

# BUKU AJAR

MATA KULIAH MATEMATIKA TEKNIK

HAPPY NUGROHO, S.T., M.T.



LABORATORIUM KOMPUTASI & TEKNOLOGI INFORMASI

UNIVERSITAS MULAWARMAN

FAKULTAS TEKNIK

PROGRAM STUDI TEKNIK ELEKTRO

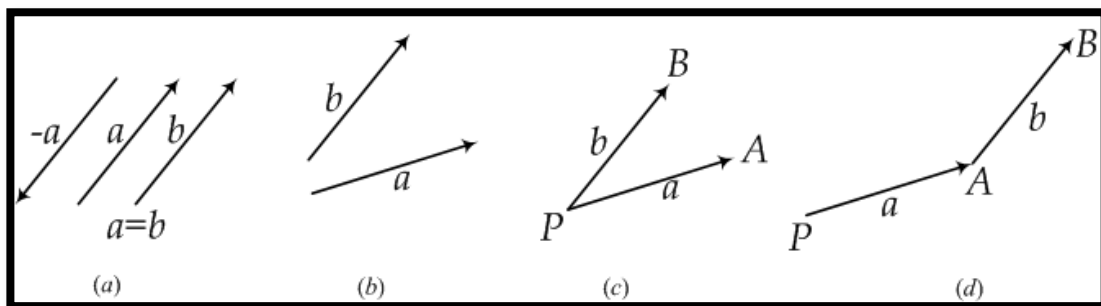
TAHUN 2022

## VEKTOR BIDANG (Part 1)

2

### SKALAR DAN VEKTOR

Suatu besaran seperti: waktu dan temperatur, yang hanya memiliki nilai disebut dengan besaran *skalar*. Skalar, yang hanya berupa nilai atau bilangan saja, mengikuti hukum-hukum aljabar biasa, berbeda dengan vektor. Besaran-besaran seperti misalnya: gaya, kecepatan, percepatan dan momentum, yang memiliki nilai dan juga arah, disebut besaran *vektor*. Vektor dinyatakan dengan sebuah garis yang memiliki arah (panah). Arah panah (sudut yang terbentuk antara vektor tersebut terhadap garis tetap dalam bidang) merupakan **arah vektor**, dan panjang panah (dalam satuan ukuran tertentu) menyatakan **besarnya** nilai **vektor**.



Gambar 1 (a) s.d. (d). Deskripsi vektor  $a$  dan  $b$

Dua vektor  $a$  dan  $b$  disebut *sama*,  $a = b$ , jika mereka mempunyai besar dan arah sama. Suatu vektor yang besarnya sama dengan besarnya vektor  $a$  tetapi arahnya berlawanan dengan arah vektor  $a$ , didefinisikan sebagai negatifnya  $a$  dan dinyatakan oleh  $-a$ . **Secara**  $a$  adalah vektor dan  $k$  adalah skalar, maka  $ka$  adalah vektor yang arahnya sama dengan  $a$  dan besarnya  $k$  kali besarnya  $a$  jika  $k$  positif, tetapi arahnya berlawanan dengan  $a$  dan besarnya  $|k|$  kali besarnya  $a$  jika  $k$  negatif.

Kecuali jika dinyatakan lain, suatu vektor tidak mempunyai posisi tetap dalam bidang dan karena itu dapat digerakkan bebas dalam suatu bidang dengan perpindahan yang sejajar. Misalnya, jika vektor  $a$  dan  $b$  adalah dua vektor seperti Gambar 1 (b), maka kedua vektor tersebut memiliki titik awal yang sama, yakni  $P$

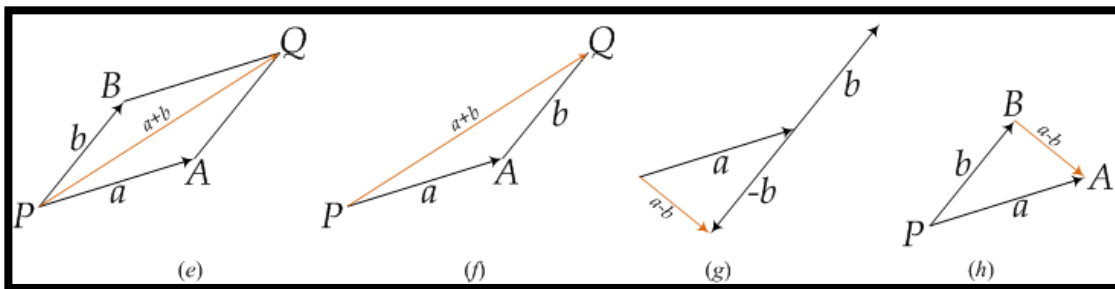
seperti terlihat Gambar 1 (c). Atau dengan titik awal  $b$  yang berimpit dengan titik akhir atau ujung  $a$  seperti Gambar 1 (d).

