KALKULUS (3 SKS)

Bahan Ajar by:

Fahrul Agus

Program Studi Informatika

Universitas Mulawarman

Jan, 2022

BAB 2. TURUNAN

2.1. Dua Problem yang menjadi Dasar Turunan

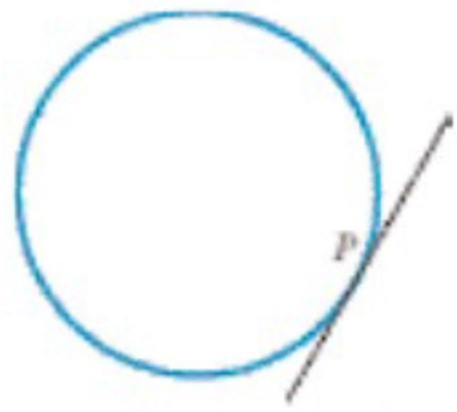
- Problem Garis Singgung: klasik, sdh berumur lama/tua → Persoalan geometri

- Problem Kecepatan Sesaat (*Instantaneous Velocity*): relatif baru, mucul dari percobaan Kepler, Galileo dan Newton → Persoalan mekanika

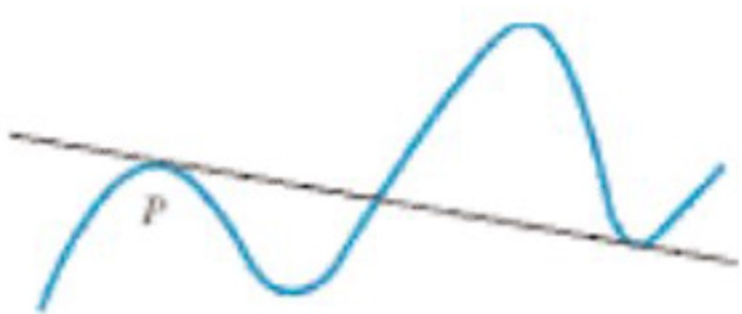
* Kedua masalah nampaknya tidak terkait, tapi merupakan masalah yang sama

•Problem Garis Singgung

Gagasan Euclides tentang garis singgug sebagai garis yang menyentuh suatu kurva hanya pada satu titik, benar untuk lingkaran.



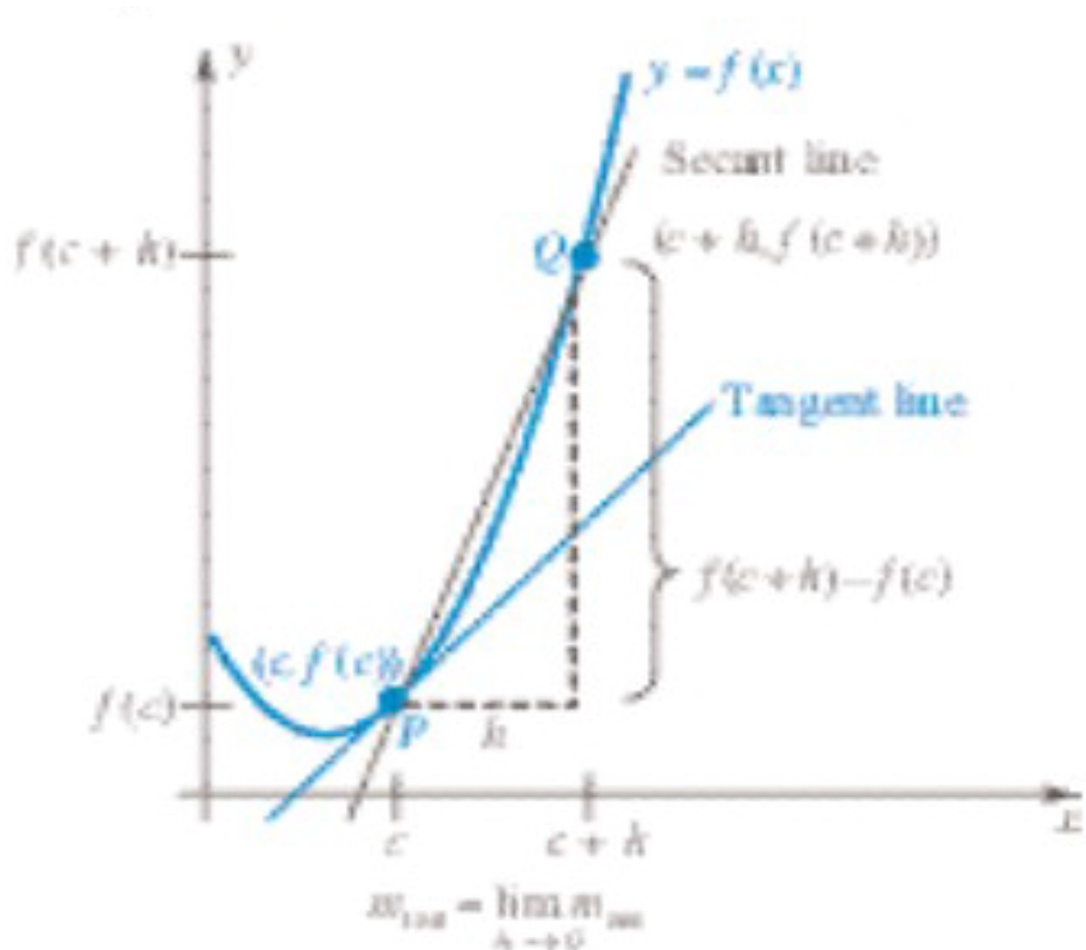
tetapi sama sekali tidak memuaskan unutk kebanyakan kurva lain



