Sertifikat

Menyatakan bahwa :

Suyitno

sebagai

Pemakalah

di

" Seminar Nasional Pasca Sarjana XIII 2013 - Institut Teknologi Sepuluh Nopember "

Diselenggarakan di Kampus ITS Sukolilo, Surabaya pada tanggal 15 August 2013

Ketua Panitia SNPS XIII

Dr. Suhartono, M.Sc
197109291995121001

PROSIDING

Seminar Nasional Pasca Sarjana XIII

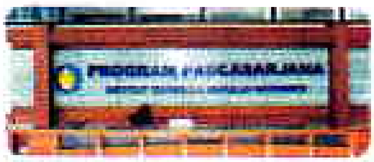
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

JILID I

PENINGKATAN KUALITAS PENELITIAN DAN PENDIDIKAN PASCASARJANA

Sub -Tema

Peranan Statistika Dalam Perkembangan Penelitian Di Indonesia



Surabaya, 15 Agustus 2013

Gedung Program Pascasarjana ITS
Kampus ITS Sukolilo, Surabaya 60111
No. Telp. (+62 31) 5992526, 5947213
Fax. 5947213
Email : ppsits@its.ac.id
Web : snps2013.its.ac.id

ISBN : 978-979-96700-6-9

PROSIDING

JILID 1

SEMINAR NASIONAL PASCA SARJANA XIII 2013

PENINGKATAN KUALITAS PENELITIAN DAN PENDIDIKAN PASCA SARJANA

Sub Tema :

Peranan Statistika dalam Peningkatan Kualitas Penelitian di Indonesia

15 Agustus 2013
Gedung Auditorium Pasca Sarjana ITS Surabaya

Diterbitkan Oleh:
Jurusan Statistika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 60111, Indonesia

ISBN No. 978-979-96700-6-9

DAFTAR ISI

JILID 1

[SS04]

Model Regresi Weibull Trivariat
(*Trivariate Weibull Regression*)

Suyitno[1], Purhadi[2], Sutikno[3], Irhamah[4]
Mahasiswa Program Doktor Statistika ITS Surabaya,
Instansi asal Prodi Statistika Universitas Mulawarman[1]
Jurusan Statistika ITS Surabaya[2,3,4]
Email : suyitno_e@yahoo.com

Abstrak

Model Regresi Weibull Multivariat merupakan model fungsi kepadatan peluang bersama dari distribusi Weibull Multivariat dimana parameter skala merupakan fungsi dari peubah bebas (kovariat). Pada distribusi Weibull terdapat beberapa fungsi yang saling berhubungan yaitu fungsi kepadatan peluang, fungsi distribusi kumulatif, fungsi hazard dan fungsi *survival*. Model distribusi Weibull biasanya memuat satu, dua atau tiga parameter yaitu parameter lokasi (*location*), parameter skala (*scale*) dan parameter bentuk (*shape*). Pada model distribusi Weibull atau distribusi yang lain, biasanya sering ditambahkan satu atau lebih peubah yang lain (*supplementary variable*) untuk menjelaskan atau mempengaruhi peubah acak. Penambahan peubah *supplementary* biasanya dilakukan pada parameter skala. Jika fungsi hazard dipengaruhi langsung oleh peubah bebas maka melahirkan model *hazard rate* Weibull, dan jika fungsi kepadatan peluang distribusi Weibull dipengaruhi langsung oleh peubah bebas atau kovariat maka melahirkan model Regresi Weibull. Secara umum model Regresi Weibull Trivariat (Multivariat) dapat diperoleh melalui diferensiasi parsial terhadap semua peubah dari fungsi survival yang parameter skalanya merupakan fungsi dari kovariat. Mengingat kurangnya pembahasan tentang model regresi Weibull Trivariat, belum tersedianya bentuk penaksir parameter dan statistik uji pada pengujian parameter model, maka sebagai pengembangan model Regresi Weibull Univariat, pada makalah ini dibahas model Regresi Weibull Trivariat. Pembahasan difokuskan pada pengestimasian parameter dan statistik uji pada pengujian parameter model. Pengestimasian parameter menggunakan metode *maximum likelihood estimation* (MLE), dan satistik uji ditentukan menggunakan metode *maximum likelihood ratio test* (MLRT). Pengujian hipotesisis model meliputi pengujian parameter secara serentak dan pengujian parameter secara parsial.

