BUKU AJAR

MATA KULIAH SISTEM LINIER (SISLIN)

HAPPY NUGROHO, S.T., M.T.

LABORATORIUM KOMPUTASI & TEKNOLOGI INFORMASI

UNIVERSITAS MULAWARMAN

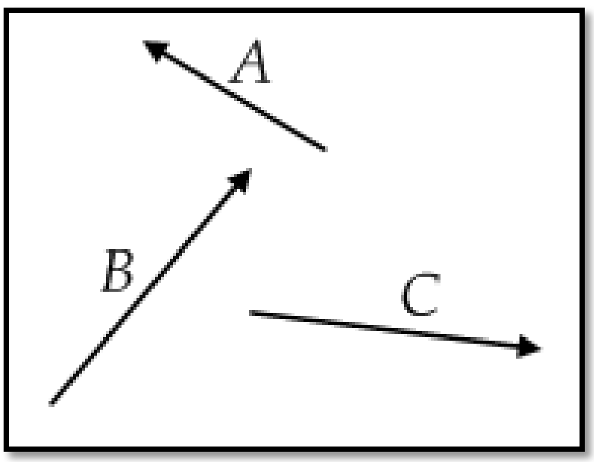
FAKULTAS TEKNIK

PROGRAM STUDI TEKNIK ELEKTRO

TAHUN 2022

A. Vektor Bidang dengan Pendekatan Geometri

Modul ini membahas geometri bidang yang meliputi vektor pada bidang dengan pendekatan secara geometri. Banyak besaran yang dijumpai dalam ilmu pengetahuan misalnya panjang, *massa*, *volume*, dan muatan listrik. Besaran-besaran tersebut dinyatakan dalam satu bilangan yang dinamakan besaran skalar. Ada besaran lain seperti kecepatan, gaya, torka (*torque*) dan pergeserannya, serta untuk menggambarkannya memerlukan tidak hanya bilangan tetapi juga arah. Besaran yang demikian dinamakan vektor. Vektor digambarkan sebagai anak panah (Gambar 1). Panjang panah adalah besarnya vektor, dan arah panah adalah arah vektor. Anak panah mempunyai pangkal dan ujung. Dua vektor dikatakan sama apabila keduanya sama besarnya dan arahnya juga sama.



Gambar 1. Representasi vektor

Peserta Praktikum wajib untuk mempersiapkan Alat dan Bahan di setiap Contoh Soal yang diberikan, yakni:

1. Laptop yang telah ter-*install* aplikasi MatlabR2011a!
2. Menuliskan "*Coding*" seperti terlihat pada Gambar yang tersedia ke dalam menu "*New-Script*"!
3. Lakukan "*Debug*" atau "*Run* (*F*5)"!
4. "*Screenshot*" atau "*Capture*" hasilnya yang muncul pada menu "*Figure*"!

Contoh Soal 1.1: Vektor-vektor yang direpresentasikan dalam bentuk persamaan (1.1) dan (1.2) adalah sebagai berikut,

$$u = (1,2) \tag{1.1}$$

$$v = (-2,2) \tag{1.2}$$

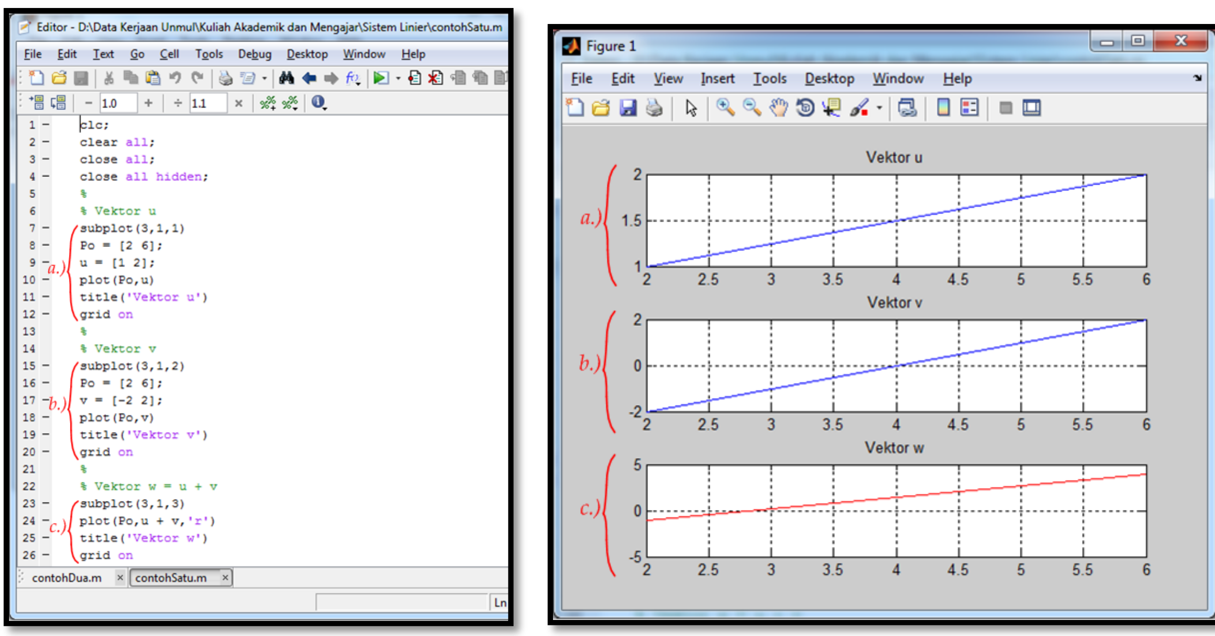
dengan menggunakan Matlab dan titik pangkal pada vektor $P_o = (2,6)$, gambarkan vektor-vektor berikut.

a) u

b) v

c) $u + v$

Jawab:



(a) (b)

Gambar 2. (a) *Coding* untuk membuat representasi vektor
(b) Hasil representasi vektor persamaan (1.1) dan (1.2)

Contoh Soal 1.2: Vektor-vektor yang direpresentasikan dalam bentuk persamaan (1.3) dan (1.4) adalah sebagai berikut,

$$u = (-1{,}2) \tag{1.3}$$

$$v = (4, -2) \tag{1.4}$$

dengan menggunakan Matlab, gambarkan vektor-vektor berikut.

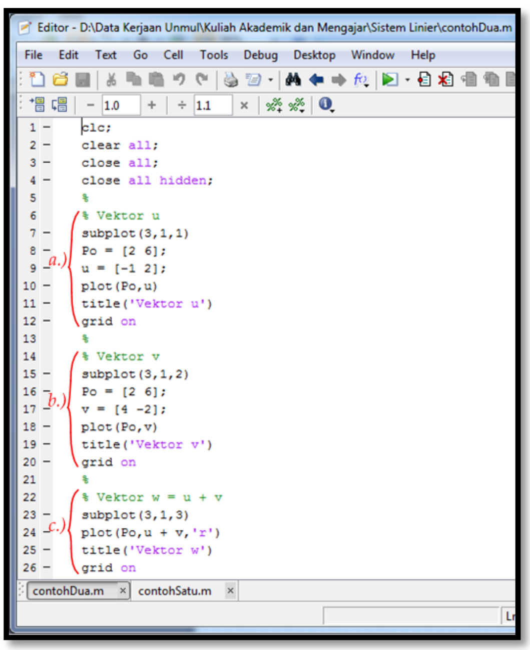
a) u

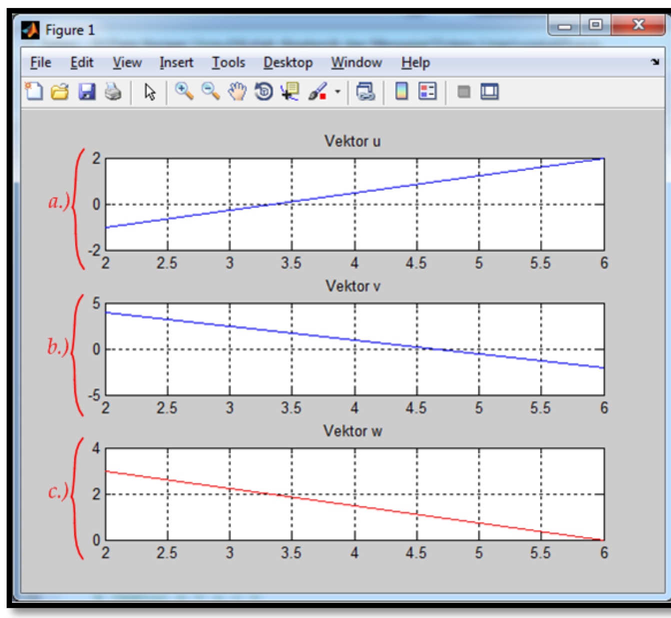
b) v

c) $u + v$

dimana, titik pangkal pada vektor $P_o = (2{,}6)$!