Gagasan garis singgung dapat menjelaskan kurva di titik P, namun akan lebih jelas jika dijelaskan dengan konsep limit.

Misalkan kurva tersebut grafik dari persamaan y = *f(x)*. Maka P mempunyai koordinat (c, f(c)), titik Q di dekatnya mempunyai koordinat (c + h, F(c + h)), dan talibusur yang melalui P dan Q mempunyai kemiringan m_{sec} sebesar:

$$m_{sec} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$



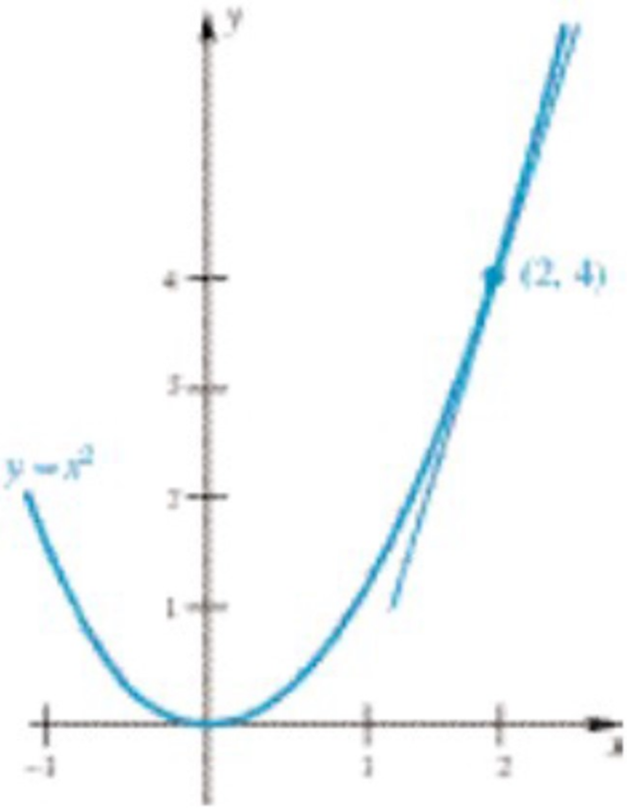
DEFINISI GARIS SINGGUNG

Garis Singgung pada kurva y = f(x) di titik P(c, f(c)) adalah garis yang melalui P dengan kemiringan

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} m_{\sec} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Asalkan bahwa limit ini ada dan bukan tak hingga atau negative tak hingga.

Contoh 1.

