2^a$ dan $f(b) = 2^b$

$$f(a + b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = f(a) \cdot f(b)$$

Jadi f suatu homomorfisme.

4. Ikutilah petunjuk (langkah-langkah) berikut ini.

a. Tunjukkan bahwa H bukan himpunan kosong, gunakan $i \in G$.

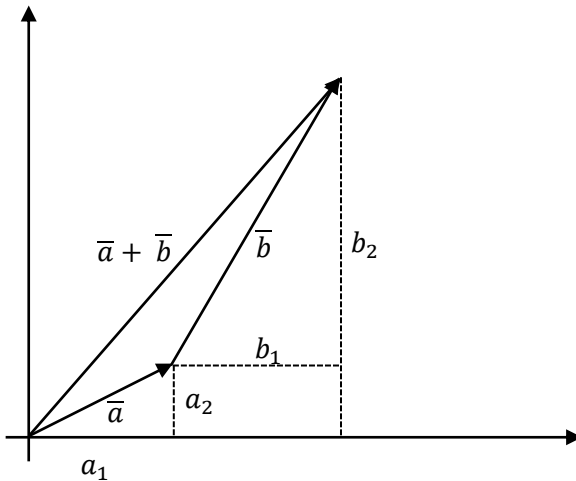
b. Tunjukkan bahwa untuk setiap elemen H mempunyai invers dalam H . Perhatikan bahwa $f(a^{-1}) = f(a)^{-1} = (i)^{-1} = i', \forall a \in H$.

- c. Tunjukkan sifat tertutup H terhadap operasi " $\circ$ " dengan homomorfisme f .

Dari (a), (b), (c) dapat disimpulkan bahwa H adalah subgrup dari G .

- d. Tunjukkan H subgrup normal dari G dengan mengambil sebarang $a \in H$ dan $g \in H$ sehingga $g \circ a \circ g^{-1} \in H$.

5. $G = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots\}$ dan $G' = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots\}$



Penjumlahan pasangan berurutan $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

Pemetaan $f: G \rightarrow G'$

$$f(\bar{a}) = (a_1, a_2)$$

$$f(\bar{b}) = (b_1, b_2)$$

$$\begin{aligned}
 f(\bar{a} + \bar{b}) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\
 &= (a_1, a_2) + (b_1, b_2) \\
 &= f(\bar{a}) + f(\bar{b})
 \end{aligned}$$

Jadi $f: G \rightarrow G'$ merupakan homomorfisme

14.13 Penyelesaian Latihan Soal Bab 13

1. $G = \{\dots, a^{-2}, a^{-1}, a^0 = i, a, a^2, \dots\}$ suatu grup siklik
 $B = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ suatu grup bilangan bulat dengan operasi penjumlahan.
 Dibentuk pemetaan $f: B \rightarrow G$ yang didefinisikan oleh $f(x) = a^x, \forall x \in G$
 Tunjukan bahwa f suatu homomorfisme satu-satu dan onto, berarti f suatu isomorfisme.
2. $G = \{a, a^2, a^3, \dots, a^n = i\}$
 a generator berorder $n > 0$ dari G .
 Dengan demikian ada n buah perpangkatan yang berlainan dalam G .
 $G' = \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$ dan n buah bilangan modular atau kelas yang berlainan.
 Bilangan modulo x disingkat $\bar{x}$ atau K_x
 G' dapat ditulis $G' = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$
 Buatlah pemetaan $f: G \rightarrow G'$ dengan $f(a^x) = \bar{x}$
 $\forall a^x \in G, f(a^x) = \bar{x}$
 $\forall a^y \in G, f(a^y) = \bar{y}$

Sehingga

$$\begin{aligned} f(a^x \cdot a^y) &= f(a^{x+y}) \\ &= \overline{x+y} \\ &= \overline{x} + \overline{y} \\ &= f(a^x) + f(a^y) \end{aligned}$$

Pemetaan satu lawan satu f adalah isomorfisme. Jadi G dan G' isomorfik.

