ISSN: 2459-962X

PROSIDING

Vol. 2/ No. 1/ 2016

SENDIKA

SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA & PENDIDIKAN MATEMATIKA

"Internalisasi Nilai-nilai Berfikir Matematis Dalam Perannya di Era Masyarakat Ekonomi ASEAN (MEA)"

Purworejo, 28 Mei 2016

Penyelenggara:
Program Studi Pendidikan Matematika FKIP UMP

Program Studi Pendidikan Matematika
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Muhammadiyah Purworejo

ISSN: 2459-962X

DEWAN REDAKSI

Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika
(SENDIKA 2016)
Sekretariat: Program Studi Pendidikan Matematika
Universitas Muhammadiyah Purworejo
Jalan KH. Ahmad Dahlan No. 3 Purworejo 54111
Email : matematika@umpwr.ac.id
Website : http://pmat.umpwr.ac.id

ISSN: 2459-962X

TIM PROSIDING

Editor

Mita Hapsari Jannah, S.Si., M.Pd., Heru Kurniawan, M.Pd.,
Dita Yuzianah, M.Pd., Prasetyo Budi Darmono, M.Pd.
Adhatul Fauziah, S.Pd.

Tim Teknis

Arohman Taufik, Ngarifin, Sri Setyawati
Hanik Luluk Anifah, Arifuddin

Layout & Cover

Teguh Sugiharto, Risqi Saputra
Risqi Amanah

ISSN: 2459-962X

DAFTAR ISI

PENAKSIRAN PARAMETER MODEL REGRESI WEIBULL BIVARIAT

Suyitno[1], Purhadi[2], Sutikno[2] dan Irhamah[2]
[1] Mahasiswa Program Doktor Jurusan Statistika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya
suyitno.stat.unmul@gmail.com
[2] Jurusan Statistika FMIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Abstrak

Pada artikel ini dibahas penaksiran parameter model regresi Weibull bivariat (RWB). Model RWB adalah model fungsi kepadatan peluang bersama distribusi Weibull bivariat yang bergantung pada kovariat. Model RWB yang dibahas dikontruksi dari model fungsi survival bersama distribusi Weibull bivariat yang dikembangkan oleh Lee dan Wen dengan parameter-parameter skala dinyatakan dalam model regresi dengan kovariat identik dan dengan parameter regresi berbeda. Tujuan penelitian ini adalah menentukan penaksir parameter model RWB menggunakan metode maximum likelihood estimation (MLE). Hasil penelitian menunjukkan bahwa bentuk eksplisit penaksir maximum likelihood (ML) tidak dapat ditemukan secara analitik dan hampiran penaksir ML model RWB diperoleh secara numerik menggunakan metode iterasi Newton-Rapson. Untuk mengevaluasi performa metode MLE, pada artikel ini dibahas prosedur penaksiran parameter model RWB yang diterapkan pada data indikator pencemaran air sungai.

Kata Kunci: Regresi Weibull bivariat, MLE, metode iterasi Newton-Raphson.

1. PENDAHULUAN

Model distribusi Weibull mula-mula bergantung pada tiga parameter yaitu, parameter lokasi (location), parameter skala (scale) dan parameter bentuk (shape). Jika parameter lokasi pada distribusi Weibull adalah nol, maka diperoleh model distribusi versi skala-bentuk atau scale-shape version of Weibull distribution. Pada distribusi Weibull, parameter skala atau parameter bentuk dapat bergantung langsung pada kovariat atau peubah bebas (Rinne, 2009), (Lawless, 2003). Parameter skala pada distribusi Weibull dapat dinyatakan dalam model regresi. Model fungsi kepadatan peluang (PDF) pada distribusi Weibull yang parameter skala bergantung langsung pada kovariat dinamakan model regresi Weibull. PDF pada distribusi Weibull dapat diperoleh dari salah satu fungsi-fungsi yang saling berhubungan pada distribusi Weibull yaitu fungsi distribusi kumulatif, fungsi survival dan fungsi hazard.