Jawab:





(a) (b)

Gambar 3. (a) *Coding* untuk membuat representasi vektor
(b) Hasil representasi vektor persamaan (1.3) dan (1.4)

B. Kurva Bidang: Penyajian secara Parameter

Sebuah kurva bidang ditentukan oleh pasangan persamaan parametrik berikut,

$$x = f(t) \tag{1.5}$$

$$y = g(t) \tag{1.6}$$

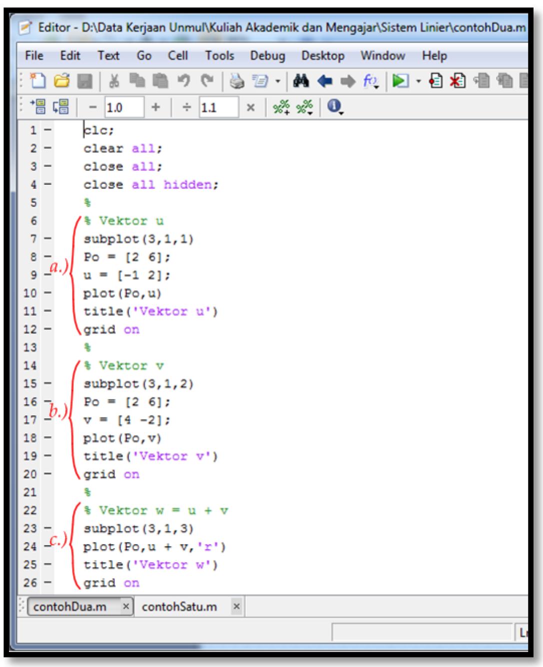
dimana t direpresentasikan dalam bentuk I. Biasanya I adalah sebuah selang tertutup $[a, b]$.

Contoh Soal 1.3: Dengan menggunakan Matlab, dimana interval t yakni $-10 \leq t \leq 10$, Gambarkan grafik untuk persamaan (1.7) dan (1.8) berikut,

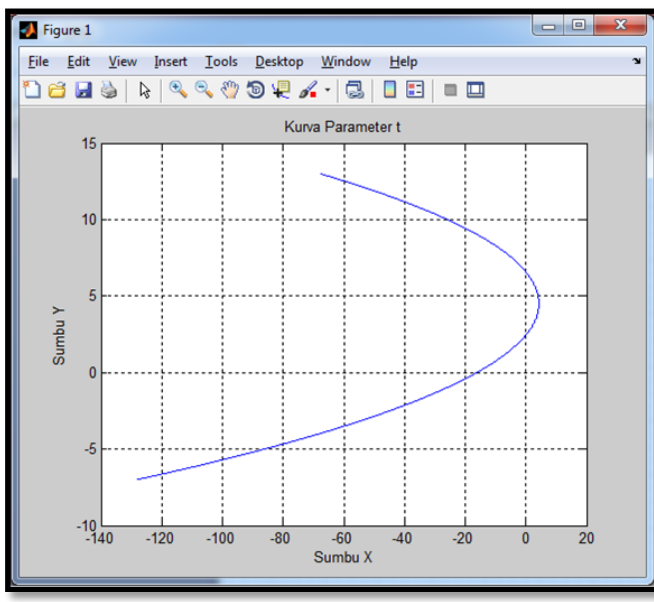
$$x(t) = -t^2 + 3t + 2 \tag{1.7}$$

$$y(t) = t + 3 \tag{1.8}$$

Jawab:



(a)



(b)

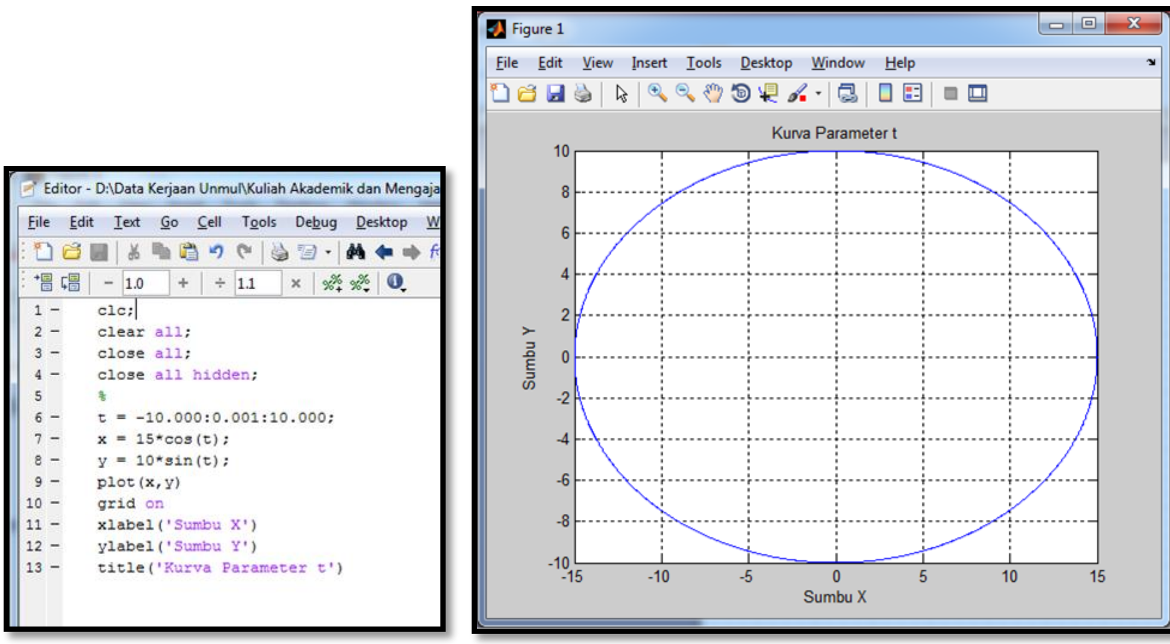
Gambar 4. (a) *Coding* kurva perubahan x dan y terhadap t
(b) Hasil representasi kurva perubahan x dan y terhadap t

Contoh Soal 1.4: Dengan menggunakan Matlab, dimana interval pada variabel t: $-10 \leq t \leq 10$ adalah sebuah Persamaan *Elips*. Maka gambarkan grafik untuk persamaan (1.9) dan (1.10) berikut,

$$x(t) = 15\cos(t) \tag{1.9}$$

$$y(t) = 10\sin(t) \tag{1.10}$$

Jawab:



(a) (b)

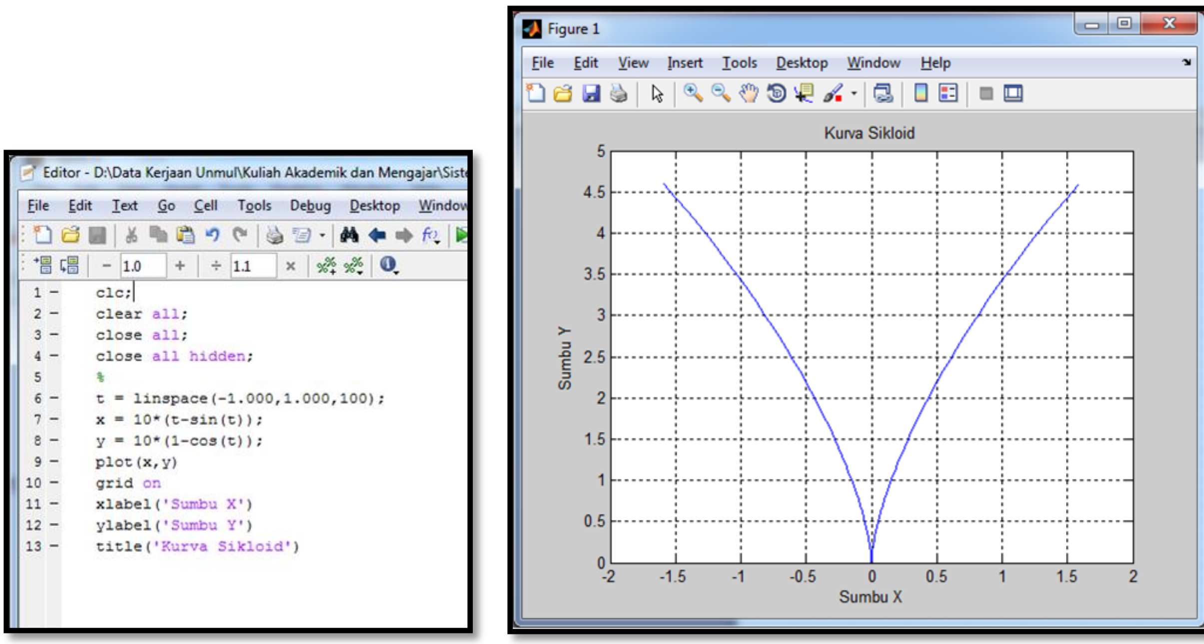
Gambar 5. (a) *Coding* kurva *elips* persamaan (1.9) dan (1.10)
(b) Hasil representasi kurva *elips* persamaan (1.9) dan (1.10)