3

### JUMLAH DAN SELISIH DUA VEKTOR

Jika vektor  $a$  dan  $b$  adalah vektor seperti Gambar 1 (b), maka operasi penjumlahan  $a + b$  diperoleh dengan cara:

- dengan menggambarkan vektor-vektor seperti Gambar 1 (c) dan menyelesaikan jajaran genjang  $PAQB$  pada Gambar 2 (e). Vektor  $PQ$  adalah jumlah yang dinyatakan.
- dengan menggambarkan vektor-vektor seperti dalam Gambar 1 (d) dan menyelesaikan segitiga  $PAB$  pada Gambar 2 (f). Di sini vektor  $PB$  adalah jumlah yang ditanyakan.



Gambar 2 (e) s.d. (h) Deskripsi vektor  $a$  dan  $b$  (lanjutan)

Dari Gambar 2 (f) ternyata bahwa tiga vektor dapat dipindahkan hingga membentuk segitiga jika salah satu dari vektor-vektor itu adalah jumlah atau jumlah negatif dari kedua vektor lain.

Jika vektor  $a$  dan  $b$  adalah vektor seperti Gambar 1 (b), maka operasi pengurangannya  $a - b$  dicari dengan:

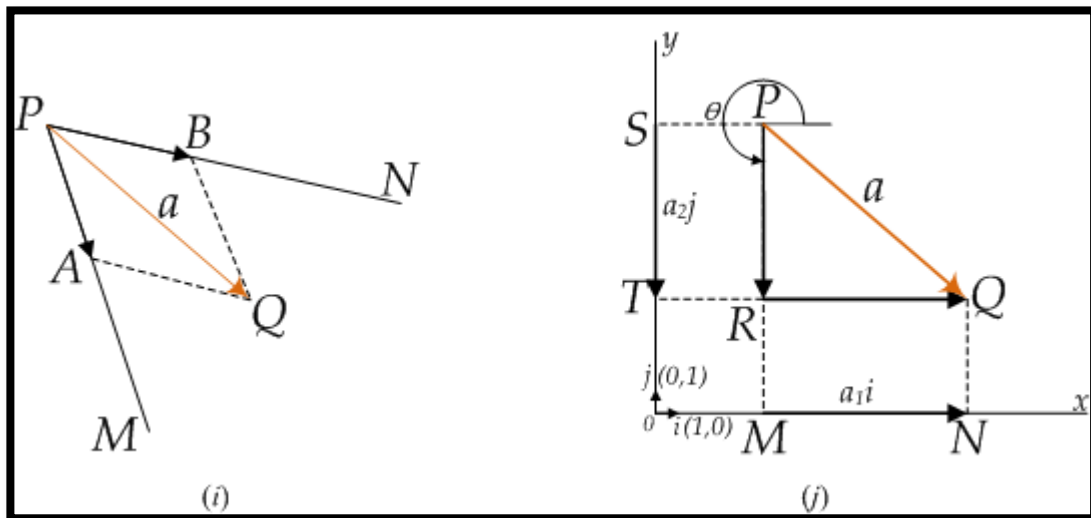
- dari hubungan  $a - b = a + (-b)$  seperti dalam Gambar 2 (g).
- dengan menggambar vektor seperti dalam Gambar 1 (c) dan menyelesaikan segitiganya. Dalam Gambar 2 (h), vektor  $BA = a - b$ .

Jika  $a, b, c$  adalah vektor dan  $k$  adalah skalar, maka vektor bidang memiliki aturan yakni:

- 1)  $a + b = b + a$  (Hukum Komutatif)
- 2)  $a + (b + c) = (a + b) + c$  (Hukum Asosiatif)
- 3)  $k(a + b) = ka + kb$  (Hukum Distributif)

### KOMPONEN SUATU VEKTOR

Perhatikan Gambar 3 berikut ini.



**Gambar 3**

Pada Gambar 3, misal  $a = PQ$  adalah vektor yang diketahui, dan  $PM$  serta  $PN$  adalah dua garis (arah) lain lewat  $P$ , dan membentuk jajaran genjang  $PAQB$ . Maka diperoleh,

$$a = PA + PB$$

dari persamaan di atas,  $a$  dijabarkan dalam arah  $PM$  dan  $PN$ , dimana  $PA$  dan  $PB$  didefinisikan komponen vektor  $a$  dalam pasangan arah  $PM$  dan  $PN$ .

Perhatikan vektor  $a$  dalam sistem koordinat kartesian (Gambar 3 (j)) yang mempunyai ukuran sama pada kedua sumbunya. Vektor  $i$  (koordinat  $(1,0)$ ) dan  $j$  (koordinat  $(0,1)$ ) adalah **vektor satuan** yang besar atau nilainya adalah 1. Vektor  $i$  mengarah pada sumbu- $x$  positif, dan vektor  $j$  mengarah pada sumbu- $y$  positif.

Dari titik awal  $P$  dan titik akhir  $Q$  vektor  $\mathbf{a}$  tarik garis-garis tegak lurus ke sumbu- $x$  hingga diperoleh masing-masing  $M$  dan  $N$ , dan garis-garis tegak lurus ke sumbu- $y$  yang menghasilkan  $S$  dan  $T$ . Dari Gambar 3 tersebut, diperoleh  $\mathbf{MN} = a_1\mathbf{i}$ , dengan  $a_1$  positif, dan  $\mathbf{ST} = a_2\mathbf{j}$ , dengan  $a_2$  negatif. Maka  $\mathbf{MN} = \mathbf{RQ} = a_1\mathbf{i}$ , dan  $\mathbf{ST} = \mathbf{PR} = a_2\mathbf{j}$ , dan

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} \quad \text{Persamaan (1)}$$

dimana,  $a_1$  dan  $a_2$  merupakan bilangan skalar.