Kata kunci : Model Regresi Weibull Trivariat, MLE, statistik uji, MLRT

1. Pendahuluan

Secara historis penamaan distribusi Weibull diambil dari nama ilmuwan yang pertama kali mendeklarasikan distribusi Weibull ke dunia internasional yaitu seorang ilmuwan dari Swedia yang bernama Ernst Hjalmar Waloddi Weibull (1922-1941). Distribusi Weibull mula-mula digunakan pada aplikasi bidang *engineering* (rekayasa), kemudian berkembang sebagai ilmu pengetahuan murni pada statistika dan teori probabilitas. Seiring dengan perkembangannya, sejak dari setengah abad yang lalu distribusi Weibull menjadi perhatian serius para ahli pada berbagai bidang, dan telah banyak penelitian dilakukan untuk pengembangan karakteristik distribusi Weibull.

Salah satu aspek yang paling menarik dari perkembangan distribusi Weibull multivariat adalah pada pemodelan fungsi kepadatan peluang (fkp) bersama, sehingga terdapat beberapa model fkp. Beberapa ahli yang telah berkontribusi dalam pemodelan distribusi Weibull bivariat atau multivariat antara lain : Freund (1961), Marshall dan Olkin (1967), Lee (1979), Lu (1989), Spurrier-Weier (1981), Hougaard (1986), Lu dan Battacharyya (1990), Hanagal (1996). Kemudian Lee dan Wen (2009) mengembangkan model distribusi Weibull multivariat berdasarkan model Lu dan Bhattacharyya.

Model regresi Weibull adalah model fungsi kepadatan peluang distribusi Weibull yang parameter skalanya merupakan fungsi dari peubah bebas atau kovariat. Pada distribusi Weibull terdapat beberapa fungsi yang saling berhubungan yaitu fungsi kepadatan peluang, fungsi distribusi kumulatif, fungsi hazard dan fungsi *survival*. Model distribusi Weibull biasanya memuat satu, dua atau tiga parameter yaitu parameter lokasi (*location*), parameter skala (*scale*) dan parameter bentuk (*shape*). Pada pemodelan distribusi Weibull atau distribusi yang lain, biasanya sering ditambahkan satu atau lebih peubah yang lain (*supplementary variable*) untuk menjelaskan atau mempengaruhi peubah acak. Penambahan peubah *supplementary* biasanya dilakukan pada parameter skala. Jika fungsi hazard dipengaruhi langsung oleh peubah bebas (kovariat) maka melahirkan model *hazard rate* Weibull, dan jika parameter skala pada model fkp distribusi Weibull dipengaruhi oleh kovariat maka melahirkan model regresi Weibull.

Pembahasan tentang model regresi Weibull Trivariat (Multivariat) dewasa ini masih relatif sedikit, beberapa pembahasan tentang model regresi Weibull yang telah dilakukan pada umumnya masih terbatas pada model univariat atau bivariat. Mengingat kurangnya pembahasan tentang model regresi Weibull Trivariat, belum tersedianya bentuk penaksir parameter dan statistik uji pada pengujian parameter model, maka sebagai pengembangan model Regresi Weibull Univariat, pada makalah ini dibahas model Regresi Weibull Trivariat. Pembahasan meliputi pengestimasian parameter dan penentuan statistik uji pada pengujian parameter model.