Contoh Soal 1.5: Dengan menggunakan Matlab, Gambarkan kurva *sikloid* yang dinyatakan oleh untuk persamaan (1.11) dan (1.12) berikut,

$$x(t) = 10(t - \sin(t)) \tag{1.11}$$

$$y(t) = 10(1 - \cos(t)) \tag{1.12}$$

Jawab:



(a) (b)

Gambar 6. (a) *Coding* kurva *sikloid* persamaan (1.11) dan (1.12)
(b) Hasil representasi kurva *sikloid* persamaan (1.11) dan (1.12)

C. Vektor Bidang dengan Pendekatan Aljabar

Representasi vektor secaar aljabar dinyatakan dalam bentuk persamaan (1.13) dan (1.14) berikut,

$$u = (u_1, u_2) \tag{1.13}$$

$$v = (v_1, v_2) \tag{1.14}$$

dimana, u_1 dan u_2 adalah komponen-komponen vektor u, serta v_1 dan v_2 adalah komponen-komponen vektor v. Vektor u dan v dikatakan sama jika dan hanya jika $u_1 = v_1$ dan $u_2 = v_2$. Selain itu, ada beberapa operasi pada vektor yang berlaku, yakni,

1. Operasi penjumlahan. Operasi ini direpresentasikan dalam bentuk persamaan (1.15) berikut,

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \tag{1.15}$$

2. Operasi perkalian skalar dengan vektor. Operasi ini direpresentasikan dalam bentuk persamaan (1.16) berikut,

$$cu = uc = c(u_1, u_2) = (cu_1, cu_2) \tag{1.16}$$

Selain itu, dengan menggunakan sifat-sifat aljabar dan vektor u, v dan b, serta skalar a dan b berlaku sifat aljabar yang direpresentasikan dalam bentuk persamaan (1.17) sampai dengan (1.24) berikut,

3. $u + v = v + u$ (1.17)
4. $(u + v) + w = u + (v + w)$ (1.18)
5. $\mathrm{u} + 0 = 0 + \mathrm{u}$ (1.19)
6. $\mathrm{u} + (-\mathrm{u}) = 0$ (1.20)
7. $\mathrm{a(bu) = (ab)u = u(ab)}$ (1.21)
8. $\mathrm{a(u + v) = au + av}$ (1.22)
9. $\mathrm{(u + b)u = au + bu}$ (1.23)
10. $1\mathrm{u} = \mathrm{u}$ (1.24)

Selain sifat-sifat alajabar vektor, ada lagi sifat-sifat yang berlaku pada vektor yaitu panjang dan hasil kali titik. Untuk panjang dari vektor u dan vektor v direpresentasikan dengan menggunakan persamaan (1.25) dan (1.26) berikut,

$$|u| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2} \tag{1.25}$$

$$|v| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2} \tag{1.26}$$

Untuk hasil kali titik (dot) dari vektor u dan vektor v direpresentasikan dengan menggunakan persamaan (1.27) berikut,

$$u \cdot v = \; u_1 v_1 + u_2 v_2 \tag{1.27}$$

Berdasarkan persamaan (1.27), dapat dikembangkan beberapa sifat hasil kali titik (dot) yang diperlihatkan pada persamaan (1.28) sampai dengan (1.32) berikut,

a. $u \cdot v = v \cdot u$ (1.28)

b. $u \cdot (v + w) = u \cdot v = u \cdot w$ (1.29)

c. $\mathrm{c(u \cdot v) = (cu \cdot v) = (u \cdot cv)}$ (1.30)

d. $0 \cdot \mathrm{u} = 0$ (1.31)

e. $\mathrm{u \cdot u = |u|^2}$ (1.32)

Jika u dan v adalah vektor yang tidak nol, maka hasil kali dari kedua vektor tersebut dinyatakan dalam bentuk persamaan (1.33) berikut,

$$u \cdot v = |u||v| cos\theta \tag{1.33}$$

dimana, θ adalah sudut antara u dan v dengan interval $0 \leq \theta \leq \pi$.

Contoh Soal 1.6: Vektor-vektor yang direpresentasikan dalam bentuk persamaan (1.34) dan (1.35) adalah sebagai berikut,

$$u = (1,4) \tag{1.34}$$

$$v = (3,6) \tag{1.35}$$

dengan menggunakan Matlab, tentukan:

a) $u + v$

b) $u - v$

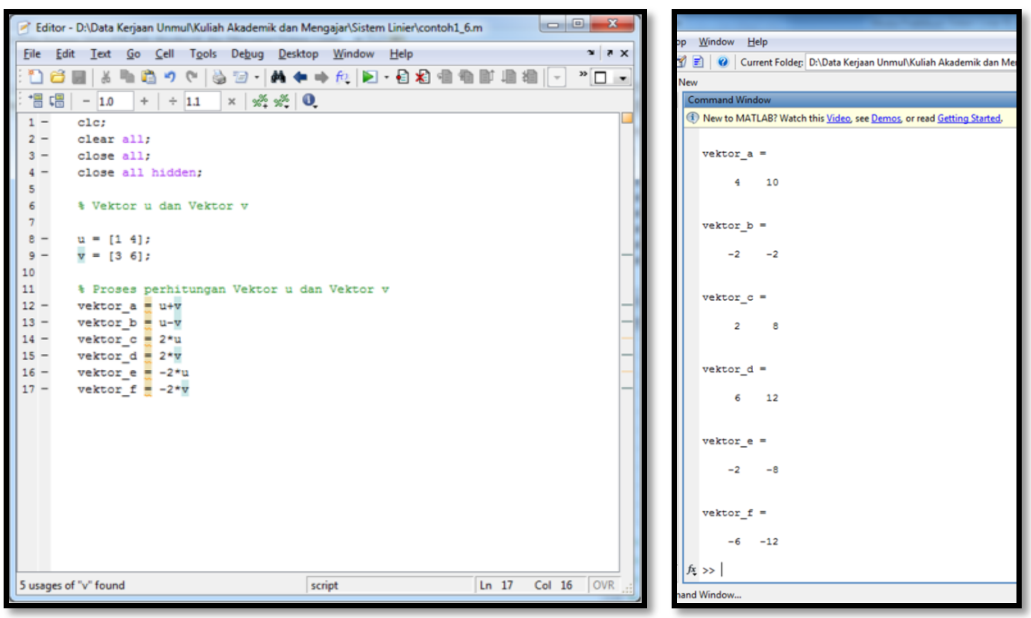
c) $2u$

d) $2v$

e) $-2u$

f) $-2v$

Jawab:



Gambar 7. Hasil representasi persamaan (1.34) dan (1.35)