Misalkan arah  $\mathbf{a}$  dinyatakan oleh sudut  $\theta$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ , diukur dengan berlawanan arah jarum jam (*counter clockwise (ccw)*) dari sumbu- $x$  positif ke vektor. Maka

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{Persamaan (2)}$$

dan

$$\tan\theta = \frac{a_2}{a_1} \quad \text{Persamaan (3)}$$

dimana, kuadran  $\theta$  ditentukan oleh

$$a_1 = |\mathbf{a}|\cos\theta, \text{ dan } a_2 = |\mathbf{a}|\sin\theta$$

Jika  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$  dan  $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ , maka vektor bidang memiliki aturan yakni:

- 4)  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  jika dan hanya jika  $a_1 = b_1$  dan  $a_2 = b_2$
- 5)  $k\mathbf{a} = ka_1\mathbf{i} + ka_2\mathbf{j}$
- 6)  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j}$
- 7)  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1)\mathbf{i} + (a_2 - b_2)\mathbf{j}$

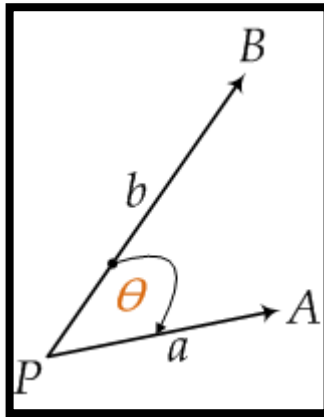
### HASIL KALI SKALAR ATAU TITIK

Hasil kali skalar atau titik dari dua vektor  $\mathbf{a}$  dan  $\mathbf{b}$  didefinisikan oleh,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta \quad \text{Persamaan (4)}$$

dimana,  $\theta$  adalah sudut yang terkecil antara kedua vektor jika digambar dengan titik awal yang sama (Gambar 4).

6



Gambar 4

Dari persamaan (4) sebelumnya, maka diperoleh:

- 8)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$  (Hukum Komutatif)
- 9)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}||\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|^2$  atau  $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$
- 10)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$  jika (i)  $\mathbf{a} = 0$ , atau (ii)  $\mathbf{b} = 0$ , atau (iii)  $\mathbf{a}$  tegak lurus  $\mathbf{b}$
- 11)  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1; \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$
- 12)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \cdot (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = a_1b_1 + a_2b_2$
- 13)  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$  (Hukum Distributif)
- 14)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{d}$

**CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN**

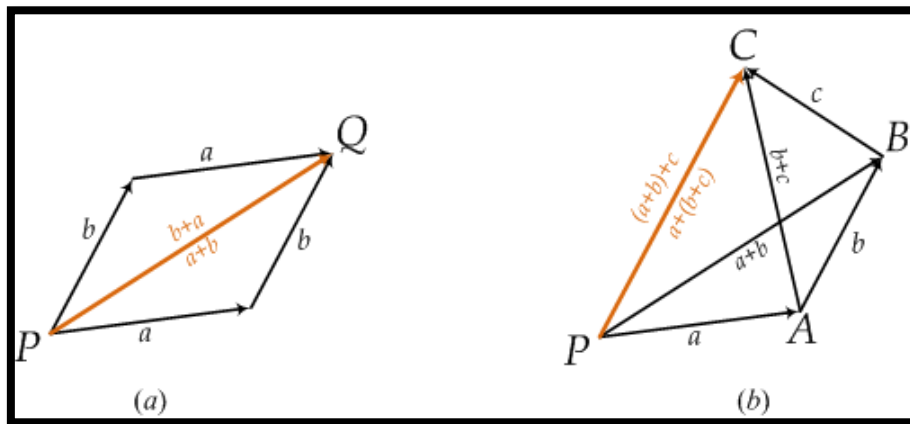
1. Buktikan:  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ , jawab:

Dari Gambar 5(a), terbukti bahwa:  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{PQ} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

2. Buktikan:  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ , jawab:

Dari Gambar 5(a), terbukti bahwa:  $\mathbf{PC} = \mathbf{PB} + \mathbf{BC} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ .

Juga terbukti bahwa:  $\mathbf{PC} = \mathbf{PA} + \mathbf{AC} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ .

