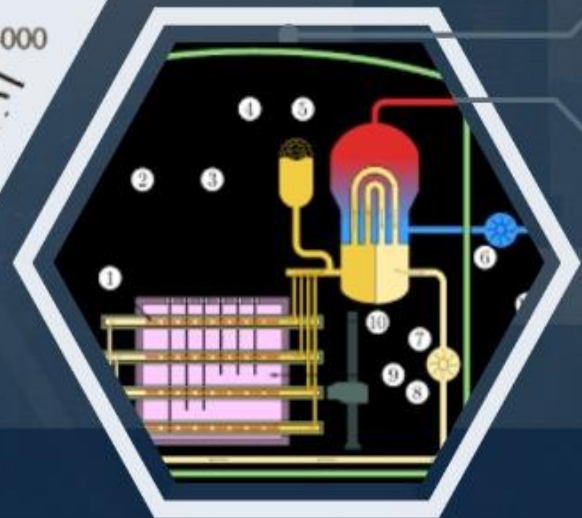
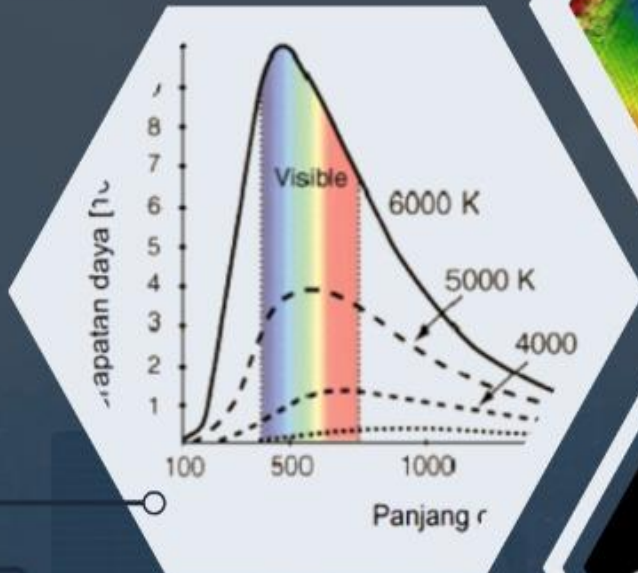
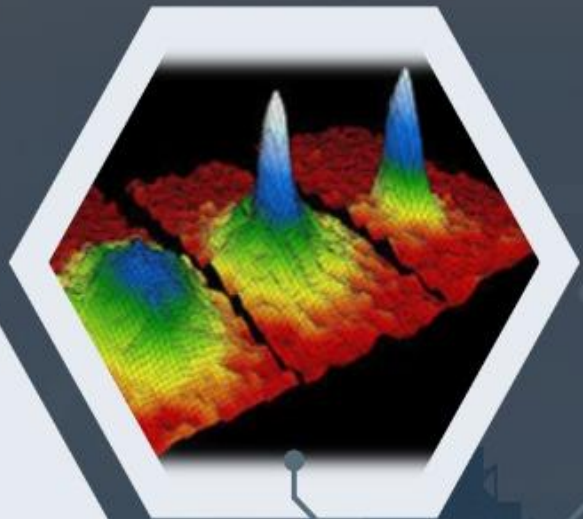




Kampus
Merdeka
INDONESIA JAYA

Akreditasi
A

PANDUAN BELAJAR OLIMPIADE NASIONAL MIPA



BIDANG FISIKA TERMODINAMIKA & FISIKA STATISTIK

TIM PENYUSUN

Dr. Rahmawati Munir, M.Si.
Erlinda Ratnasari Puteri, S.Si., M.Si.
Qori Fajar Hermawan, S.Si., M.Sc.

MODUL
OLIMPIADE NASIONAL MATEMATIKA DAN
ILMU PENGETAHUAN ALAM (ONMIPA)

BIDANG : FISIKA
SUB BIDANG : TERMODINAMIKA DAN FISIKA STATISTIKA



Disusun Oleh :

Dr. Rahmawati Munir, M.Si.
Erlinda Ratnasari Putri, S.Si., M.Si.
Qori Fajar Hermawan, S.Si., M.Sc.