Sampai saat ini, referensi yang membahas model regresi Weibull masih terbatas. Para penelti yang membahas model regresi Weibull antara lain: O'Quigley et. al, (1980), membahas model regresi Weibull univariat pada data waktu survival. Penaksiran parameter dihitung menggunakan program Fortrant. Hanagal (2004), membahas model regresi Weibull bivariat pada data waktu survival. Model regresi Weibull bivariat ini adalah pengembangan dari model distribusi exsponensial Freund, dengan kovariat identik dan dengan parameter regresi berbeda. Hanagal (2005), membahas model regresi Weibull bivariat pada data waktu tersensor. Model regresi ini diturunkan dari model distribusi eksponensial Marshal-Olkin dengan kovariat identik. Penaksiran parameter kedua model yang dibahas Hanagal (204, 2005) menggunakan metode maximum likelihood estimation (MLE).

Mengingat pembahasan model regresi Weibull bivariat masih terbatas, maka pada artikel ini dibahas model RWB yang dikontruksi dari model fungsi survival bersama distribusi Weibull bivariat yang dikemukakan oleh Lee dan Wen (2009).

Model regresi Weibull bivariat yang dibahas merupakan model FKP distribusi Weibull bivariat dengan parameter-parameter skala dinyatakan dalam model regresi dengan kovariat identik dan dengan parameter regresi berbeda. Pembahasan difokuskan pada pengenalan model dan prosedur penaksiran parameter. Untuk mendemontrasikan prosedur penaksiran parameter, model RWB ini diaplikasikan pada data indikator pencemaran air yaitu chemical oxygen demand (COD) and disollved oxygen (DO).

Pada bagian akhir seksi ini dikemukan sistematika penulisan sebagai berikut. Kajian teori model RWB disajikan pada bagian 2, metode penelitian pada bagian 3, hasil dan pembahasan dari penelitian dibahas pada bagian 4 dan kesimpulan dari penelitian disajikan pada bagian 5.

2. KAJIAN LITERATUR

Hubungan fungsi-fungsi yang saling berkorelasi pada distribusi Weibull bivariat dijelaskan sebagai berikut. Misalkan $[Y_1\ Y_2]^T$ adalah vektor acak non-negatif, maka fungsi survival bersama didefinisikan

$$\begin{aligned} S(y_1,y_2) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{2}(Y_k > y_k)\right), \\ &= P(Y_1 > y_1, Y_2 > y_2) \end{aligned} \qquad (1)$$

dan fungsi distribusi kumulatif bersama didefinisikan

$$\begin{aligned} F(y_1,y_2) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{2}(Y_k \le y_k)\right) \\ &= P(Y_1 \le y_1, Y_2 \le y_2) \end{aligned} \qquad (2)$$

(Lawless, 2003).

Berdasarkan sifat probabilitas, hubungan antara fungsi distribusi bersama dan fungsi survival bersama dapat dinyatakan

$$\begin{aligned} F(y_1,y_2) &= 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{2}(Y_k > y_k)\right). \\ &= 1 - S(y_1) - S(y_2) + S(y_1,y_2) \end{aligned}$$
(3)

Jika fungsi-fungsi pada persamaan (3) adalah kontinu, maka dengan melakukan penurunan parsial terhadap semua peubah bebas pada kedua ruas persamaan (3) diperoleh hubungan

$$\begin{aligned} f(y_1,y_2) &= \frac{\partial^2 F(y_1,y_2)}{\partial y_1 \partial y_2}. \\ &= \frac{\partial^2 S(y_1,y_2)}{\partial y_1 \partial y_2} \end{aligned} \qquad (4)$$