Model regresi Weibull Trivariat yang dikaji pada makalah ini merupakan pengembangan model fkp bersama dari distribusi Weibull Multivariat yang dikemukakan oleh Lee dan Wen (2009) pada peubah respon yang *dependent*, dengan parameter skala merupakan fungsi dari peubah bebas atau kovariat. Metode yang digunakan pada pengestimasian parameter adalah metode *maximum likelihood estimator* (MLE) dan metode untuk menentukan statistik uji adalah *maximum likelihood ratio test* (MLRT)

2. Model Regresi Weibull Trivariat

Seperti yang telah diungkapkan pada pendahuluan bahwa, model regresi Weibull merupakan model fungsi kepadatan peluang dengan parameter skala merupakan fungsi dari peubah bebas (kovariat). Misalkan peubah acak $y \sim \text{Weibull}(\lambda, \gamma)$ maka fungsi kepadatan peluangnya adalah

$$f_1(y) = \gamma\lambda y^{\gamma-1}\exp[-\lambda y^{\gamma}], \qquad (1)$$

dengan λ adalah parameter skala, γ adalah parameter bentuk dan $0 < \lambda, \gamma < \infty$. Jika parameter skala pada persamaan (1) merupakan fungsi dari peubah bebas, yakni memenuhi hubungan

$$\ln\lambda(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\boldsymbol{\beta}, \qquad (2)$$

dengan $\mathbf{x} = [1\ X_1\ X_2 \cdots X_p]^T$, $\boldsymbol{\beta} = [\beta_0\ \beta_1 \cdots \beta_p]^T$ maka berdasarkan persamaan (1) diperoleh model regresi Weibull Univariat

$$f_1(y) = \gamma\exp[\mathbf{x}^T\boldsymbol{\beta}]y^{\gamma-1}\exp(-y^{\gamma}\exp[\mathbf{x}^T\boldsymbol{\beta}]), \qquad (3)$$

(O'Quigley dan Roberts, 1980). Selanjutnya berdasarkan model regresi Weibull Univariat tersebut dapat dikembangkan pada model regresi Weibull Multivariat.

Lu dan Bhattacharyya (1990) menurunkan distribusi Weibull bivariat dalam bentuk

$$S_2(y_1, y_2) = \exp\left\{-\left[\left(\frac{y_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{\gamma_1}{\alpha}} + \left(\frac{y_2}{\lambda_2}\right)^{\frac{\gamma_2}{\alpha}}\right]^{\alpha}\right\}, \qquad (4)$$

dengan α merupakan ukuran hubungan bersyarat antara peubah Y_1 dan Y_2, $0 < \alpha \le 1$, λ_k adalah parameter skala $0 < \lambda_1, \lambda_2 < \infty$ dan γ_k adalah parameter bentuk $0 < \gamma_1, \gamma_2 < \infty$, (Rinne, 2009). Berdasarkan fungsi survival Weibull bivariat (4), dengan langkah yang sama dapat dikembangkan fungsi survival trivariat distribusi Weibull yaitu

$$S(y_1, y_2, y_3) = \exp\left\{-\left[\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{y_k}{\lambda_k}\right)^{\frac{\gamma_k}{\alpha}}\right]^{\alpha}\right\}. \qquad (5)$$

Jika parameter skala λ_k pada fungsi survival (5) merupakan fungsi dari peubah bebas atau kovariat, yakni $\lambda_k = \lambda_k(\mathbf{x}) = \exp[\boldsymbol{\beta}_k^T\mathbf{x}]$, dengan $\boldsymbol{\beta}_k = [\beta_{k0}\ \beta_{k1} \cdots \beta_{kp}]^T$, $k = 1,2,3$ dan $\mathbf{x} = [1\ X_1 \cdots X_p]^T$, maka fungsi *survival* (5) menjadi

$$S_3(y_1, y_2, y_3) = \exp[-A_3^{\alpha}], \qquad (6)$$

dengan

$$A_3 = \sum_{k=1}^{3}(y_k)^{\frac{\gamma_k}{\alpha}}\exp[-\frac{\gamma_k}{\alpha}\boldsymbol{\beta}_k^T\mathbf{x}]. \qquad (7)$$

Fungsi kepadatan peluang bersama distribusi Weibull trivariat $f(y_1, y_2, y_3)$ yang dikemudian dinamakan model regresi Weibull Trivariat dapat diperoleh dengan mendiferensiasi parsial fungsi survival (6) terhadap semua peubah respon (Lee dan Wen, 2009), yaitu

$$f(y_1, y_2, y_3) = (-1)^3\frac{\partial^3 S_3(y_1, y_2, y_3)}{\partial y_1 \partial y_2 \partial y_3}. \qquad (8)$$