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS MULAWARMAN
SAMARINDA
2022

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas selesainya Modul ONMIPA di bidang Fisika ini. Modul ini membahas mengenai konsep dasar Termodinamika dan Fisika Statistik beserta contoh soalnya. Modul ini dimaksudkan sebagai bahan ajar untuk mahasiswa yang akan mengikuti bimbingan dan seleksi ONMIPA khususnya di bidang Fisika. Modul ini dibagi dalam beberapa Bab yaitu sebagai berikut:

| Pertemua n | Materi | Bab |
|-----------------------|--|------------|
| 1 | Hukum-Hukum Termodinamika | 1 |
| 2 | Prinsip Entropi Maksimum dan Kriteria Keseimbangan | 16 |
| 3 | Transformasi Legendre dan Potensial Termodinamika | 23 |
| 4 | Relasi Termodinamika dan Campuran | 27 |
| 5 | Statistika Maxwell-Boltzman dan Aplikasinya | 34 |
| 6 | Ruang Fasa dan Parameter Statistika | 49 |
| 7 | Statistika Bose-Einstein dan Aplikasinya | 58 |
| 8 | Statistika Fermi-Dirac dan Aplikasinya | 64 |

Kami tidak lupa menyampaikan ucapan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyusunan modul ini, sehingga modul ini dapat dijadikan sebagai panduan atau bahan ajar.

Samarinda, 25 November 2022

Tim Penyusun Modul

DAFTAR ISI

| | |
|---|-----|
| SAMPUL | i |
| KATA PENGANTAR | ii |
| DAFTAR ISI | iii |
| TERMODINAMIKA | 1 |
| BAB I Hukum-Hukum Termodinamika | 2 |
| Teori Singkat | 1 |
| Contoh Soal | 5 |
| Latihan | 14 |
| BAB II Prinsip Entropi Maksimum dan Kriteria Kesetimbangan | 15 |
| Teori Singkat | 15 |
| Contoh Soal | 16 |
| Latihan | 21 |
| BAB III Transformasi Legendre dan Potensial Termodinamika | 23 |
| Teori Singkat | 23 |
| Contoh Soal | 24 |
| Latihan | 26 |
| BAB IV Relasi Termodinamika dan Campuran | 27 |
| Teori Singkat | 27 |
| Contoh Soal | 29 |
| Latihan | 32 |
| BAB V Statistik Maxwell-Boltzman dan Aplikasinya | 34 |
| Teori Singkat | 34 |
| Contoh Soal | 45 |
| Latihan | 47 |
| BAB VI Ruang Fasa dan Parameter Statistika | 49 |
| Teori Singkat | 49 |

| | |
|--|----|
| BAB VII Statistik Bose-Einstein dan Aplikasinya | 58 |
| Teori Singkat | 58 |
| Contoh Soal | 63 |
| Latihan | 64 |
| BAB VIII Statistik Fermi-Dirac dan Aplikasinya | 65 |
| Teori Singkat | 65 |
| Contoh Soal | 67 |
| Latihan | 78 |
| DAFTAR REFERENSI | 80 |

BAB I

HUKUM-HUKUM TERMODINAMIKA

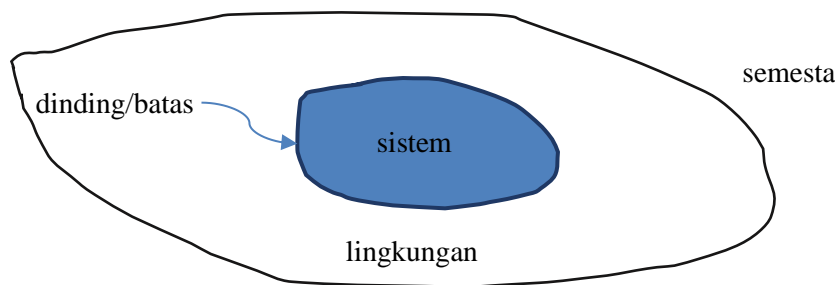
TEORI SINGKAT

1.1 Pengertian Termodinamika

Termodinamika merupakan sains eksperimental yang berdasar pada sejumlah kecil prinsip yang digeneralisasi dari pengalaman atau pengamatan. Dari prinsip-prinsip ini diturunkan hubungan umum antara berbagai kuantitas makroskopik yang dipengaruhi oleh perubahan panas seperti kapasitas panas jenis, kompresibilitas, koefisien magnetik dan dielektrik suatu bahan. Dalam termodinamika, hanya sifat makro suatu suatu bahan yang diperhatikan tanpa hipotesis sifat mikronya.