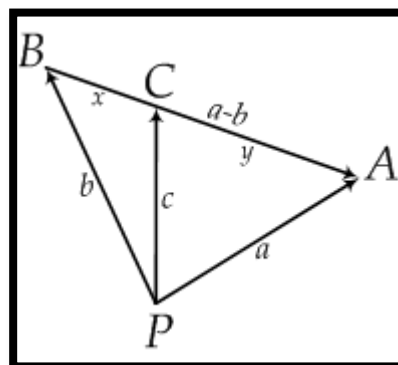


**Gambar 5**

3. Misalkan  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  adalah tiga vektor yang berpangkal di  $P$  sedemikian hingga titik akhirnya  $A, B$ , dan  $C$  terletak pada garis seperti ditunjukkan dalam Gambar 6. Jika  $C$  membagi  $BA$  dalam perbandingan  $x:y$  dengan  $x + y = 1$ , jawab:

$$\mathbf{c} = \mathbf{PB} + \mathbf{BC} = \mathbf{b} + x(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = x\mathbf{a} + (1 - x)\mathbf{b} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$$

bila  $C$  membagi  $BA$  dua sama besar, maka  $\mathbf{c} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$  dan  $\mathbf{BC} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$

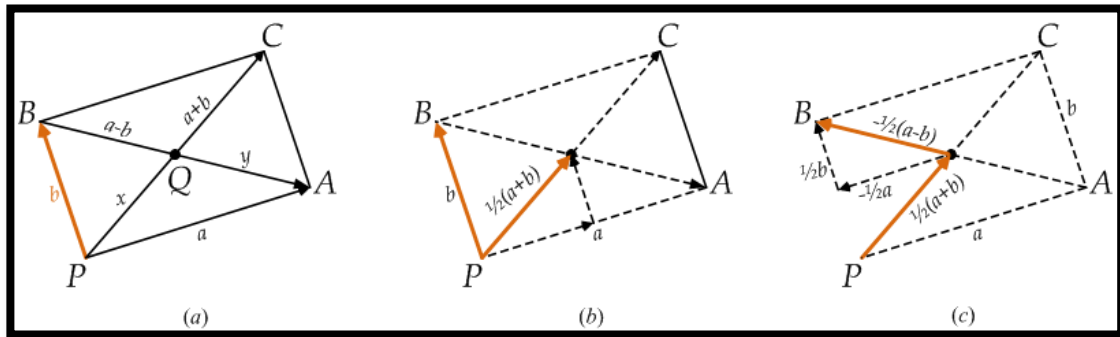


**Gambar 6**

4. Buktikan bahwa:

$$\mathbf{PB} = \mathbf{PQ} + \mathbf{QB} \text{ atau } \mathbf{b} = x(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - y(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = (x - y)\mathbf{a} + (x + y)\mathbf{b}$$

dimana,  $x = y = 1$ , dan  $Q$  adalah titik tengah tiap diagonal, jawab:



Gambar 7

Untuk vektor-vektor  $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$  dan  $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ , cari besar dan arah (a)  $\mathbf{a}$  dan  $\mathbf{b}$ ,

(b)  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ , (c)  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ . jawab:

(a) Untuk  $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$  maka:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5;$$

$$\tan\theta = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{3} = 1.33, \text{ sehingga diperoleh } \theta = 53.13^\circ$$

Untuk  $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$  maka:

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5};$$

$$\tan\theta = \frac{b_2}{b_1} = -\frac{1}{2}, \text{ sehingga diperoleh } \theta = (360^\circ - 26.57^\circ) = 333.43^\circ$$

(b)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) + (2\mathbf{i} - \mathbf{j}) = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ .

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34};$$

$$\tan\theta = \frac{3}{5}, \text{ sehingga diperoleh } \theta = 30.69^\circ$$

(c)  $(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (2\mathbf{i} - \mathbf{j}) - (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = -\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

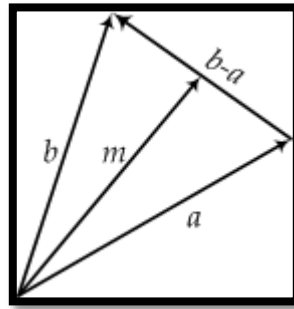
$$|\mathbf{b} - \mathbf{a}| = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{26};$$

$$\tan\theta = 5, \text{ sehingga diperoleh } \theta = 180^\circ + 78.69^\circ = 258.69^\circ$$



**TUGAS MAHASISWA**

5. Buktikan bahwa: Garis berat ke alas segitiga samakaki adalah tegak lurus pada 9  
alas, dimana nilai  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ . Berdasarkan Gambar 8, Tentukan besarnya **nilai** !



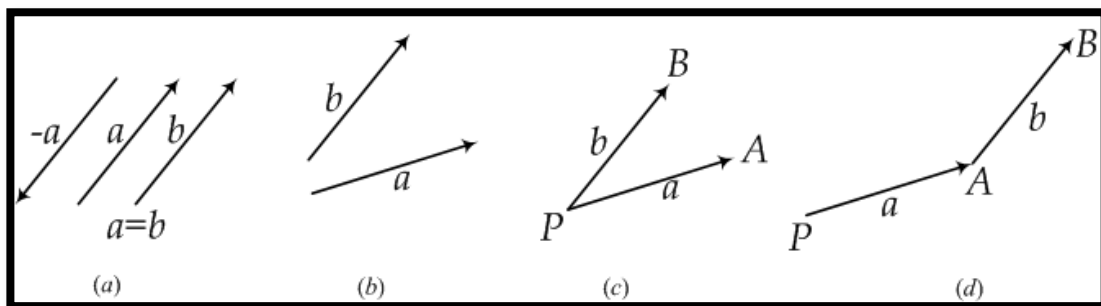
**Gambar 8**

## VEKTOR BIDANG (Part 1)

10

### SKALAR DAN VEKTOR

Suatu besaran seperti: waktu dan temperatur, yang hanya memiliki nilai disebut dengan besaran *skalar*. Skalar, yang hanya berupa nilai atau bilangan saja, mengikuti hukum-hukum aljabar biasa, berbeda dengan vektor. Besaran-besaran seperti misalnya: gaya, kecepatan, percepatan dan momentum, yang memiliki nilai dan juga arah, disebut besaran *vektor*. Vektor dinyatakan dengan sebuah garis yang memiliki arah (panah). Arah panah (sudut yang terbentuk antara vektor tersebut terhadap garis tetap dalam bidang) merupakan **arah vektor**, dan panjang panah (dalam satuan ukuran tertentu) menyatakan **besarnya** nilai **vektor**.