Contoh Soal 1.7: Vektor-vektor yang direpresentasikan dalam bentuk persamaan (1.34) dan (1.35) adalah sebagai berikut,

$$u = (1,4) \tag{1.34}$$

$$v = (3,6) \tag{1.35}$$

dengan menggunakan Matlab, tentukan:

g) $|u|$

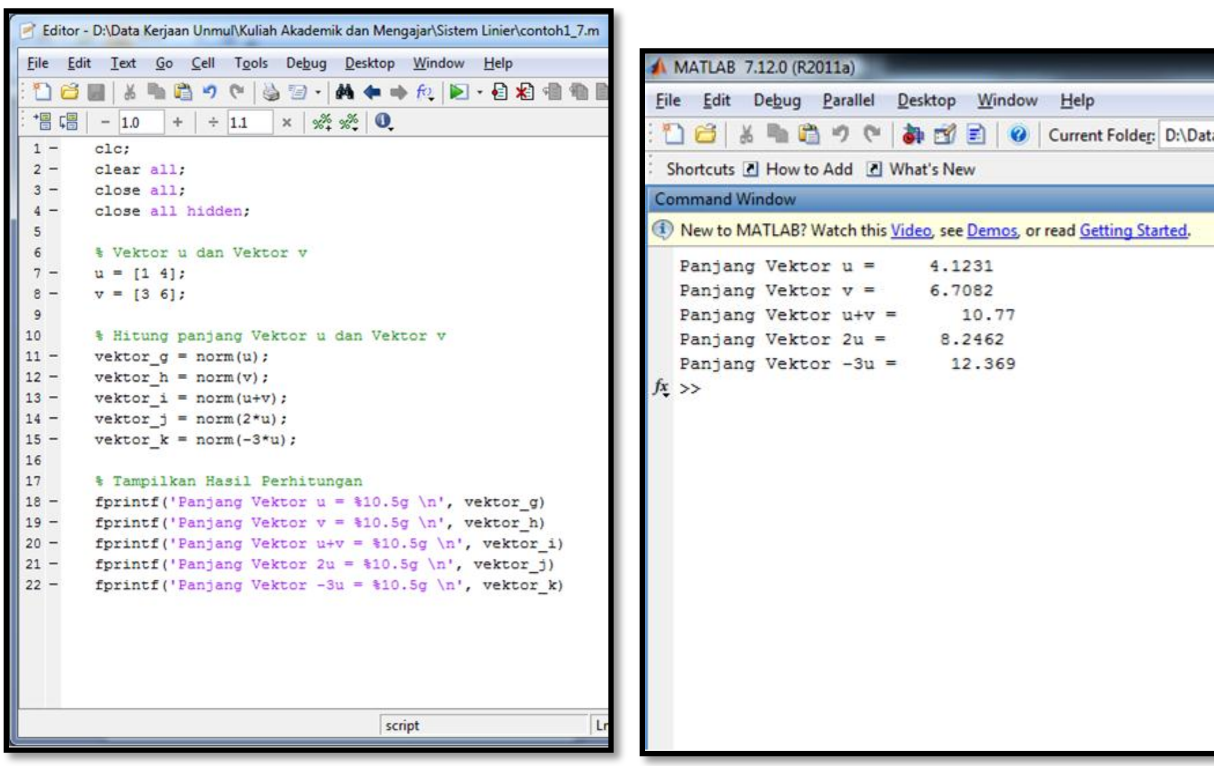
h) $|v|$

i) $|u+v|$

j) $|2u|$

k) $|-3u|$

Jawab:



Gambar 8. Hasil representasi persamaan (1.34) dan (1.35)

TUGAS Soal 1.8: Vektor-vektor yang direpresentasikan dalam bentuk persamaan (1.36) dan (1.37) adalah sebagai berikut,

$$u = (8,6) \tag{1.36}$$

$$v = (5,12) \tag{1.37}$$

dengan menggunakan Matlab, tentukan sudut antara vektor u dan vektor v!

Modul II membahas koordinat Cartesius dalam ruang dimensi tiga, vektor dalam ruang dimensi tiga, hasil kali silang, grafik dan kurva dalam dimensi tiga, kecepatan, percepatan dan kelengkungan, permukaan dalam ruang dimensi tiga, koordinat tabung dan koordinat bola.

Peserta Praktikum wajib untuk mempersiapkan Alat dan Bahan di setiap Contoh Soal yang diberikan, yakni:

5. Laptop yang telah ter-*install* aplikasi MatlabR2011a!
6. Menuliskan "*Coding*" seperti terlihat pada Gambar yang tersedia ke dalam menu "*New-Script*"!
7. Lakukan "*Debug*" atau "*Run* ($F5$)"!
8. "*Screenshot*" atau "*Capture*" hasilnya yang muncul pada menu "*Figure*"!

Dengan menggunakan Matlab dapat menjawab beberapa simulasi untuk Geometri Ruang yang meliputi, koordinat cartesius dalam ruang dimensi tiga, vektor dalam ruang dimensi tiga, hasil kali silang, garis dan kurva dalam ruang dimensi tiga, kecepatan, percepatan, kelengkungan, permukaan dalam ruang dimensi tiga, koordinat cartesius, koordinat tabung, koordinat bola dan gerak revolusi permukaan.

D. Koordinat Cartesius dalam Ruang Dimensi Tiga

Subbab ini membahas grafik 3 dimensi untuk 2 titik dimana titik pertama direpresentasikan dalam bentuk persamaan (2.1) dan (2.2) berikut,

$$P_0 = (x_o, y_o, z_o) \tag{2.1}$$

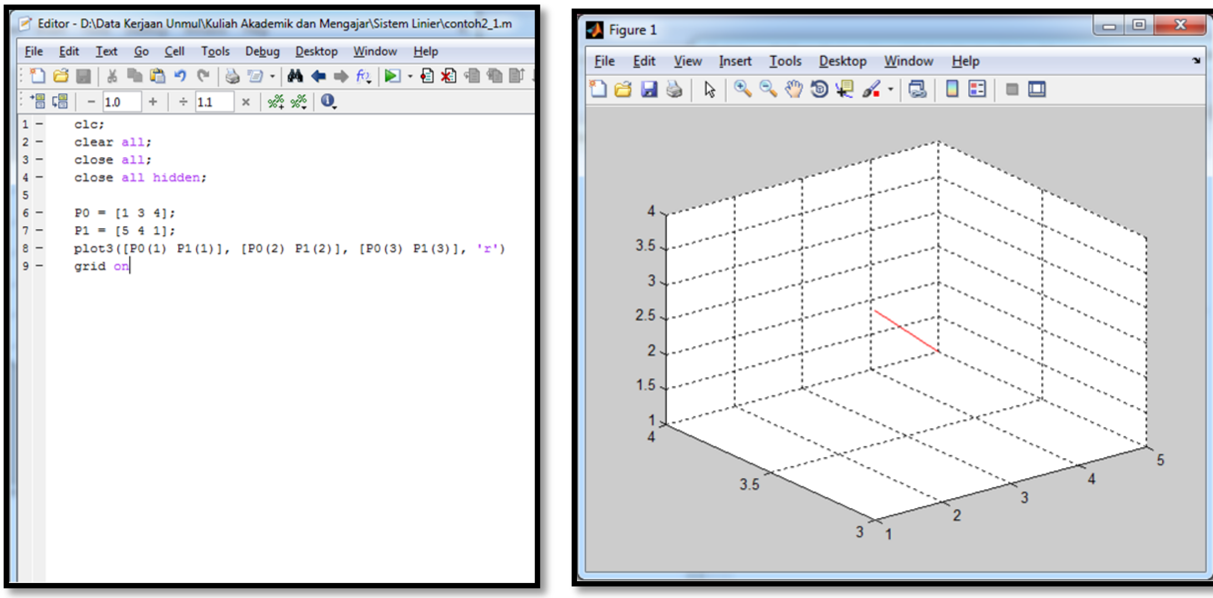
$$P_1 = (x_1, y_1, z_1) \tag{2.2}$$

Contoh Soal 2.1: Dengan menggunakan Matlab, gambarkan titik yang direpresentasikan dalam bentuk persamaan (2.3) dan (2.4) berikut,

$$P_0 = (1,3,4) \tag{2.3}$$

$$P_1 = (5,4,1) \tag{2.4}$$

Jawab:



(a) (b)

Gambar 1. (a) *Coding* untuk membuat grafik 3 dimensi untuk 2 titik
(b) Hasil representasi vektor persamaan (2.3) dan (2.4)