Secara sederhana, termodinamika dapat diartikan sebagai ilmu pengetahuan yang membahas tentang dinamika panas suatu sistem. Istilah sistem dalam termodinamika merujuk pada bagian tertentu dari semesta di dalam permukaan tertutup yang disebut batas atau dinding dari sistem. Permukaan batas dapat berupa padatan, cairan, gas atau sejumlah radiasi atau foton ataupun sekumpulan dipol magnetik. Batas tidak harus tetap (*fixed*) dalam bentuk maupun isi, tetapi bisa berkembang atau menyusut.

Suatu sistem dapat mengalami pertukaran energi dengan sistem lain atau bagian di luar dinding yang disebut lingkungan dari sistem tersebut. Sistem dan lingkungannya membentuk semesta seperti pada Gambar 1.1. Jika sistem tidak mengalami pertukaran energi dengan lingkungan, sistem disebut terisolasi. Jika terjadi pertukaran energi pada sistem tetapi bahan kandungannya tidak mengalami pertukaran, maka disebut sistem tertutup. Adapun jika terjadi pertukaran materi pada sistem dengan lingkungannya, maka disebut sistem terbuka.



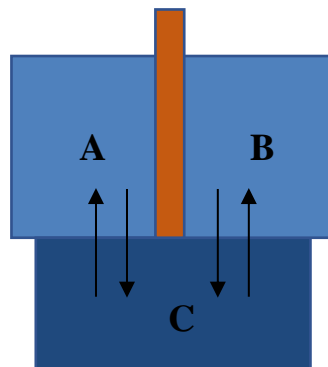
Gambar 1.1 Sistem Termodinamika

1.2 Hukum ke Nol Termodinamika

Kuantitas utama di dalam termodinamika adalah energi khususnya energi panas. Di dalam termodinamika, rasa panas-dingin dirumuskan secara kuantitatif dan dapat diukur. Hal ini merupakan upaya awal untuk menetapkan kriteria kesetimbangan pada temperatur.

Misalkan terdapat tiga logam **A**, **B** dan **C** masing-masing memiliki temperatur T_A , T_B , T_C . Logam **A** dan logam **B** dipisahkan oleh dinding adiabatik yang tidak memungkinkan terjadinya transfer energi, sedangkan antara **A** dan **C** serta **B** dan **C** dipisahkan oleh dinding diatermal. Jika dalam kurun waktu tertentu **C** mencapai kesetimbangan termal dengan **A** dan **B** (walaupun tidak bersamaan), maka terjadi pula kesetimbang termal antara **A** dan **B**, sehingga $T_A = T_B = T_C$. Kondisi ini dinyatakan dalam hukum ke-0 termodinamika sebagai berikut:

“Dua sistem yang berada dalam kesetimbangan termal dengan sistem ke tiga, berarti ketiga sistem tersebut berada dalam kesetimbangan satu dengan lainnya.”



Gambar 1.2 Kontak 3 sistem

1.3 Hukum Pertama Termodinamika

Setiap sistem termodinamika mempunyai energi yang disebut energi dalam (*internal energy*) dan biasa disimbolkan dengan U . Sistem dapat menerima dan mengeluarkan panas atau kalor yaitu energi panas yang mengalir, keluar dan masuk sistem, biasa disimbolkan dengan Q . Selain itu, sistem juga dapat melakukan kerja atau dikenai kerja luar yang disimbolkan dengan W . Hubungan antara energi dalam, kalor dan kerja dinyatakan oleh hukum pertama termodinamika.

“Perubahan energi internal sistem dalam suatu proses sama dengan aliran panas total ke dalam sistem dikurangi kerja yang dilakukan oleh sistem”.

Hukum pertama termodinamika tersebut dapat dituliskan dalam bentuk persamaan yang ditunjukkan pada persamaan 1.1 berikut ini:

$$\Delta U = Q - W \tag{1.1}$$

dengan ΔU adalah beda energi dalam (*internal energy*), Q adalah energi panas dan W adalah kerja dalam sistem. Pada hukum pertama ini, terdapat kondisi-kondisi khusus dengan arti kondisi tersebut yang dapat dilihat pada Tabel 1.1 berikut ini.