Dari diferensiasi pada persamaan (8) diperoleh model regresi Weibull Trivariat yaitu

$$f(y_1, y_2, y_3) = M_1 S_3(M_2 + M_3 + M_4), \qquad (9)$$

dengan

$$M_1 = (-1)^3\left(\prod_{k=1}^{3}\frac{\gamma_k}{\alpha}(y_k)^{\frac{\gamma_k}{\alpha}-1}\exp[-\frac{\gamma_k}{\alpha}\boldsymbol{\beta}_k^T\mathbf{x}]\right),$$

$$S_3 = \exp\left\{-\left[\sum_{k=1}^{3}(y_k)^{\frac{\gamma_k}{\alpha}}\exp[-\frac{\gamma_k}{\alpha}\boldsymbol{\beta}_k^T\mathbf{x}]\right]^{\alpha}\right\},$$

$$M_2 = -\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\left[\sum_{k=1}^{3}(y_k)^{\frac{\gamma_k}{\alpha}}\exp[-\frac{\gamma_k}{\alpha}\boldsymbol{\beta}_k^T\mathbf{x}]\right]^{\alpha-3}$$

$$M_3 = 3\alpha^2(\alpha-1)\left[\sum_{k=1}^{3}(y_k)^{\frac{\gamma_k}{\alpha}}\exp[-\frac{\gamma_k}{\alpha}\boldsymbol{\beta}_k^T\mathbf{x}]\right]^{2\alpha-3}$$

dan

$$M_4 = -\alpha^3\left[\sum_{k=1}^{3}(y_k)^{\frac{\gamma_k}{\alpha}}\exp[-\frac{\gamma_k}{\alpha}\boldsymbol{\beta}_k^T\mathbf{x}]\right]^{3\alpha-3}$$

Berdasarkan persamaan (7) didapat

$$\frac{\partial A_3}{\partial y_k} = G_k = \frac{\gamma_k}{\alpha}(y_k)^{\frac{\gamma_k}{\alpha}-1}\exp[-\frac{\gamma_k}{\alpha}\boldsymbol{\beta}_k^T\mathbf{x}],$$

dan

$$\frac{\partial S_3}{\partial y_k} = -\alpha A_3^{\alpha-1}G_k S_3;\ k=1,2,3,$$

sehingga model regresi Weibull Trivariat (9) dapat ditulis dalam bentuk

$$f(y_1,y_2,y_3) = \left(\prod_{k=1}^{3}G_k\right)S_3A_3^{\alpha-3}[\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)-3\alpha^2(\alpha-1)A_3^{\alpha}+\alpha^3A_3^{2\alpha}]$$

atau

$$f(y_1,y_2,y_3) = \left(\prod_{k=1}^{3}G_k\right)S_3A_3^{\alpha-3}B_3, \qquad (10)$$

dengan

$B_3 = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)-3\alpha^2(\alpha-1)A_3^{\alpha}+\alpha^3A_3^{2\alpha}$.

Model regresi Weibull Trivariat (9) juga dapat ditulis dalam bentuk umum

$$f(y_1,y_2,y_3) = (-1)^3\left(\prod_{k=1}^{3}\frac{\partial A_3}{\partial y_k}\right)\exp[-A_3^{\alpha}]\left(\sum_{k=1}^{3}(-1)^k C(3,k,\alpha)A_3^{k\alpha-3}\right)$$

dengan

$$C(3,k,\alpha) = \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k\\k_1+2k_2+3k_3=3}}\binom{3}{k_1\ k_2\ k_3}\binom{\alpha}{1}^{k_1}\binom{\alpha}{2}^{k_2}\binom{\alpha}{3}^{k_3}$$

,

$$\binom{3}{k_1\ k_2\ k_3} = \frac{3!}{k_1!k_2!k_3!} \quad \text{dan} \quad \binom{\alpha}{b} = \frac{\alpha!}{(\alpha-b)!b!}.$$