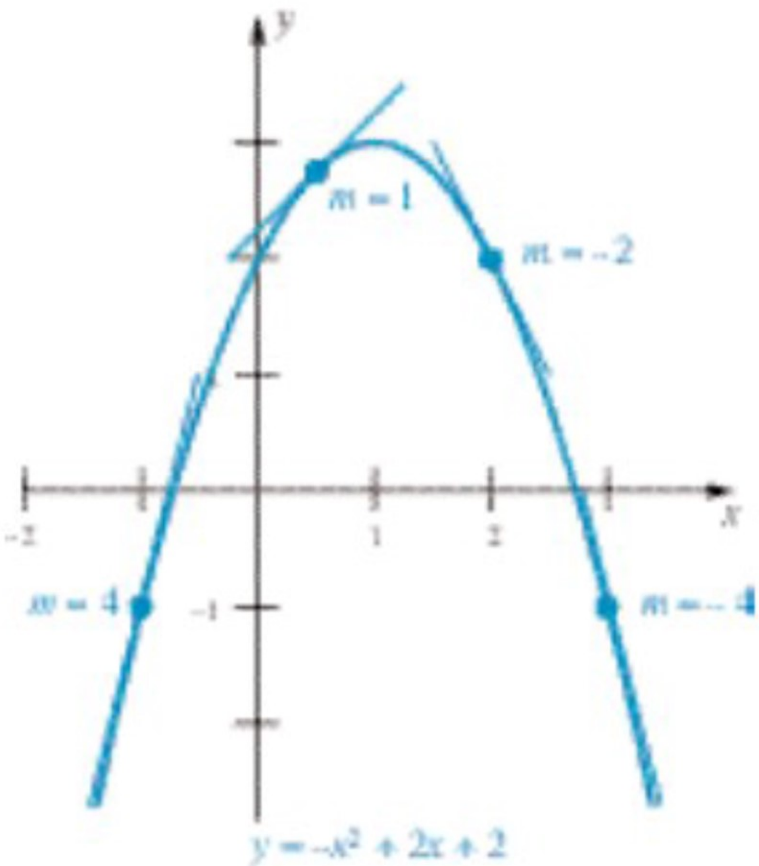


Soal: Carilah kemiringan garis singgung pada kurva *f(x)* = x^2 di titik (2,4).

Solusi:

$$\begin{aligned} m_{\tan} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Contoh 2.



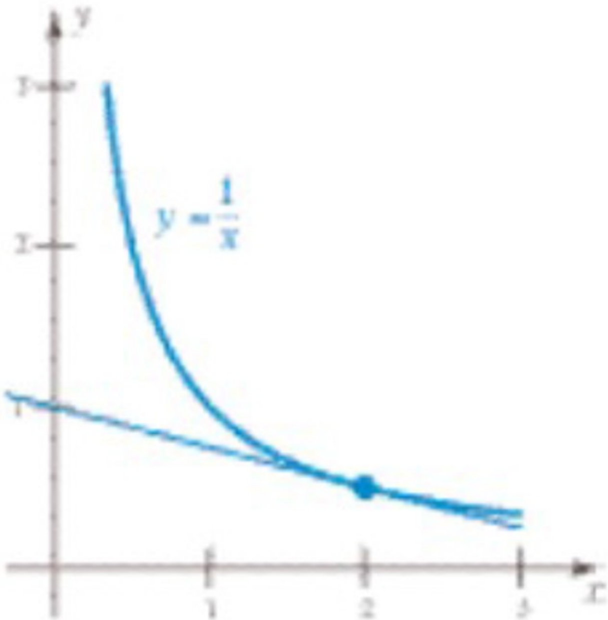
Soal: Carilah kemiringan garis siggung pada kurva y = *f(x)* = - x2 + 2x + 2 di titik-titik dengan absis -1, 1/2, 2, dan 3.

Solusi:

$$\begin{aligned} m_{\tan} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-(c+h)^2+2(c+h)+2-(-c^2+2c+2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-c^2-2ch-h^2+2c+2h+2+c^2-2c-2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(-2c-h+2)}{\cancel{h}} \\ &= -2c+2 \end{aligned}$$

Keempat kemiringan yang diinginkan (diperoleh dengan menetapkan c = -1, , 2, dan 3) adalah 4, 1, -2, dan -4.

Contoh 3.



Soal: Carilah persamaan garis singgung pada kurva y = 1/*x* di titik $(2, \frac{1}{2})$

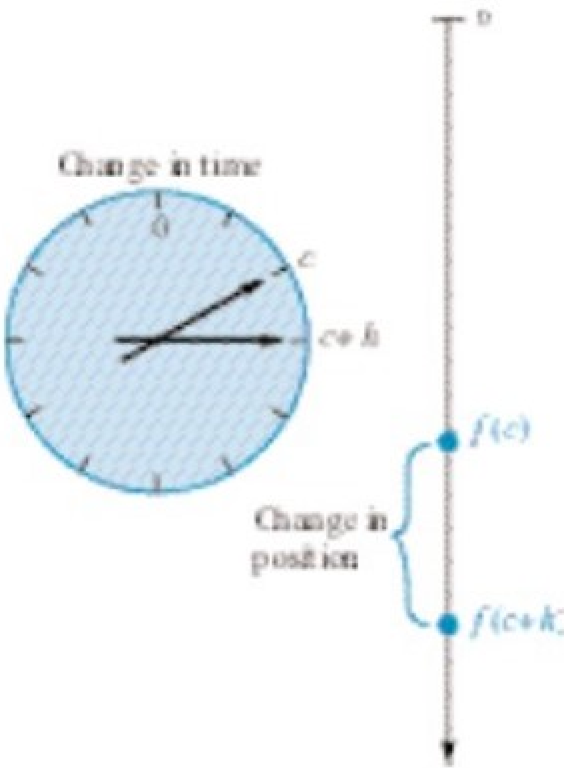
Solusi:

$$
\begin{aligned}
m_{\tan} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2}{2(2+h)} - \frac{2+h}{2(2+h)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2 - (2+h)}{2(2+h)h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{2(2+h)h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{2(2+h)} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Dengan mengetahui bahwa kemiringan garis adalah $-\frac{1}{4}$ dan titik $(2, \frac{1}{2})$ maka dengan mudah kita dapat menuliskan persamaan dengan menggunakan bentuk kemiringan-titik $y - y_o = m(x - x_o)$. Hasilnya adalah y = 1 -1/4x