Gambar 1 (a) s.d. (d). Deskripsi vektor  $a$  dan  $b$

Dua vektor  $a$  dan  $b$  disebut *sama*,  $a = b$ , jika mereka mempunyai besar dan arah sama. Suatu vektor yang besarnya sama dengan besarnya vektor  $a$  tetapi arahnya berlawanan dengan arah vektor  $a$ , didefinisikan sebagai negatifnya  $a$  dan dinyatakan oleh  $-a$ . Oleh karena  $a$  adalah vektor dan  $k$  adalah skalar, maka  $ka$  adalah vektor yang arahnya sama dengan  $a$  dan besarnya  $k$  kali besarnya  $a$  jika  $k$  positif, tetapi arahnya berlawanan dengan  $a$  dan besarnya  $|k|$  kali besarnya  $a$  jika  $k$  negatif.

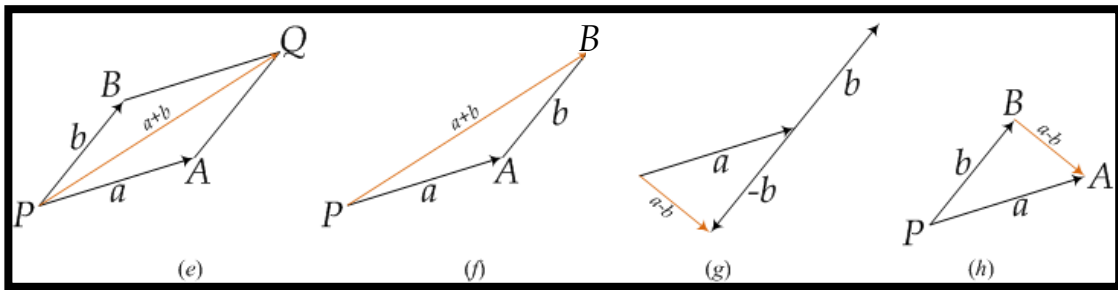
Kecuali jika dinyatakan lain, suatu vektor tidak mempunyai posisi tetap dalam bidang dan karena itu dapat digerakkan bebas dalam suatu bidang dengan perpindahan yang sejajar. Misalnya, jika vektor  $a$  dan  $b$  adalah dua vektor seperti Gambar 1 (b), maka kedua vektor tersebut memiliki titik awal yang sama, yakni  $P$

seperti terlihat Gambar 1 (c). Atau dengan titik awal  $b$  yang berimpit dengan titik akhir atau ujung  $a$  seperti Gambar 1 (d).

### JUMLAH DAN SELISIH DUA VEKTOR

Jika vektor  $a$  dan  $b$  adalah vektor seperti Gambar 1 (b), maka operasi penjumlahan  $a + b$  diperoleh dengan cara:

- v. Menggambar vektor-vektor seperti Gambar 1 (c) dan menyelesaikan jajaran genjang  $PAQB$  pada Gambar 2 (e). Vektor  $PQ$  adalah jumlah yang dinyatakan.
- vi. Menggambar vektor-vektor seperti dalam Gambar 1 (d) dan menyelesaikan segitiga  $PAB$  pada Gambar 2 (f). Di sini vektor  $PB$  adalah jumlah yang ditanyakan.



Gambar 2 (e) s.d. (h) Deskripsi vektor  $a$  dan  $b$  (lanjutan)

Dari Gambar 2 (f) ternyata bahwa tiga vektor dapat dipindahkan hingga membentuk segitiga jika salah satu dari vektor-vektor itu adalah jumlah atau jumlah negatif dari kedua vektor lain.

Jika vektor  $a$  dan  $b$  adalah vektor seperti Gambar 1 (b), maka operasi pengurangannya  $a - b$  dicari dengan:

- vii. dari hubungan  $a - b = a + (-b)$  seperti dalam Gambar 2 (g).
- viii. dengan menggambar vektor seperti dalam Gambar 1 (c) dan menyelesaikan segitiganya. Dalam Gambar 2 (h), vektor  $BA = a - b$ .