Selanjutnya akan dibahas grafik 3 dimensi untuk 5 itik yang direpresentasikan dalam persamaan (2.5) sampai dengan (2.9)berikut,

$$P_0 = (x_o, y_o, z_o) \tag{2.5}$$

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1) \tag{2.6}$$

$$P_2 = (x_2, y_2, z_2) \tag{2.7}$$

$$P_3 = (x_3, y_3, z_3) \tag{2.8}$$

$$P_4 = (x_4, y_4, z_4) \tag{2.9}$$

Contoh Soal 2.2: Dengan menggunakan Matlab, gambarkan titik yang direpresentasikan dalam bentuk persamaan (2.10) sampai dengan (2.14) berikut,

$$P_0 = (1,1,1) \tag{2.10}$$

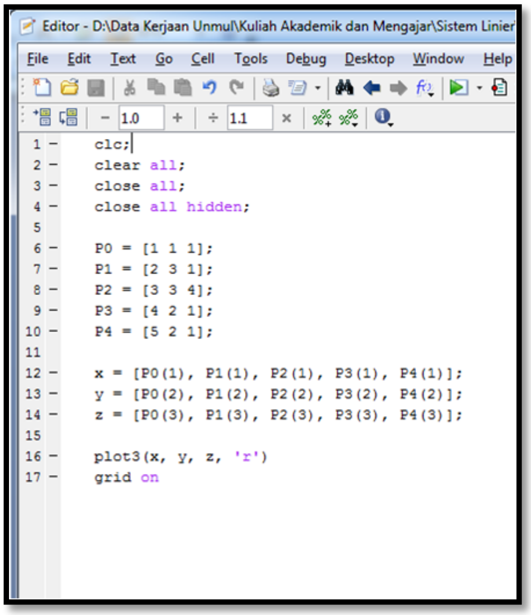
$$P_1 = (2,3,1) \tag{2.11}$$

$$P_2 = (3,3,4) \tag{2.12}$$

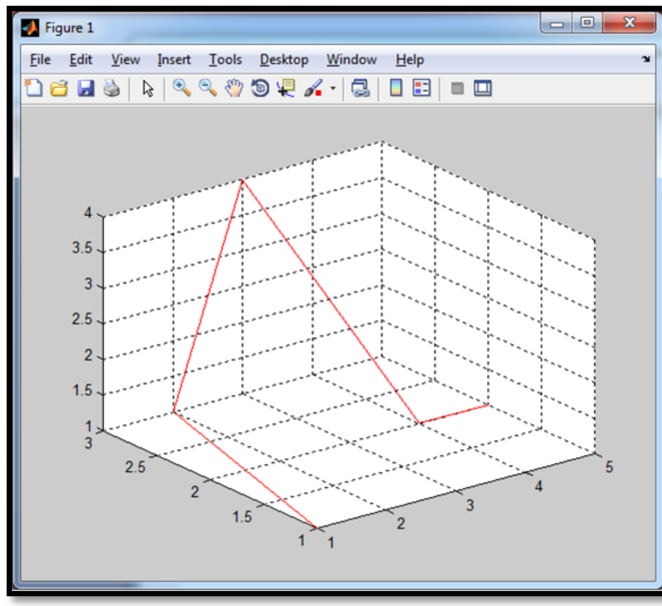
$$P_3 = (4,2,1) \tag{2.13}$$

$$P_4 = (5,2,1) \tag{2.14}$$

Jawab:



(a)



(b)

Gambar 2. (a) *Coding* representasi vektor ruang
(b) Hasil representasi vektor persamaan (2.10) sampai dengan (2.14)

E. Vektor dalam Ruang Dimensi Tiga

Vektor dalam ruang 3 dimensi direpresentasikan dalam bentuk persamaan (2.15) dan (2.16) berikut,

$$u = (u_1, u_2, u_3) \tag{2.15}$$

$$v = (v_1, v_2, v_3) \tag{2.16}$$

Panjang dari vektor u dan vektor v direpresentasikan dengan menggunakan persamaan (2.17) dan (2.18) berikut,

$$|u| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2} \tag{2.18}$$

$$|v| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2} \tag{2.19}$$

Vektor-vektor dalam ruang 3 dimensi ini dapat ditambahkan, dikalikan dengan skalar dan dikurangkan sama seperti dengan vektor bidang 2 dimensi. Selain itu, hukum-hukum aljabar yang dipenuhi dengan hukum-hukum aljabar yang telah dipelajari sebelumnya. Hasil kali titik (dot) dari vektor u dan vektor v direpresentasikan dengan menggunakan persamaan (2.20) berikut,

$$u \cdot v = \ u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \tag{2.20}$$

Jika u dan v adalah vektor yang tidak nol, maka hasil kali titik (dot) dari kedua vektor tersebut dinyatakan dalam bentuk persamaan (2.21) berikut,

$$u \cdot v = |u||v|cos\theta \tag{2.21}$$

Sudut vektor dan $cosinus$ arah vektor dihitung dengan menggunakan persamaan (2.22) sampai dengan (2.24) berikut,

$$cos\alpha = \frac{u_1}{|u|} \tag{2.22}$$

$$cos\beta = \frac{u_2}{|u|} \tag{2.23}$$

$$cos\gamma = \frac{u_3}{|u|} \tag{2.24}$$

dimana berdasarkan persamaan (2.18) sebelumnya, maka

$$|u| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2} \tag{2.18}$$

Contoh Soal 2.3: Vektor-vektor yang direpresentasikan dalam bentuk persamaan (2.25) dan (2.26) berikut,

$$u = (1,2,4) \tag{2.25}$$

$$v = (-2,4,6) \tag{2.26}$$

dengan menggunakan Matlab, gambarkan vektor-vektor berikut,

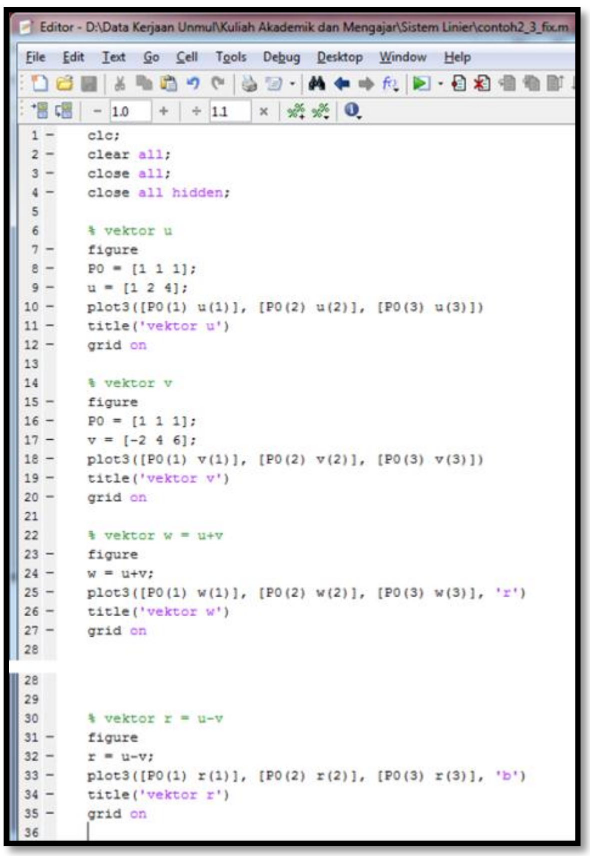
l) u

m) v

n) $w = u + v$

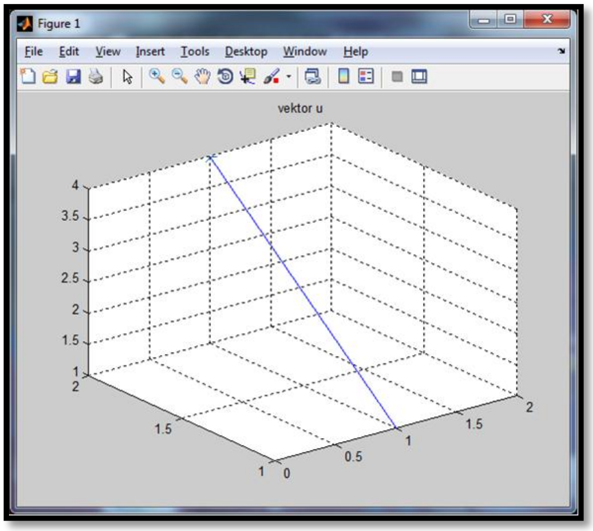
o) $r = u - v$

Jawab:

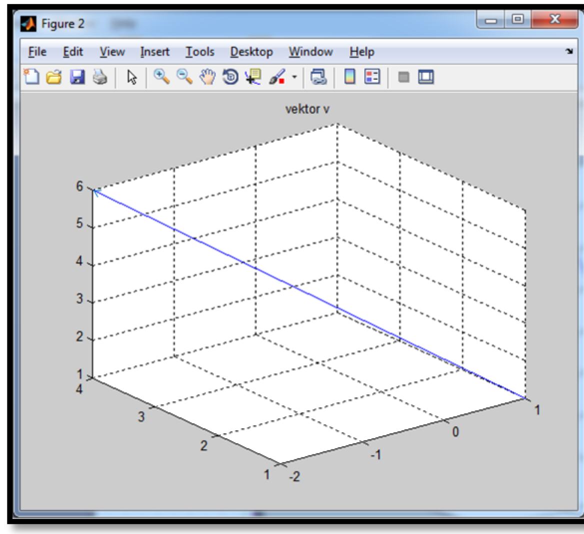



```
clc;
clear all;
close all;
close all hidden;

% vektor u
figure
P0 = [1 1 1];
u = [1 2 4];
plot3([P0(1) u(1)], [P0(2) u(2)], [P0(3) u(3)])
title('vektor u')
grid on

% vektor v
figure
P0 = [1 1 1];
v = [-2 4 6];
plot3([P0(1) v(1)], [P0(2) v(2)], [P0(3) v(3)])
title('vektor v')
grid on

% vektor w = u+v
figure
w = u+v;
plot3([P0(1) w(1)], [P0(2) w(2)], [P0(3) w(3)], 'r')
title('vektor w')
grid on



% vektor r = u-v
figure
r = u-v;
plot3([P0(1) r(1)], [P0(2) r(2)], [P0(3) r(3)], 'b')
title('vektor r')
grid on
```

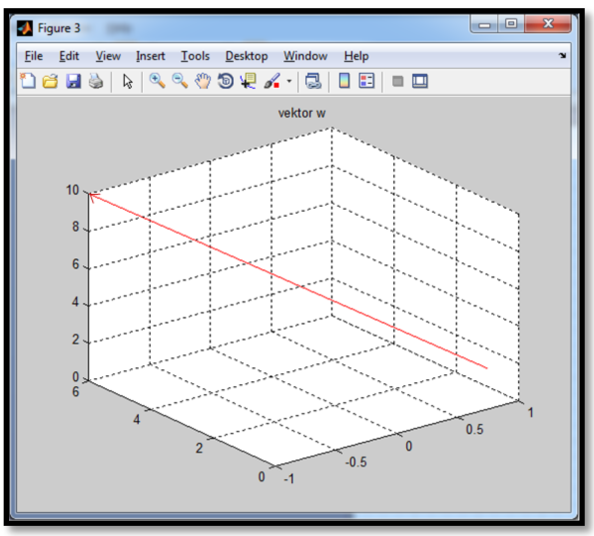
Gambar 3. *Coding* representasi vektor ruang persamaan (2.25) dan (2.26)



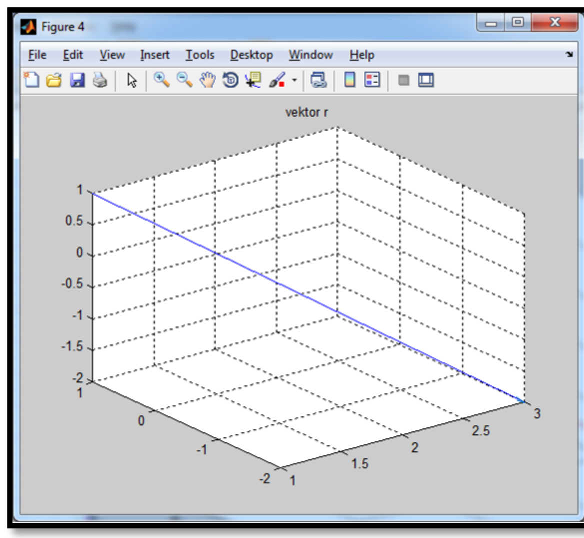
(a)



(b)



(c)



(d)

Gambar 4. Hasil representasi vektor ruang persamaan (2.25) dan (2.26) (a) vektor u; (b) vektor v; (c) vektor w; (d) vektor r

Contoh Soal 2.4: Vektor-vektor yang direpresentasikan dalam bentuk persamaan (2.27) dan (2.28) berikut,

$$u = (4,2,1) \tag{2.27}$$

$$v = (-1,2,8) \tag{2.28}$$

dengan menggunakan Matlab, gambarkan vektor-vektor berikut,

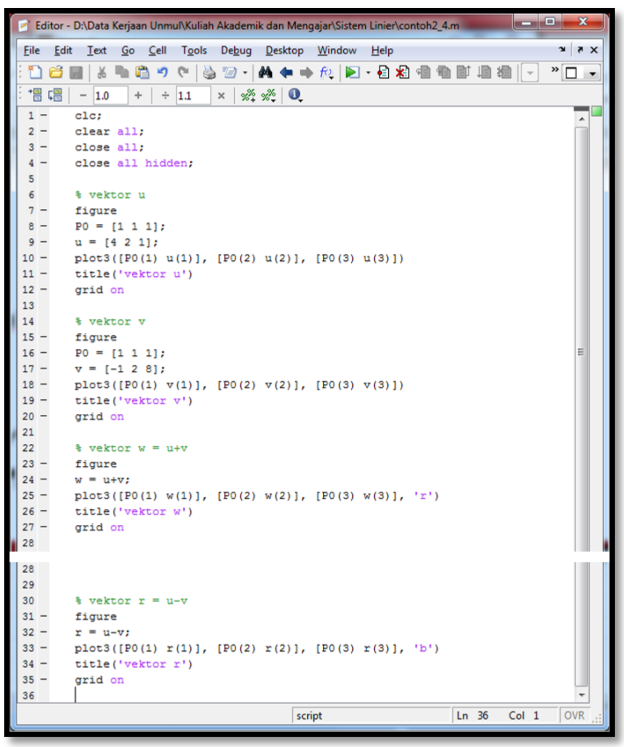
a) u

b) v

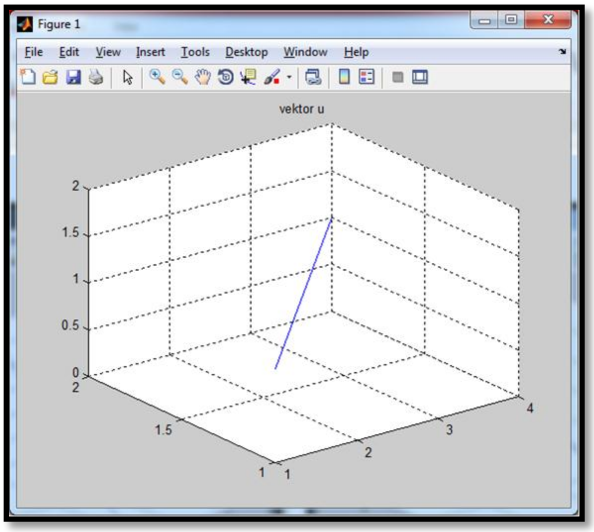
c) $w = u + v$

d) $r = u - v$

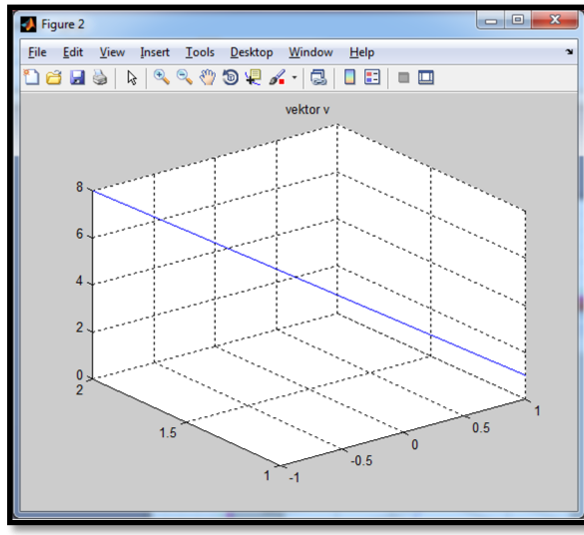
Jawab:



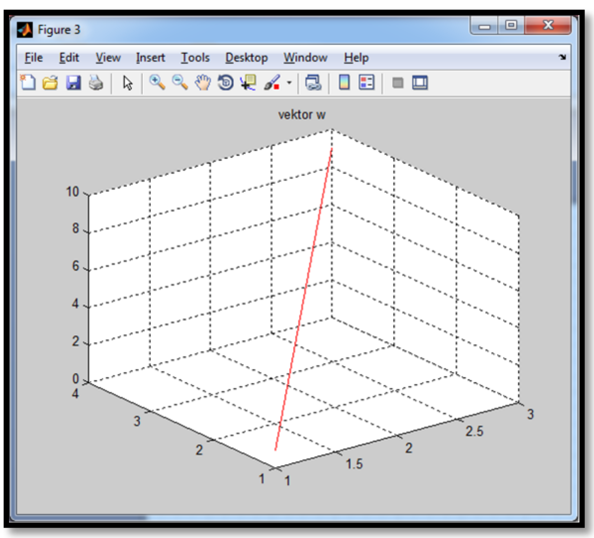
Gambar 5. *Coding* representasi vektor ruang pada persamaan (2.27) dan (2.28)



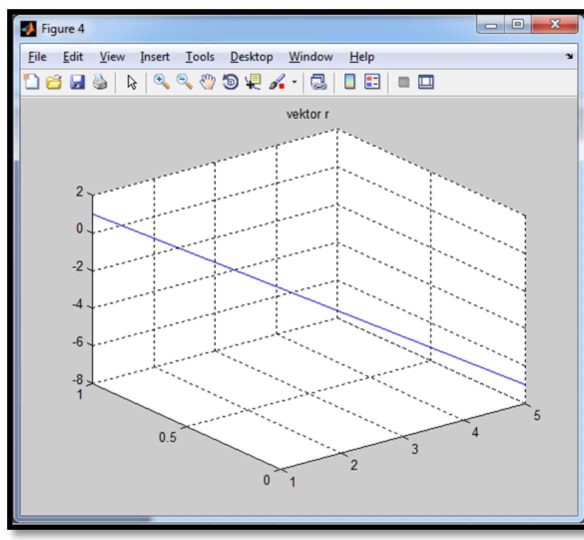
(a)



(b)



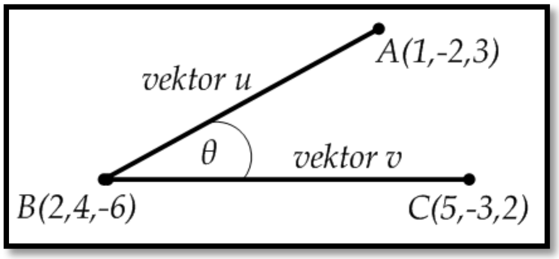
(c)



(d)

Gambar 6. Hasil representasi vektor ruang pada persamaan (2.27) dan (2.28) (a) vektor u; (b) vektor v; (c) vektor w; (d) vektor r

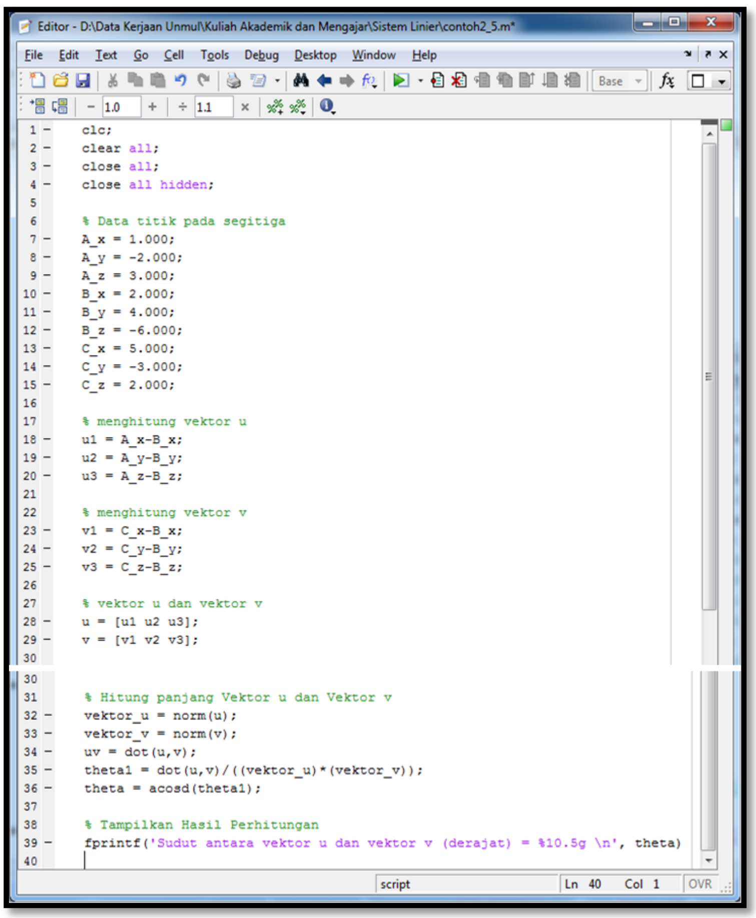
Contoh Soal 2.5: Sebuah segitiga direpresentasikan pada Gambar 7 berikut ini,



Gambar 7. Representasi segitiga ABC

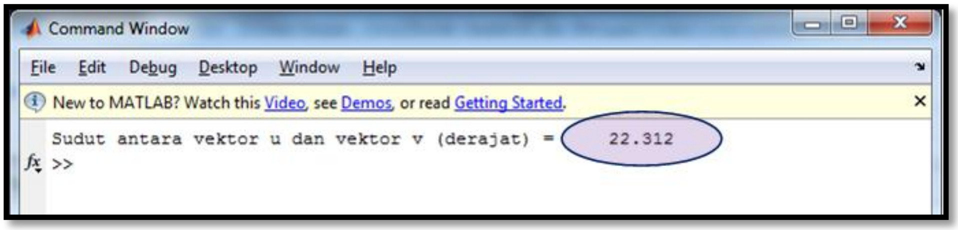
dengan menggunakan Matlab, tentukan sudut antara vektor u dan vektor v!

Jawab:




```
clc;
clear all;
close all;
close all hidden;

% Data titik pada segitiga
A_x = 1.000;
A_y = -2.000;
A_z = 3.000;
B_x = 2.000;
B_y = 4.000;
B_z = -6.000;
C_x = 5.000;
C_y = -3.000;
C_z = 2.000;

% menghitung vektor u
u1 = A_x-B_x;
u2 = A_y-B_y;
u3 = A_z-B_z;

% menghitung vektor v
v1 = C_x-B_x;
v2 = C_y-B_y;
v3 = C_z-B_z;

% vektor u dan vektor v
u = [u1 u2 u3];
v = [v1 v2 v3];


% Hitung panjang Vektor u dan Vektor v
vektor_u = norm(u);
vektor_v = norm(v);
uv = dot(u,v);
theta1 = dot(u,v)/((vektor_u)*(vektor_v));
theta = acosd(theta1);

% Tampilkan Hasil Perhitungan
fprintf('Sudut antara vektor u dan vektor v (derajat) = %10.5g \n', theta)
```

Gambar 8. *Coding* untuk menentukan sudut *theta* (θ)



Gambar 9. Hasil sudut $theta$ (θ)

F. Hasil Kali Silang

Vektor dalam ruang 3 dimensi direpresentasikan dalam bentuk persamaan (2.29) dan (2.30) berikut,

$$u = (u_1, u_2, u_3) \tag{2.29}$$

$$v = (v_1, v_2, v_3) \tag{2.30}$$

Hasil kali silang dari kedua vektor direpresentasikan dalam bentuk persamaan (2.31) berikut,

$$u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \tag{2.31}$$

Contoh Soal 2.6: Vektor-vektor yang direpresentasikan dalam bentuk persamaan (2.32) dan (2.33) adalah sebagai berikut,