Tabel 1.1 Kondisi dan arti kondisi hukum pertama termodinamika

| No. | Kondisi | Keterangan |
|-----|---------|------------------------------------|
| 1 | $W > 0$ | Kerja dilakukan oleh sistem |
| 2 | $W < 0$ | Kerja dilakukan pada sistem |

| | | |
|---|----------------|--|
| 3 | $\Delta U > 0$ | Energi internal sistem meningkat |
| 4 | $\Delta U < 0$ | Energi internal sistem menurun |
| 5 | $Q > 0$ | Kalor memasuki sistem (sistem menerima kalor) |
| 6 | $Q < 0$ | Kalor meninggalkan sistem (sistem melepaskan kalor) |

Secara sederhana, prinsip kekekalan energi dinyatakan dalam sistem termodinamika. Energi tidak dapat diciptakan dan tidak dapat dimusnahkan, hanya dapat berubah dari satu bentuk ke bentuk yang lain.

Selain itu, perubahan energi total tidak bergantung pada cara atau prosedur yang berlangsung tetapi hanya bergantung pada keadaan awal dan akhir suatu sistem. Energi internal dapat dinyatakan dalam bentuk diferensial. Secara eksplisit dinyatakan bahwa, misalnya, usaha/kerja memiliki bentuk $\delta W_{rev} = -pdV$ hanya untuk proses reversibel, sedangkan untuk proses ireversibel $\delta W_{irr} = 0$. Hal yang sama untuk panas yang dipertukarkan, $\delta Q_{rev} = C_v dT$ hanya berlaku untuk proses reversibel.

Pada hukum pertama termodinamika dalam kasus tidak ada kerja, seluruh kalor yang masuk sistem digunakan untuk meningkatkan energi dalam. Sebaliknya kalor yang keluar dari sistem seluruhnya berasal dari penurunan energi dalam. Terkait dengan kalor atau panas yang keluar-masuk sistem didefinisikan sebagai kapasitas panas jenis sebagai aliran panas ke dalam sistem per satuan panas. Dalam kondisi volume tetap, kapasitas panas jenis dituliskan sebagai persamaan (1.2) berikut:

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V \tag{1.2}$$

Sedangkan dalam kondisi tekanan tetap, kapasitas kalor jenis didefinisikan sebagai persamaan (1.3) berikut:

$$C_P = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_P \tag{1.3}$$

Hukum pertama termodinamika juga dapat dinyatakan sebagai persamaan (1.4) berikut:

$$dQ = dU + PdV \quad (1.4)$$

Persamaan 1.4 juga dapat dituliskan sebagai (1.5) dan (1.6) berikut:

$$dQ = C_V dT + PdV \quad (1.5)$$

atau

$$dQ = C_P dT - VdP \quad (1.6)$$

Untuk gas ideal kedua persamaan kalor jenis C_V dan C_P dihubungkan oleh persamaan (1.7) berikut:

$$C_P = C_V + nR \quad (1.7)$$

Kapasitas kalor jenis untuk gas ideal monoatomik ditulis sebagai persamaan (1.8) berikut:

$$C_V = \frac{3}{2}nR \quad (1.8)$$

Kapasitas kalor jenis untuk gas diatomik dapat ditulis sebagai persamaan (1.9) berikut:

$$C_V = \frac{5}{2}nR \quad (1.9)$$

Contoh 1.1

Tinjaulah n mol gas ideal monoatomik yang ditempatkan dalam silinder vertikal. Bagian atas silinder ditutup piston bermassa M dan penampang A , seperti pada gambar di bawah ini. Awalnya piston ditahan pada suatu posisi, dan gas mempunyai volume V_0 dan suhu T_0 . Kemudian, piston dilepaskan dan setelah berisolasi beberapa kali akhirnya piston berhenti bergerak. Abaikan gesekan dan kapasitas panas piston dan silinder. Tentukan suhu dan volume gas pada kesetimbangan. Sistem terisolasi secara termal dan tekanan di luar silinder adalah P_0 .