Lee dan Wen (2009), mengkontruksi fungsi survival bersama distribusi Weibull bivariat dinyatakan dalam bentuk

$$S_1(y_1,y_2) = \exp\left(-\left[\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{y_k}{\lambda_k}\right)^{\frac{\gamma_k}{a}}\right]^a\right), \qquad (5)$$

dengan $0 < y_1, y_2 <$; $0 < \lambda_1, \lambda_2 <$; $0 < \gamma_1, \gamma_2 <$ dan $0 < a \le 1$. Parameter a menyatakan ukuran derajat dependent pada hubungan antar peubah bebas Y_k, λ_k dan γ_k untuk $k = 1,2$ masing-masing adalah parameter skala dan parameter bentuk. Berdasarkan fungsi survival (5), dengan menggunakan hubungan (4) diperoleh FKP bersama distribusi Weibull bivariat yaitu

$$\begin{aligned} &f_0(y_1, y_2, y_3) = \\ &\left(\prod_{k=1}^{2}\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{\gamma_k}{\lambda_k}\right)\left(\frac{y_k}{\lambda_k}\right)^{\frac{\gamma_k}{a}-1}\right) x \\ &QA^{a-2}\exp[-A^a], \end{aligned} \qquad (6)$$

dengan

$$A = \sum_{k=1}^{2}\left(\frac{y_k}{\lambda_k}\right)^{\frac{\gamma_k}{a}} \text{ dan } Q = -a(a-1) + a^2A^a .$$

Fungsi survival (5) dapat bergantung pada kovariat (Lawless, 2003), yakni parameter-parameter skala dapat dinyatakan dalam model regresi. Karena parameter-parameter skala pada (5) adalah bilangan riil positip, maka parameter-parameter skala tersebut dapat dinyakan dalam model regresi melalui hubungan

$$\ln \lambda_k = \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}, \qquad (7)$$

dengan

$\boldsymbol{\beta}_k^T = [\beta_{k0}\ \beta_{k1} \cdots \beta_{kp}]$ adalah vektor parameter regresi dengan $- \quad < \beta_{kh} < \quad$ untuk $k = 1, 2$; $h = 0, 1, \cdots, p$ dan $\mathbf{x}^T = [X_0\ X_1 \cdots X_p]$ adalah vektor kovariat.

Dengan menggunakan hubungan (7), fungsi survival (5) dapat dinyatakan dalam model regresi linier yaitu

$$S(y_1, y_2, y_3) = \exp[-A^a], \qquad (8)$$

dengan $A = \sum_{k=1}^{2} (y_k)^{\gamma_k / a} \exp[-\frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}]$.

Berdasarkan fungsi survival (5), dapat diperoleh model FKP bersama distribusi Weibull bivariat yang bergantung pada kovariat dengan menggunakan hubungan (4), yaitu

$$f(y_1, y_2) = \left(\prod_{k=1}^{2} \frac{\gamma_k}{a} y_k^{(\gamma_k / a) - 1} \exp[-\frac{\gamma_k}{a} \boldsymbol{\beta}_k^T \mathbf{x}] \right) \times QA^{a-2} \exp[-A^a], \qquad (9)$$

dengan $Q = -a(a-1) + a^2 A^a$. Model FKP bersama distribusi Weibull bivariat yang parameter-parameter skala dinyatakan dalam model regresi linier seperti pada persamaan (9) dinamakan model regresi Weibull bivariat (RWB). Untuk selanjutnya penaksiran parameter RWB menggunakan metode MLE.