3. Pengestimasian Parameter

Pengestimasian parameter model regresi Weibull Trivariat dapat menggunakan motode MLE. Misalkan diambil sampel acak berukuran n yaitu (y_{1i}, y_{2i}, y_{3i}) dan $(X_{1i}, X_{2i}, \cdots, X_{pi})$, $i=1,2,\cdots,n$ masing-masing adalah sampel peubah respon dan peubah bebas, maka fungsi *likelihood* berdasarkan sampel ini didefinisikan

$$L(\alpha,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) = \prod_{i=1}^{n}f(y_{1i},y_{2i},y_{3i})$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{3}\left(\prod_{i=1}^{n}G_{ki}\right)\right)\left(\prod_{i=1}^{n}S_{3i}\right)\left(\prod_{i=1}^{n}A_{3i}^{\alpha-3}\right)\left(\prod_{i=1}^{n}B_{3i}\right),$$

dan fungsi logaritma natural dari fungsi *likelihood* adalah

$$l(\alpha,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3) = \sum_{i=1}^{n}\ln f(y_{1i},y_{2i},y_{3i})$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\sum_{k=1}^{3}\ln G_{ki}\right)+\ln S_{3i}+(\alpha-3)\ln A_{3i}+\ln B_{3i}\right)$$

(11)

dengan

$\ln G_{ki} = \ln\gamma_k - \ln\alpha + (\frac{\gamma_k}{\alpha}-1)\ln y_{ki} - \frac{\gamma_k}{\alpha}\boldsymbol{\beta}_k^T\mathbf{x}_i$,

$k=1,2,3$,

$$\ln A_{3i} = \ln\left(\sum_{l=1}^{3}(y_{li})^{\frac{\gamma_l}{\alpha}}\exp[-\frac{\gamma_l}{\alpha}\boldsymbol{\beta}_l^T\mathbf{x}_i]\right),$$

$\ln S_{3i} = -A_{3i}^{\alpha}$, dan

$\ln B_{3i} =$

$\ln[\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)-3\alpha^2(\alpha-1)A_{3i}^{\alpha}+\alpha^3A_{3i}^{2\alpha}]$.

Penduga parameter regresi Weibull Trivariat diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan *likelihood* $\frac{\partial l(.)}{\partial\boldsymbol{\theta}} = 0$, dan diselesaikan menggunakan iterasi Newton-Raphson

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(m+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(m)} - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(m)})\mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(m)}), \qquad (12)$$

dengan

$\boldsymbol{\theta} = [\alpha\ \gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \boldsymbol{\beta}^T]^T$,

$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = [\frac{\partial l}{\partial\alpha}\ \frac{\partial l}{\partial\gamma_1}\ \frac{\partial l}{\partial\gamma_2}\ \frac{\partial l}{\partial\gamma_3}\ \frac{\partial l}{\partial\boldsymbol{\beta}^T}]^T$,

$\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\beta}_1^T\ \boldsymbol{\beta}_2^T\ \boldsymbol{\beta}_3^T]^T$,

$\boldsymbol{\beta}_k = [\beta_{k0}\ \beta_{k1}\ \cdots\ \beta_{kp}]^T$, $k=1,2,3$ dan

$\mathbf{H}_{(4+3(p+1))\times(4+3(p+1))}$ adalah matriks Hessian yaitu

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l}{\partial\alpha^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial\alpha\partial\gamma_1} & \frac{\partial^2 l}{\partial\alpha\partial\gamma_2} & \frac{\partial^2 l}{\partial\alpha\partial\gamma_3} & \frac{\partial^2 l}{\partial\alpha\partial\boldsymbol{\beta}^T} \\ & \frac{\partial^2 l}{\partial\gamma_1^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial\gamma_1\partial\gamma_2} & \frac{\partial^2 l}{\partial\gamma_1\partial\gamma_3} & \frac{\partial^2 l}{\partial\gamma_1\partial\boldsymbol{\beta}^T} \\ & & \frac{\partial^2 l}{\partial\gamma_2^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial\gamma_2\partial\gamma_3} & \frac{\partial^2 l}{\partial\gamma_2\partial\boldsymbol{\beta}^T} \\ \text{simetri} & & & \frac{\partial^2 l}{\partial\gamma_3^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial\gamma_3\partial\boldsymbol{\beta}^T} \\ & & & & \frac{\partial^2 l}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}^T} \end{bmatrix}$$