3. $G = \{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7 = i\}$ suatu grup siklik.
 $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 0\}$ suatu grup bilangan bulat modulo 7 dengan operasi penjumlahan modulo 7.
 Buatlah tabel operasi tiap grup dan selanjutnya dibentuk pemetaan $f: B \rightarrow G$ yang didefinisikan oleh $f(x) = a^x$, untuk $0 \leq x < 7$ dan $x \in B$.
 Tunjukkanlah bahwa f suatu homomorfisme.
 Selanjutnya ditunjukkan bahwa pemetaan f satu-satu dan onto sehingga f suatu isomorfisme.

4. $G = \{1, i, -1, -i\}$ dengan elemen identitas 1.
 $G' = \{I, R, R^2, R^3\}$ dengan elemen identitas I .
 Dalam $(G, \times)$, -1 invers dengan dirinya sendiri.
 i dan $-i$ saling invers.
 Dalam (G', o) , R^2 invers dengan dirinya sendiri.
 R dan R^3 saling invers
 Jadi isomorfisme antara G dan G' adalah $f: G \rightarrow G'$, dengan
 - a. $f(1) = I$
 $f(i) = R$
 $f(-1) = R^2$
 $f(-i) = R^3$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } f(1) &= I \\
 f(i) &= R^3 \\
 f(-1) &= R^2 \\
 f(-i) &= R
 \end{aligned}$$

5. Pemetaan $f: G \rightarrow G'$ dengan $f(n) = 2n, \forall n \in G$

$$\forall x \in G, f(x) = 2x$$

$$\forall y \in G, f(y) = 2y$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
 f(x + y) &= 2(x + y) \\
 &= 2x + 2y \\
 &= f(x) + f(y)
 \end{aligned}$$

Jadi pemetaan $f: G \rightarrow G'$ dengan $f(n) = 2n$ adalah isomorfisme.

Daftar Pustaka

- [1] Andreescu, T & Feng, Z. (2001). 101 Problems in Algebra. Canberra: AMT Publishing.
- [2] Arifin, Achmad. (2000). Aljabar. Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- [3] Beachy, John A. (2000). Abstract Algebra: A Study Guide For Beginners. Illinois: Northern Illinois University.
- [4] Fraleigh, J. B & Katz, Victor J. (2003). A First Course in Abstract Algebra Seventh Edition.
- [5] Gilbert, Linda & Gilbert, Jimmie. (2009). Element of Modern Algebra. Canada: Brooks/Cole Cengage Learning.
- [6] Goodman, Frederick M. (2015). Algebra Abstract and Concrete Edition 2.6. Iowa City: Semisimple Press.
- [7] Judson, Thomas W. (2014). Abstract Algebra Theory and Applications. <http://abstract.pugetsound.edu>.
- [8] [8Maddox, Randall B. (2009). A Transition to Abstract Mathematics Learning Mathematical Thinking and Writing Second Edition. Academic Press.
- [9] Pinter, Charles C. (2010). A Book of Abstract Algebra Second Eidtion. New York: Dover Publications.
- [10] Rootman, Joseph J. (2003). Advanced Modern Algebra. Prentice Hall.
- [11] Siksesk, Samir. (2015). Introduction to Abstract Algebra. Coventry: University of Warwick.

- [12] Subiono. (2016). Aljabar: Sebagai Suatu Pondasi Matematika. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- [13] Whitesitt, J. Eldon. (1973). Principles of Modern Algebra Second Edition. Addison Wesley Publishing Company.

Biografi Penulis

Petrus Fendiyanto, seorang Dosen Muda yang lahir di Penajam Paser Utara, 20 Januari 1989. Penulis adalah staf Dosen di Program Studi Pendidikan Matematika, FKIP Universitas Mulawarman. Penulis mengampu matakuliah Aljabar Linear dan Matriks, Kalkulus, Struktur Aljabar, Program Linier, dan Komputer 1. Penulis menyelesaikan program Sarjana di Pendidikan Matematika FKIP Universitas Mulawarman pada tahun 2010 dan menyelesaikan program Magister Matematika di Institut Teknologi Sepuluh Nopember pada tahun 2016.