Solusi:

Keadaan setimbang terjadi ketika tekanan gas sama dengan tekanan udara luar ditambah tekanan akibat gaya berat.

$$P = P_a + \frac{Mg}{A}$$

Dengan demikian, persamaan gas ideal pada kondisi piston tak bergerak adalah

$$\left(P_a + \frac{Mg}{A}\right)V = nRT (*)$$

Sekarang kita hitung kerja yang dilakukan oleh sistem

$$W = P\Delta V = \left(P_a + \frac{Mg}{A}\right)(V_0 - V)$$

Kerja tersebut terkait dengan perubahan energi

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR(T - T_0)$$

Karena $dQ = 0$, maka $W = \Delta U$, atau

$$\left(P_a + \frac{Mg}{A}\right)(V_0 - V) = \frac{3}{2}nR(T - T_0) (**)$$

Atau

$$T = \frac{3}{5}T_0 + \frac{2}{5} \frac{\left(P_a + \frac{Mg}{A}\right)V_0}{nR}$$

Sebaliknya, dengan mengurangi persamaan (**) dengan $\frac{3}{2}$ kali persamaan (*), didapatkan

$$\left(P_a + \frac{Mg}{A}\right)\left(V_0 - \frac{5}{2}V\right) = -\frac{3}{2}nRT_0$$

Atau

$$V = \frac{2}{5} V_0 + \frac{3}{5} \frac{nRT_0}{P_a + \frac{Mg}{A}}$$

Contoh 1.2

(a) Berdasarkan hukum pertama termodinamika dan definisi dari C_p dan C_v , dinyatakan bahwa:

$$C_p - C_v = \left[P + \left(\frac{\delta U}{\delta V} \right)_T \right] \left(\left(\frac{\delta V}{\delta T} \right)_P \right)$$

dimana C_p dan C_v merupakan kapasitas kalor jenis per mol pada tekanan dan volume konstan (secara berurut), U adalah energi dan V adalah volume untuk 1 mol.

(b) Gunakan hasil persamaan di atas ditambah persamana berikut

$$P + \left(\left(\frac{\delta U}{\delta V} \right)_T \right) = T \left(\frac{\delta P}{\delta T} \right)_V$$

untuk mencari $C_p - C_v$ untuk gas Van de Waals

$$P + \left(\left(\frac{a}{V^2} \right) \right) (V - b) = RT$$

Gunakan hasil dari persamaan tersebut untuk menunjukkan bahwa $V \rightarrow \infty$ pada P konstan, kamu menghitung hasil gas ideal untuk menemukan $C_p - C_v$.

Solusi:

(a) Dari $H = U + PV$, kita menghitung

$$\left(\frac{\delta H}{\delta T} \right)_P = \left(\frac{\delta U}{\delta T} \right)_P + P \left(\frac{\delta V}{\delta T} \right)_P$$

misal $U = U|T, V(T, P)|$. Persamaan di atas menjadi:

$$\left(\frac{\delta H}{\delta T} \right)_P = \left(\frac{\delta U}{\delta T} \right)_V + \left[P + \left(\frac{\delta U}{\delta V} \right)_T \right] \left(\frac{\delta V}{\delta T} \right)_P$$

Sehingga

$$C_p - C_v = \left[P + \left(\frac{\delta U}{\delta V} \right)_T \right] \left(\frac{\delta V}{\delta T} \right)_P$$

(b) Untuk gas Van der Waals,

$$\left(\frac{\delta P}{\delta T}\right)_V = \frac{R}{(V-b)}$$

$$\left(\frac{\delta V}{\delta T}\right)_P = \frac{R}{\left[\frac{RT}{V-b} - \frac{2a(V-b)}{V^3}\right]}$$

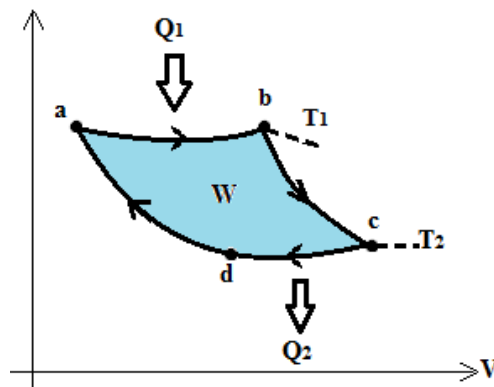
Sehingga,

$$C_p - C_v = \frac{R}{\frac{1 - 2a(1 - b/V)^2}{VRT}}$$

Ketika $V \rightarrow \infty$, $C_p - C_v \rightarrow R$, hal ini menunjukkan hasil untuk gas ideal.