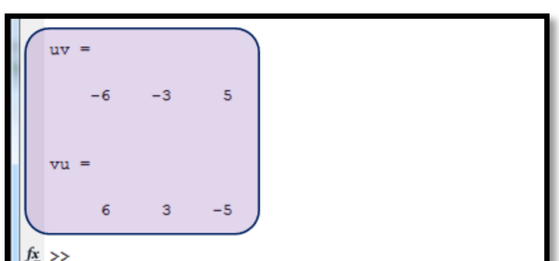
$$u = (2,1,3) \tag{2.32}$$

$$v = (3,4,6) \tag{2.33}$$

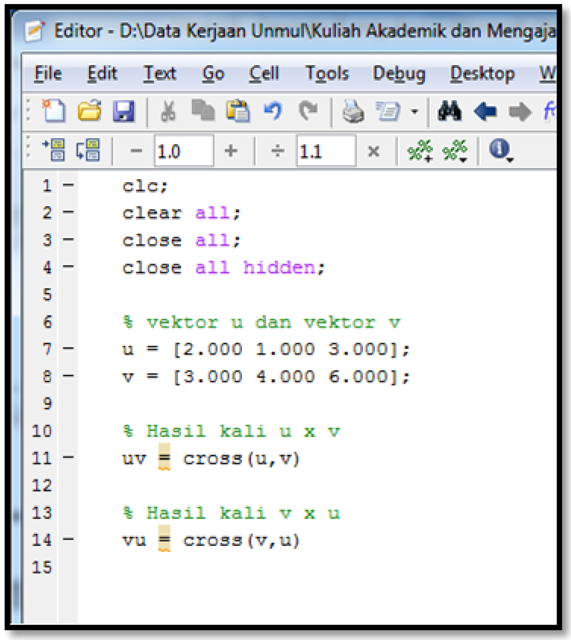
dengan menggunakan Matlab, tentukan nilai dari hasil kali silang berikut,

a) $u \times v$
b) $v \times u$

Jawab:



Gambar 10. Hasil kali silang dari persamaan (2.32) dan (2.33)



Gambar 11. *Coding* untuk menghitung hasil kali silang persamaan (2.32) dan (2.33)

G. Garis dan Kurva dalam Ruang Tiga Dimensi

Sebuah kurva dalam ruang tiga dimensi dinyatakan dalam bentuk persamaan (2.34) sampai dengan (2.36) berikut,

$$x = f(t) \tag{2.34}$$

$$y = g(t) \tag{2.35}$$

$$z = h(t) \tag{2.36}$$

dimana, t anggota I; dan f, g, dan h kontinu pada selang I. Dalam bahasa vektor, suatu kurva dinyatakan dengan cara memberikan vektor posisi $r = r(t)$ dari suatu titik $P = P(t)$ yang direpresentasikan dalam bentuk persamaan (2.37) berikut,

$$r = r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k = (f(t), g(t), h(t)) \tag{2.37}$$

Contoh Soal 2.7: Suatu kurva dalam ruang tiga dimensi dinyatakan dalam bentuk persamaan (2.38) sampai dengan (2.40) adalah sebagai berikut,

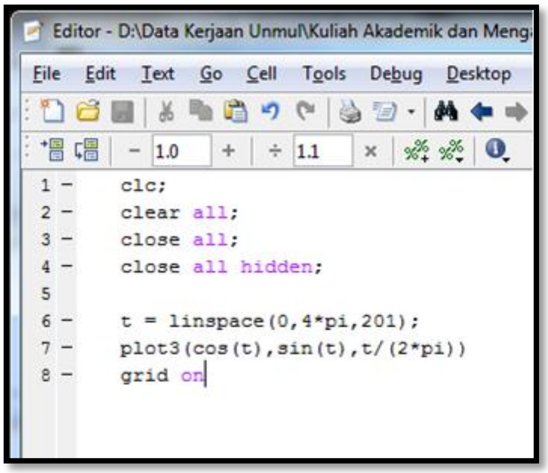
$$x(t) = \cos(t) \tag{2.38}$$

$$y(t) = \sin(t) \tag{2.39}$$

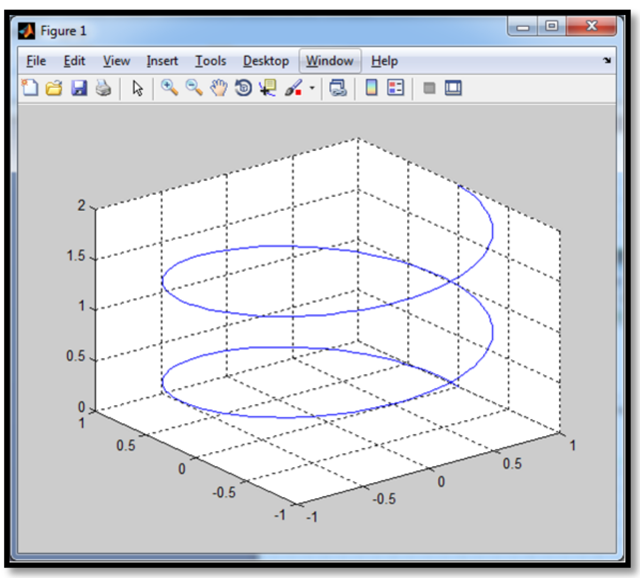
$$z(t) = \frac{t}{2\pi} \tag{2.40}$$

dengan menggunakan Matlab, gambarkan kurva tersebut!

Jawab:



Gambar 12. *Coding* grafik 3 dimensi dari persamaan (2.38) s/d (2.40)



Gambar 13. Hasil Grafik 3 dimensi dari persamaan (2.38) s/d (2.40)

Garis adalah sebuah kurva yang paling sederhana. Jika adalah kemiringan dari suatu garis dalam ruang 3 dimensi dan garis tersebut melewati titik $P_0 = [x_0, y_0, z_0]$ maka persamaan parameter dari garis tersebut direpresentasikan dalam bentuk persamaan (2.41) sampai dengan (2.43) berikut,

$$x(t) = x_0 + \mathrm{a}t \tag{2.41}$$

$$y(t) = y_0 + \mathrm{a}t \tag{2.42}$$

$$z(t) = z_0 + \mathrm{a}t \tag{2.43}$$

Contoh Soal 2.8: Suatu kurva dalam ruang tiga dimensi dinyatakan dalam bentuk persamaan (2.44) sampai dengan (2.46) adalah sebagai berikut,

$$x(t) = 1 + 3t \tag{2.44}$$

$$y(t) = 3 + 2t \tag{2.45}$$

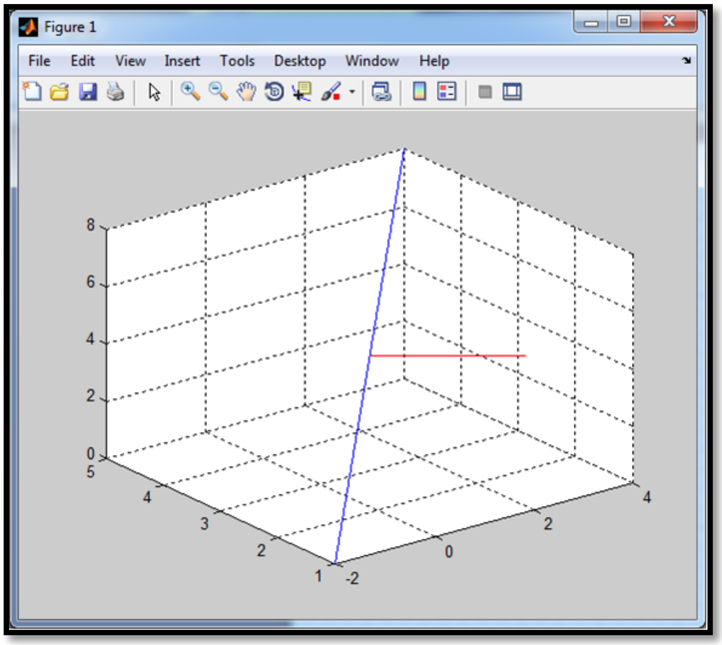
$$z(t) = 4 + 4t \tag{2.46}$$

dengan menggunakan Matlab, gambarkan kurva tersebut!

Jawab:

```
clc;
clear all;
close all;
close all hidden;

a = 3.000; b = 2.000; c = 4.000;
x0 = 1.000; y0 = 3.000; z0 = 4.000;
t = -1.000:0.01:1.000;
x = x0 + a*t;
y = y0 + b*t;
z = z0 + c*t;
plot3(x,y,z);
hold on
L = [a b c];
P0 = [x0 y0 z0];
plot3([L(1) P0(1)], [L(2) P0(2)], [L(3) P0(3)], 'r')
hold off
grid on
```

Gambar 14. *Coding* grafik 3 dimensi dari persamaan (2.44) s/d (2.46)



Gambar 15. Hasil Grafik 3 dimensi dari persamaan (2.44) s/d (2.46)

TUGAS SOAL 2.9: Tentukan sudut-sudut pada vektor yang direpresentasikan oleh persamaan (2.47) berikut,

$$u = (4, -5,3) \qquad (2.47)$$

Selamat mengerjakan!