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini difokuskan pada kajian teori yaitu penaksiran parameter model RWB yang disertai contoh aplikasinya pada data indikator pencemaran air. Data penelitian adalah data sekunder dari Badan Lingkungan Hidup Kota Surabaya tahun 2013 dan Khaulasari (2014). Sampel penelitian adalah sungai-sungai di kota Surabaya yang mengalir pada satu aliran, dengan ukuran sampel 27. Peubah tak bebas (respon) penelitian ini adalah COD (Y_1) dan DO (Y_2). Peubah bebas (kovariat) adalah kecepatan aliran air (X_1), konsentrasi deterjen (X_2), konsentrasi nitrat (X_3) dan konsentrasi fosfat (X_4). Tahapan analisis data pada peneltian ini adalah sebagai berikut: (1) analisis statistik deskriptif data respon dan kovariat, (2) pengujian korelasi antar respon, (3) pendeteksian multikolinieritas antar kovariat, (4) penaksiran parameter distribusi populasi, (5) pengujian distribusi Weibull bivariat terhadap data respon, (6) penaksiran parameter model RWB dan (7) pengujian hipotesis parameter regresi model RWB. Pada artikel ini hanya dibahas tahapan (6) yaitu penaksiran parameter model RWB menggunakan metode MLE, sedangkan tahapan (1) sampai dengan (5) dianggap memenuhi asumsi pada penaksiran model RWB. Penghitungan pada penaksiran parameter menggunakan program Matlab.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Tahap awal penaksiran parameter menggunakan metode MLE adalah pendefinisian fungsi likelihood dan logaritma natural dari fungsi likelihood atau log-likelihood. Diberikan n sampel acak (Y_{1i}, Y_{2i}) dari populasi distribusi Weibull bivariat dan $(X_{1i}, X_{2i}, \cdots, X_{pi})$ untuk $i = 1, 2, \cdots, n$ adalah sampel untuk kovariat, maka fungsi likelihood berdasarkan FKP (9) adalah

$$\mathscr{L}(\theta \mid y) = \prod_{i=1}^{n} f(\theta \mid y_{1i}, y_{2i}) =$$
$$\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{k=1}^{2}\frac{\gamma_k}{a}(y_{ki})^{(\gamma_k/a)-1}\exp[-\frac{\gamma_k}{a}\beta_k^T x_i]\right)\right)\times \quad (10)$$
$$\left(\prod_{i=1}^{n} A_i^{a-2}\exp[-A_i^a]\right)\times\left(\prod_{i=1}^{n} Q_i\right),$$

dengan

$$A_i = \sum_{k=1}^{2}(y_{ki})^{\gamma_k/a}\exp[-\frac{\gamma_k}{a}\beta_k^T x_i].$$

$$Q_i = -a(a-1) + a^2 A_i^a \quad \text{dan}$$
$$x_i = [X_{1i}\ X_{2i} \cdots X_{pi}]^T.$$

Diketahui bahwa $\theta = [a\ \gamma^T\ \beta_1^T\ \beta_2^T]^T$ adalah vektor parameter model RWB yang berdimensi $3+2(p+1)$ dengan $\gamma = [\gamma_1\ \gamma_2]^T$ dan $\beta_k = [\beta_{k0}\ \beta_{k1} \cdots \beta_{kp}]^T$ untuk $k = 1,2$. Logaritma natural dari fungsi likelihood (10) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$L(\theta \mid y) = \ln \mathscr{L}(\theta) \mid y) = \sum_{q=1}^{4} L_q(\theta \mid y), \quad (11)$$

dengan

$$L_1(\theta \mid y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{2}(\ln \gamma_k - \ln a) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{2}(\frac{\gamma_k}{a}-1)\ln y_{ki} - \frac{\gamma_k}{a}\beta_k^T x_i \quad (12)$$

$$L_2(\theta \mid y) = \sum_{i=1}^{n}(a-2)\ln A_i \quad (13)$$

$$L_3(\theta \mid y) = -\sum_{i=1}^{n} A_i^a \quad (14)$$

$$L_4(\theta \mid y) = \sum_{i=1}^{n}\ln Q_i. \quad (15)$$

Penaksir maximum likelihood (ML) model RWB dapat diperoleh dengan memaksimumkan fungsi likelihood atau dengan ekuivalen memaksimumkan fungsi log-likelihood. Karena fungsi log-likelihood (11) adalah kontinu dan mempunyai turunan parsial sampai dengan orde kedua, maka penaksir ML model RWB dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan likelihood