Jika  $a, b, c$  adalah vektor dan  $k$  adalah skalar, maka vektor bidang memiliki aturan yakni:

12

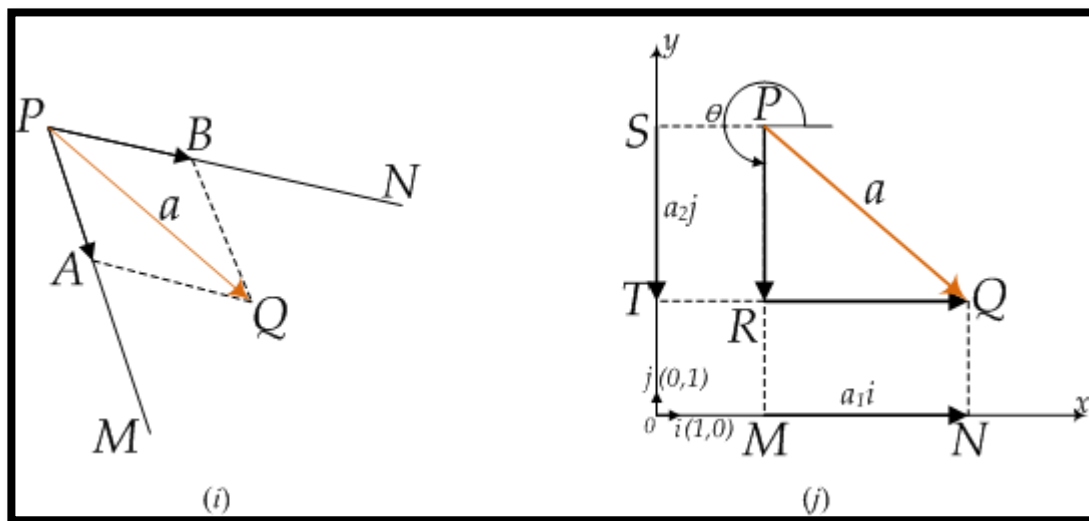
15)  $a + b = b + a$  (Hukum Komutatif)

16)  $a + (b + c) = (a + b) + c$  (Hukum Asosiatif)

17)  $k(a + b) = ka + kb$  (Hukum Distributif)

### KOMPONEN SUATU VEKTOR

Perhatikan Gambar 3 berikut ini.



Gambar 3 Komponen vektor  $a$

Pada Gambar 3, misal  $a = PQ$  adalah vektor yang diketahui, dan  $PM$  serta  $PN$  adalah dua garis (arah) lain lewat  $P$ , dan membentuk jajaran genjang  $PAQB$ . Maka diperoleh,

$$a = PA + PB$$

dari persamaan di atas,  $a$  dijabarkan dalam arah  $PM$  dan  $PN$ , dimana  $PA$  dan  $PB$  didefinisikan komponen vektor  $a$  dalam pasangan arah  $PM$  dan  $PN$ .

Perhatikan vektor  $a$  dalam sistem koordinat kartesian (Gambar 3 (j)) yang mempunyai ukuran sama pada kedua sumbunya. Vektor  $i$  (koordinat  $(1,0)$ ) dan  $j$  (koordinat  $(0,1)$ ) adalah **vektor satuan** yang besar atau nilainya adalah 1. Vektor  $i$  mengarah pada sumbu- $x$  positif, dan vektor  $j$  mengarah pada sumbu- $y$  positif.

Dari titik awal  $P$  dan titik akhir  $Q$  vektor  $\mathbf{a}$  tarik garis-garis tegak lurus ke sumbu- $x$  hingga diperoleh masing-masing  $M$  dan  $N$ , dan garis-garis tegak lurus ke sumbu- $y$  yang menghasilkan  $S$  dan  $T$ . Dari Gambar 3 tersebut, diperoleh  $\mathbf{MN} = a_1\mathbf{i}$ , dengan  $a_1$  positif, dan  $\mathbf{ST} = a_2\mathbf{j}$ , dengan  $a_2$  negatif. Maka  $\mathbf{MN} = \mathbf{RQ} = a_1\mathbf{i}$ , dan  $\mathbf{ST} = \mathbf{PR} = a_2\mathbf{j}$ , dan

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} \quad \text{Persamaan (1)}$$

dimana,  $a_1$  dan  $a_2$  merupakan bilangan skalar.

Misalkan arah  $\mathbf{a}$  dinyatakan oleh sudut  $\theta$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ , diukur dengan berlawanan arah jarum jam (*counter clockwise (ccw)*) dari sumbu- $x$  positif ke vektor. Maka

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{Persamaan (2)}$$

dan

$$\tan\theta = \frac{a_2}{a_1} \quad \text{Persamaan (3)}$$

dimana, kuadran  $\theta$  ditentukan oleh

$$a_1 = |\mathbf{a}|\cos\theta, \text{ dan } a_2 = |\mathbf{a}|\sin\theta$$

Jika  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$  dan  $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ , maka vektor bidang memiliki aturan yakni:

18)  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  jika dan hanya jika  $a_1 = b_1$  dan  $a_2 = b_2$

19)  $k\mathbf{a} = ka_1\mathbf{i} + ka_2\mathbf{j}$

20)  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j}$

21)  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1)\mathbf{i} + (a_2 - b_2)\mathbf{j}$

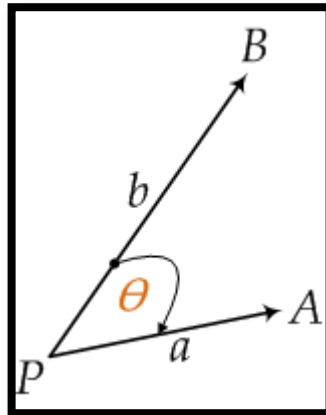
### HASIL KALI SKALAR ATAU TITIK

Hasil kali skalar atau titik dari dua vektor  $\mathbf{a}$  dan  $\mathbf{b}$  didefinisikan oleh,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta \quad \text{Persamaan (4)}$$

dimana,  $\theta$  adalah sudut yang terkecil antara kedua vektor jika digambar dengan titik awal yang sama (Gambar 4).