Problem Kecepatan Sesaat

- Apa beda kecepatan rata-rata vs kecepatan sesaat



$$V_{rata-rata} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

•Kecepatan Sesaat

Definition Instantaneous Velocity

If an object moves along a coordinate line with position function $f(t)$, then its **instantaneous velocity** at time c is

$$v = \lim_{h \to 0} v_{\text{avg}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

provided that the limit exists and is not ∞ or $-\infty$.

In the case where $f(t) = 16t^2$, the instantaneous velocity at $t = 1$ is

$$\begin{aligned} v &= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{16(1+h)^2 - 16}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{16 + 32h + 16h^2 - 16}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (32 + 16h) = 32 \end{aligned}$$

Two Problems with One Theme

Now you see why we called this section "Two Problems with One Theme." Look at the definitions of *slope of the tangent line* and *instantaneous velocity*. They give different names for the same mathematical concept.

EXAMPLE 4 A particle moves along a coordinate line and s, its directed distance in centimeters from the origin after t seconds, is given by $s = f(t) = \sqrt{5t + 1}$. Find the instantaneous velocity of the particle after 3 seconds.

SOLUTION Figure 11 shows the distance traveled as a function of time. The instantaneous velocity at time $t = 3$ is equal to the slope of the tangent line at $t = 3$.

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{5(3 + h) + 1} - \sqrt{5(3) + 1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{16 + 5h} - 4}{h}$$

To evaluate this limit, we rationalize the numerator by multiplying the numerator and denominator by $\sqrt{16 + 5h} + 4$. We obtain

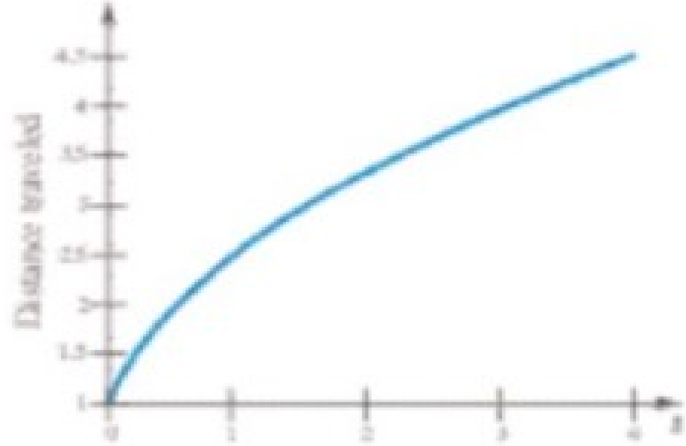


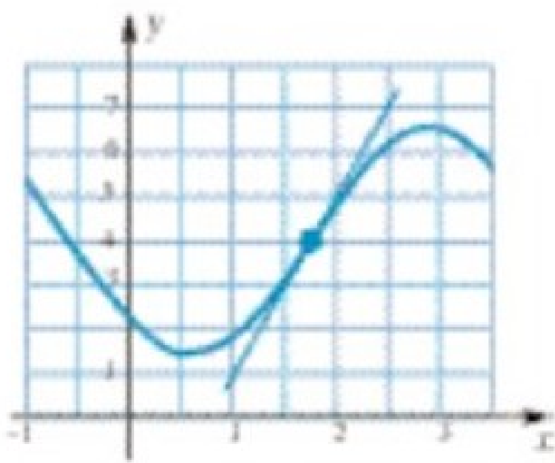
Figure 11

$$
\begin{aligned}
v &= \lim_{h \to 0}\left(\frac{\sqrt{16+5h}-4}{h}\cdot\frac{\sqrt{16+5h}+4}{\sqrt{16+5h}+4}\right) \\
&= \lim_{h \to 0}\frac{16+5h-16}{h\left(\sqrt{16+5h}+4\right)} \\
&= \lim_{h \to 0}\frac{5}{\sqrt{16+5h}+4} = \frac{5}{8}
\end{aligned}
$$

Latihan

In Problems 1 and 2, a tangent line to a curve is drawn. Estimate its slope (slope = rise/run). Be careful to note the difference in scales on the two axes.

1.



2.