Proses iterasi dimulai dengan penentuan nilai awal $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$, dan iterasi berhenti pada iterasi ke-m jika $\left\|\boldsymbol{\theta}^{(m)} - \boldsymbol{\theta}^{(m-1)}\right\| \le \varepsilon$, dengan ε adalah bilangan positip yang cukup kecil. Dari proses iterasi ini diperoleh MLE dari $\boldsymbol{\theta}$ adalah $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(m)}$.

4. Pengujian Parameter Model

Setelah pendugaan parameter model regresi Weibull Trivariat dilakukan, maka tahap

ISBN No. 978-979-96700-6-9

berikutnya adalah melakukan pengujian parameter model. Pengujian hipotesis ini meliputi pengujian parameter secara serentak dan pengujian parameter secara parsial.

Tahapan pengujian parameter secara serentak adalah sebagai berikut :

Menetapkan hipotesis :

H₀ : $\beta_{1k} = \beta_{2k} = \cdots = \beta_{pk} = 0$; $k = 1,2,3$

H₁ : Minimal terdapat satu $\beta_{kj} \neq 0$, $j = 1,2,\cdots,p$;

$k = 1,2,3$.

Mendefinisikan himpunan parameter di bawah H₀ yaitu $\omega = \{\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ dengan fungsi *likelihood* adalah

$$L(\omega) = \prod_{i=1}^{n} f(y_{1i}, y_{2i}, y_{3i} \mid \omega)$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{3} (\prod_{i=1}^{n} Z_{ki}) \right) \left(\prod_{i=1}^{n} S_i \right) \left(\prod_{i=1}^{n} A_i^{\alpha-3} \right) \left(\prod_{i=1}^{n} B_i \right), \quad (13)$$

dengan

$$A = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{y_k}{\lambda_k} \right)^{\frac{\gamma_k}{\alpha}} ; \; S = \exp(-A^{\alpha}) ;$$

$$Z_k = \frac{\partial A}{\partial y_k} = \frac{\gamma_k}{\alpha \lambda_k} \left(\frac{y_k}{\lambda_k} \right)^{\frac{\gamma_k}{\alpha} - 1}, k = 1,2,3$$

dan

$$B = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) - 3\alpha^2(\alpha-1)A^{\alpha} + \alpha^3 A^{2\alpha} .$$

Nilai maksimum fungsi *likelihood* (13) adalah

$$L(\hat{\omega}) = \max_{\omega} L(\omega) ,$$

dengan $\hat{\omega} = \{\hat{\alpha}, \hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \hat{\gamma}_3, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3\}$.

Mendefinisikan himpunan parameter di bawah H₁ yaitu $\Omega = \{\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3\}$ dengan fungsi *likelihood* adalah

$$L(\Omega) = \prod_{i=1}^{n} f(y_{1i}, y_{2i}, y_{3i} \mid \Omega) ,$$

dan nilai maksimumnya adalah

$$L(\hat{\Omega}) = \max_{\Omega} L(\Omega) ,$$

dengan $\hat{\Omega} = \{\hat{\alpha}, \hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \hat{\gamma}_3, \hat{\boldsymbol{\beta}}_1, \hat{\boldsymbol{\beta}}_2, \hat{\boldsymbol{\beta}}_3\}$.

Tahapan selanjutnya adalah menentukan statistik uji, yaitu

$$G^2 = -2\ln \frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} = 2[\ln L(\hat{\Omega}) - \ln L(\hat{\omega})] ,$$

dengan $G^2 \sim \chi^2_{3p}$.