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = \mathbf{0}, \quad (16)$$

dengan $\mathbf{0}$ adalah vektor nol berdimensi $3+2(p+1)$. Ruas kanan persamaan (16) adalah vektor gradien yang mempunyai bentuk umum $\partial L(\theta)/\partial \theta =$

$$g(\theta) = \left[\frac{\partial L(\theta)}{\partial a}\ \frac{\partial L(\theta)}{\partial \gamma^T}\ \frac{\partial L(\theta)}{\partial \beta_1^T}\ \frac{\partial L(\theta)}{\partial \beta_2^T}\right]^T, \quad (17)$$

dengan

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \gamma^T} = \left[\frac{\partial L(\theta)}{\partial \gamma_1}\ \frac{\partial L(\theta)}{\partial \gamma_2}\right]$$
$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \beta_k^T} = \left[\frac{\partial L(\theta)}{\partial \beta_{k0}}\ \frac{\partial L(\theta)}{\partial \beta_{k1}} \cdots \frac{\partial L(\theta)}{\partial \beta_{kp}}\right], \quad (18)$$

untuk $k = 1,2$.

Berdasarkan bentuk fungsi-fungsi pada persamaan (12) - (15), bahwa persamaan likelihood (16) memuat persamaan-persamaan yang saling bergantungan (interdependent), sehingga bentuk eksplisit (closed form) penaksir ML model RWB tidak ditemukan secara analitikal, dan hampiran penaksir ML dapat diperoleh secara numerik menggunakan metode iterasi Newton-Raphson. Untuk mendapatkan penaksir ML model RWB menggunakan metode iterasi Newton-Rapson dapat menggunakan formula

$$\hat{\theta}^{(q+1)} = \hat{\theta}^{(q)} - H^{-1}(\hat{\theta}^{(q)})g(\hat{\theta}^{(q)}), \quad \text{untuk } q = 0,1,2,\cdots \quad (19)$$

dengan $g(\theta)$ adalah vektor gradien dan $H(\theta)$ adalah matriks Hessian yang berukuran $(3+2(p+1))\times(3+2(p+1))$. Matriks Hessian adalah matrik turunan parsial orde kedua dari dari $L(\theta)$ terhadap semua kombinasi komponen-komponen vektor θ dan mempunyai bentuk umum

$$H(\theta)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial a\partial\gamma^T} & \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial a\partial\beta^T}\\ \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\gamma\partial a} & \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\gamma\partial\gamma^T} & \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\gamma\partial\beta^T}\\ \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\beta\partial a} & \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\beta\partial\gamma^T} & \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial\beta\partial\beta^T}\end{bmatrix} \quad (20)$$

Berdasarkan bentuk persamaan (11) untuk mendapatkan komponen vektor gradien dan matriks Hessian secara langsung tidak sederhana, oleh karena itu penghitungan gradien vektor (17) dan matriks Hessian (20) dipecah menjadi empat bagian sedemikian sehingga

$$g(\theta)=\sum_{q=1}^{4}\frac{\partial L_q(\theta)}{\partial\theta}=\sum_{q=1}^{4}g_q(\theta) \quad (21)$$

dan

$$H(\theta)=\sum_{q=1}^{4}\frac{\partial^2 L_q(\theta)}{\partial\theta\partial\theta^T}=\sum_{q=1}^{4}H_q(\theta). \quad (22)$$

Khusus untuk $g_4(\theta)$ dan $H_4(\theta)$, berdasarkan persamaan (15) maka komponen-komponen vektor $g_4(\theta)$ dapat diperoleh menggunakan formula

$$g_4(\theta)=\frac{\partial L_4(\theta)}{\partial\theta}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{Q_i}\left[\frac{\partial Q_i}{\partial\theta}\right] \quad (23)$$

dan elemen-elemen matriks $H_4(\theta)$ dapat diperoleh menggunakan formula

$$H_4(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{Q_i^2}\left(\left[\frac{\partial^2 Q_i}{\partial\theta\partial\theta^T}\right]Q_i-\left[\frac{\partial Q_i}{\partial\theta}\right]\left[\frac{\partial Q_i}{\partial\theta^T}\right]\right). \quad (24)$$