14



Gambar 4

Dari persamaan (4) sebelumnya, maka diperoleh:

- 22)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$  (Hukum Komutatif)
- 23)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}||\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|^2$  atau  $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$
- 24)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$  jika (i)  $\mathbf{a} = 0$ , atau (ii)  $\mathbf{b} = 0$ , atau (iii)  $\mathbf{a}$  tegak lurus  $\mathbf{b}$
- 25)  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1; \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$
- 26)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \cdot (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = a_1b_1 + a_2b_2$
- 27)  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$  (Hukum Distributif)
- 28)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{d}$

**CONTOH SOAL DAN PEMBAHASAN**

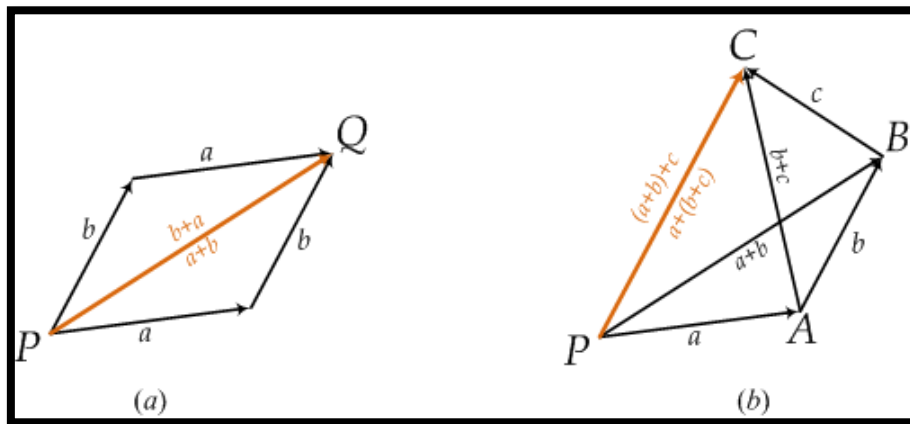
6. Buktikan:  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ , jawab:

Dari Gambar 5(a), terbukti bahwa:  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{PQ} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

7. Buktikan:  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ , jawab:

Dari Gambar 5(a), terbukti bahwa:  $\mathbf{PC} = \mathbf{PB} + \mathbf{BC} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ .

Juga terbukti bahwa:  $\mathbf{PC} = \mathbf{PA} + \mathbf{AC} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ .

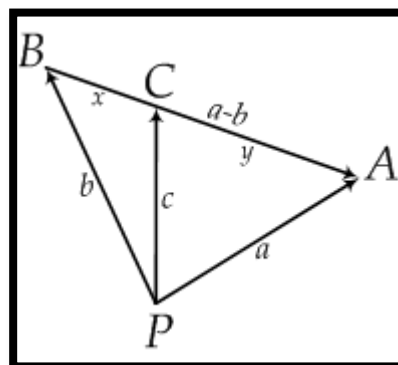


**Gambar 5**

8. Misalkan  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  adalah tiga vektor yang berpangkal di  $P$  sedemikian hingga titik akhirnya  $A$ ,  $B$ , dan  $C$  terletak pada garis seperti ditunjukkan dalam Gambar 6. Jika  $C$  membagi  $BA$  dalam perbandingan  $x : y$  dengan  $x + y = 1$ , jawab:

$$\mathbf{c} = \mathbf{PB} + \mathbf{BC} = \mathbf{b} + x(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = x\mathbf{a} + (1 - x)\mathbf{b} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$$

bila  $C$  membagi  $BA$  dua sama besar, maka  $\mathbf{c} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$  dan  $\mathbf{BC} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$

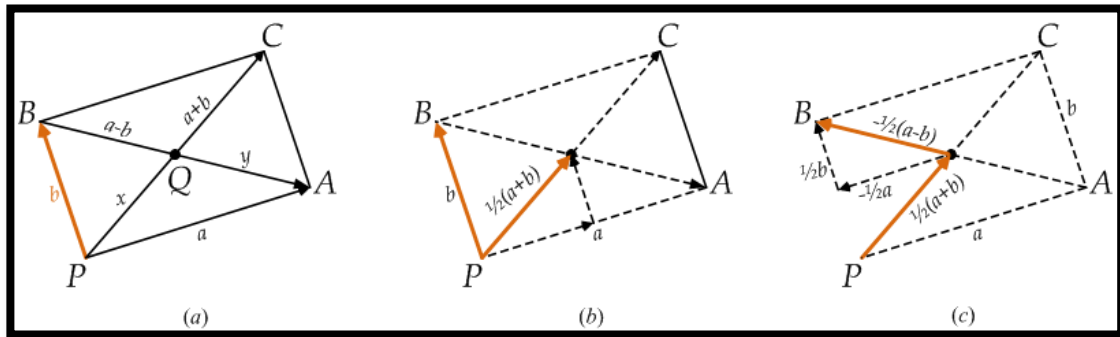


**Gambar 6**

9. Buktikan bahwa:

$$\mathbf{PB} = \mathbf{PQ} + \mathbf{QB} \text{ atau } \mathbf{b} = x(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - y(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = (x - y)\mathbf{a} + (x + y)\mathbf{b}$$

dimana,  $x = y = 1$ , dan  $Q$  adalah titik tengah tiap diagonal, jawab:



Gambar 7

Untuk vektor-vektor  $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$  dan  $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ , cari besar dan arah (a)  $\mathbf{a}$  dan  $\mathbf{b}$ ,

(b)  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ , (c)  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ . jawab:

(a) Untuk  $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$  maka:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5;$$

$$\tan\theta = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{3} = 1.33, \text{ sehingga diperoleh } \theta = 53.13^\circ$$

Untuk  $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$  maka:

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5};$$

$$\tan\theta = \frac{b_2}{b_1} = -\frac{1}{2}, \text{ sehingga diperoleh } \theta = (360^\circ - 26.57^\circ) = 333.43^\circ$$

(b)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) + (2\mathbf{i} - \mathbf{j}) = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ .

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34};$$

$$\tan\theta = \frac{3}{5}, \text{ sehingga diperoleh } \theta = 30.69^\circ$$

(c)  $(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (2\mathbf{i} - \mathbf{j}) - (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = -\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

$$|\mathbf{b} - \mathbf{a}| = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{26};$$

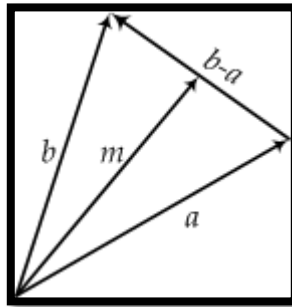
$$\tan\theta = 5, \text{ sehingga diperoleh } \theta = 180^\circ + 78.69^\circ = 258.69^\circ$$



**TUGAS MAHASISWA**

10. Buktikan bahwa: Garis berat ke alas segitiga samakaki adalah tegak lurus pada alas, dimana nilai  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ . Berdasarkan Gambar 8, Tentukan besarnya nilai !

17



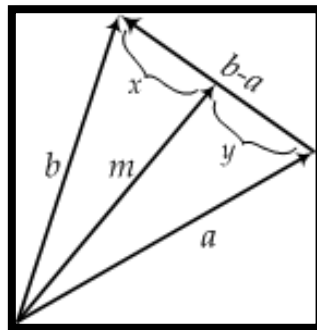
**Gambar 8**

## VEKTOR BIDANG (Part 2)

18

### PEMBAHASAN

5. Buktikan bahwa: Garis berat ke alas segitiga samakaki adalah tegak lurus pada alas, dimana nilai  $|a| = |b|$ . Berdasarkan Gambar 8, Tentukan besarnya nilai  $m$  !



Gambar 8

*Jawab:*

dari soal no. 3 sebelumnya, maka:

$$\mathbf{m} = \mathbf{b} + \mathbf{a} = \mathbf{b} + x(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = x\mathbf{a} + (1 - x)\mathbf{b} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b},$$

karena  $\mathbf{m}$  membagi alas segitiga yang sama besarnya yakni  $x = y = \frac{1}{2}$ , maka:

$$\mathbf{m} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

$$\mathbf{m} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{a})$$

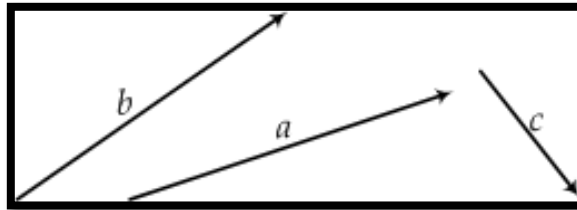
$$\mathbf{m} = 0$$

## VEKTOR BIDANG (Part 2)

19

### TUGAS MAHASISWA

6. Diketahui vektor-vektor  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , dan  $\mathbf{c}$  seperti terlihat pada Gambar 9 berikut ini.



Gambar 9

Maka, Gambarlah:

- $2\mathbf{a}$
  - $-3\mathbf{b}$
  - $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$
  - $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$
  - $\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$
7. Cari **panjang** tiap vektor (harga mutlak) dan **sudut** yang dibuatnya dengan sumbu- $x$  positif dari vektor-vektor berikut:
- $\mathbf{i} + \mathbf{j}$
  - $-\mathbf{i} + \mathbf{j}$
  - $\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$
  - $\mathbf{i} - \sqrt{3}\mathbf{j}$
  - $8\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$
8. Tuliskan tiap vektor di bawah ini dalam bentuk  $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$  pernyataan di bawah ini:
- hubungkan titik pusat dengan  $P(2, -3)$ ;
  - hubungkan  $P_1(2,3)$  dengan  $P_2(4,2)$ ;
  - hubungkan  $P_2(4,2)$  dengan  $P_1(2,3)$ ;
  - vektor satuan dalam arah  $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ ;
  - mempunyai panjang vektor adalah 6 dan arah sudut  $120^\circ$ ;