Daerah penolakan uji ini adalah menolak H₀ jika $G^2_{hitung} > \chi^2_{\alpha,3p}$.

Sedangkan tahapan pengujian parameter secara parsial adalah sebagai berikut :

Menetapkan hipotesis :

H₀ : $\beta_{kj} = 0$

H₁ : $\beta_{kj} \neq 0$; $j = 0,1,2,\cdots,p$

Statistik uji adalah :

$$Z = \frac{\hat{\beta}_{kj}}{SE(\hat{\beta}_{kj})} \sim N(0,1) \text{ atau } W = \frac{\hat{\beta}_{kj}^2}{\hat{Var}(\hat{\beta}_{kj})} \sim \chi^2_1$$

,

dimana $SE(\hat{\beta}_{kj}) = \sqrt{\hat{Var}(\hat{\beta}_{kj})}$, dan $\hat{Var}(\hat{\beta}_{kj})$ adalah elemen diagonal utama ke-$((k-1)(p+1)+j+5)$ matriks $-\mathbf{H}$ yaitu matriks informasi Fisher, dengan $k = 1,2,3$.

Daerah kritis uji ini adalah menolak H₀ jika $|Z_{hitung}| > Z_{\alpha/2}$ atau jika $W_{hitung} > \chi^2_{\alpha,1}$.

5. Penutup

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan uraian di atas dapat disimpulkan sebagai berikut : model regresi Weibull Trivariat merupakan model fungsi kepadatan peluang bersama distribusi Weibull Trivariat yang parameter skalanya merupakan fungsi dari peubah bebas atau kovariat; model regresi Weibull trivariat dapat diperoleh dari diferensiasi parsial fungsi survival trivariat terhadap semua peubah respon;

pendugaan parameter model regresi Weibull Trivariat dapat menggunakan metode MLE; statistik uji pada pengujian hipotesis parameter model regresi Weibull Trivariat dapat menggunakan metode MLRT; pengujian parameter model regresi Weibull Trivariat terdiri dari pengujian parameter secara serentak dan pengujian parameter secara parsial.

5.2. Saran

Pembahasan model regresi Weibull pada makalah ini bersifat teoritis, oleh karenanya diperlukan penelitian lanjutan untuk mengaplikasikan teori regresi Weibull Trivariat ini pada data riil. Walaupun secara teoritis metode MLE pada pengestimasian parameter model Regresi Weibull Trivariat relatif sederhana, tetapi pada aplikasi data riil akan dihadapkan pada perhitungan yang sulit karena melibatkan banyak parameter. Oleh karenanya diperlukan penelitian lanjutan untuk pengembangan metode yang lain dalam pengestimasian parameter dan penentuan statistik uji dalam pengujian parameter model.

6. Pustaka

Hanagal, D.D., (2004). *Parametric Bivariate Regression Analysis Based on Censored Samples: A Weibull Model*. Economic Quality Control, Vol 19, No. 1, 1 -; ©Heldermann Verlag ISSN 0940-5151.

Hanagal, D.D., (2005). *A Bivariate Weibull Regression Model.* Economic Quality Control,Vol 20, No. 1, 1 -; ©Heldermann Verlag ISSN 0940-5151.

Hanagal, D.D., (2006). *Weibull Extension of a Bivariate Exponential Regression Model* Economic Quality Control, Vol 21, No. 2, 149 -; ©Heldermann Verlag ISSN 0940-5151.

Lee, C.K. and Wen, M.J., (2009). *A Multivariat Weibull Distribution.* Pak.j.stat.oper.res. Vol. V, No. 2, 2009, pp.55-66.

O'Quigley, J. and Roberts, A., (1980). *A Regression Model For Survival Time Studies.* Computer Program in Biomedicine 12 (1980) 14-18.

Rinne, H., (2009). *The Weibull Distribution A Handbook.* CRC Press Taylor and Francis Group.

Wahyudi, I., Purhadi, Irhamah, Sutikno, (2012). *The Development of Parameter Estimation on Hazard Rate of Trivariate Weibull Distribution.* Journal AE/SNA, 21/3/2012.