Berdasarkan prosedur penaksiran parameter model RWB dengan menggunakan metode MLE, dan setelah proses penghitungan komponen-komponen vektor gradien dan elemen-elemen matriks Hessian secara numerik dilakukan menggunakan metode iterasi Newton-Raphson, maka diperoleh komponen-komponen vektor penaksir ML model RWB seperti pada Tabel 1 dan Tabel 2 sebagai berikut:

Tabel 1 Penaksir parameter derajat dependent dan parameter bentuk

Parameter	a	γ_1	γ_2
Penaksir	0,7658	1,3637	2,7786

Tabel 2 Komponen vektor penaksir parameter regresi model RWB

β_1	$\hat{\beta}_1$	β_2	$\hat{\beta}_2$
β_{10}	1,3957	β_{20}	0,2418
β_{11}	0,9582	β_{21}	0,5959
β_{12}	-0,0023	β_{22}	0,0000
β_{13}	0,0417	β_{23}	-0,0838
β_{14}	1,2188	β_{24}	1,2028

Parameter distribusi Weibull bivariat populasi dapat diperoleh dengan melakukan penaksiran berdasarkan data sampel menggunakan metode MLE. Parameter-

parameter distribusi Weibull bivariat populasi adalah sebagai berikut: parameter derajat dependent $a = 0,7022$, parameter bentuk masing-masing $\gamma_1 = 1,1685$ dan $\gamma_2 = 2,3555$ serta parameter skala masing-masing adalah $\lambda_1 = 37,8326$ dan $\lambda_2 = 4,5723$. Berdasarkan penaksiran parameter model RWB seperti ditunjukkan pada Tabel 1 dan Tabel 2 menghasilkan mean square error (MSE) sebesar $1,1036 \times 10^{-5}$.

5. KESIMPULAN

Model regesi Weibull bivariat adalah model fungsi kepadatan peluang bersama distribusi Weibull bivariat dengan parameter-parameter skala dinyatakan dalam model regresi. Model regresi Weibull bivariat dapat ditentukan dari model fungsi survival bersama distribusi Weibull bivariat. Hasil penelitian menunjukkan bahwa bentuk eksplisit penaksir maximum likelihood model regresi Weibull bivariat tidak dapat ditemukan secara analitikal dan hampiran penaksir *maximum likelihood* model regresi Weibull bivariat diperoleh secara numerik menggunakan metode iterasi Newton-Raphson.

6. REFERENSI

Hanagal, D.D., 2004. Parametric bivariate regression analysis based on censored samples: A Weibull model. Economic Quality Control, 19: No.1, 1-8.

Hanagal, D.D., 2005. A Bivariate Weibull Regression Model. Economic Quality Control, 20: No. 1, 1-8.

Khaulesari, H., 2014. Pemodelan Mixed Geographically Weighted Regression Multivariate Pada Pencemaran Kualitas Air Chemical Oxygen Demand (COD) dan Biological Oxygen Demand (BOD) di Kali Surabaya. Thesis SS 091324, Istitut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya 2014.

Lawless, J.F., 2003. Statistical models and methods for lifetime data. John Wiley & Sons.Inc., Hoboken, New Jersey. 269-271.

Lee, C.K. & M.J., Wen, 2009. A Multivariate Weibull distribution. Pak. J. Stat. Operat. Res., 5, No. 2, 55-66.

O'Quigley, J., & Roberts, A. 1980. WEIBULL: A Regression Model for Survival Time Studies, Computer Programs in Biomedicine, 12, 14-18.

Rinne, H., 2009. The Weibull distribution a handbook. CRC Press Taylor and Francis Group. 170-185, 402-411