1.4 Hukum Kedua Termodinamika

Sebagai terapan praktis dari konsep kalor dan kerja dari suatu sistem adalah mesin yang memungkinkan proses siklus berupa penyerapan dan pelepasan kalor, serta kerja yang berulang-ulang. Salah satu proses siklus tersebut adalah mesin dan siklus Carnot dengan dua proses adiabatik dan dua proses isothermal seperti Gambar 1.3. Misalkan sistem berupa gas ideal yang diketahui bahwa energi internalnya hanya bergantung pada temperatur.



Gambar 1.3 Siklus mesin Carnot

Proses **a-b** adalah proses isothermal sehingga energi internalnya tetap. Hukum pertama termodinamika menyatakan bahwa kerja oleh suatu sistem mengembangkan volume dari **a** ke **b** sepenuhnya berasal dari kalor yang masuk ke dalam sistem. Keadaan tersebut dapat digambarkan melalui persamaan (1.10) berikut:

$$W_{ab} = nRT_1 \ln \ln \left(\frac{V_b}{V_a} \right) = Q_1 \quad (1.10)$$

Proses dari **c** ke **d** juga merupakan proses isothermal hanya saja berkebalikan dengan kasus **a-b**. Kalor yang dilepas sistem menyebabkan penyusutan volume sistem, sehingga dapat digambarkan melalui persamaan (1.11) berikut:

$$W_{cd} = nRT_2 \ln \ln \left(\frac{V_d}{V_c} \right) = -Q_2 \quad (1.11)$$

Adapun proses **b-c** dan **d-a** merupakan proses adiabatik tanpa penyerapan ataupun pelepasan kalor. Artinya, berdasarkan hukum pertama termodinamika, kerja oleh atau pada sistem terjadi akibat terjadinya perubahan energi dalam sistem.

Berdasarkan persamaan (1.5) dan (1.6) untuk $dQ = 0$, maka didapatkan hasil yang ditunjukkan oleh persamaan (1.12) berikut:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{C_P}{C_V} \frac{dV}{V} \quad (1.12)$$

dengan $\frac{C_P}{C_V} = \gamma$ diintegrasikan sehingga hasilnya ditunjukkan oleh persamaan (1.13) dan (1.14) berikut:

$$\int \frac{dP}{P} = -\gamma \int \frac{dV}{V} \rightarrow \ln \ln P = -\gamma \ln \ln V + \ln \ln k \quad (1.13)$$

atau

$$PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma \quad (1.14)$$

Selanjutnya, berdasarkan persamaan (1.14) diperoleh persamaan (1.15) berikut:

$$W_{bc} = \frac{nR}{1-\gamma} (T_2 - T_1) = -W_{da} \quad (1.15)$$

Berdasarkan proses adiabatik yang terjadi dari **b-c** dan **d-a**, didapatkan hasil bahwa kerja yang dilakukan pada **b-c** akan bernilai sama dengan **d-a** tetapi bernilai berlawanan.

Dari siklus Carnot tersebut, kita dapat mengetahui hasil yang menarik, antara lain:

- a. Energi internal tidak berubah
- b. Kerja efektif sistem $W = |W_{ab}| - |W_{cd}| = Q_1 - Q_2$
- c. Kalor diberikan pada sistem selama proses siklik, Q_2 .

Sebuah mesin Carnot akan dapat didefinisikan efisiensi dari mesin tersebut.

Efisiensi ini merupakan tingkat pengubahan panas menjadi suatu kerja. Efisiensi mesin Carnot ini dapat dihitung dengan menentukan rasio antara kerja efektif dengan kalor yang dibutuhkan, yang dapat ditunjukkan oleh persamaan (1.16) berikut:

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (1.16)$$

dengan η adalah efisiensi, W adalah kerja dan Q_1 adalah panas yang dibutuhkan. Hal ini berlaku umum dan merupakan esensi dari hukum kedua termodinamika. Q_1 adalah kalor yang diserap dan Q_2 merupakan kalor yang dilepaskan oleh sistem. Hukum kedua termodinamika menyatakan bahwa:

“Tidak ada proses yang dapat berlangsung terus-menerus dengan menyerap kalor dan mengkonversikan seluruh kalor yang diserap tersebut menjadi kerja tanpa hasil samping (kalor dilepas).”

Contoh 1.3

Satu mol gas monoatomik sempurna yang awalnya bertemperatur T_0 mengembang dari volume V_0 ke $2V_0$, (a) temperature konstan (b) tekanan konstan. Hitunglah kerja pada ekspansi (pengembangan) dan panas yang diserap oleh gas pada setiap kasus.

Solusi:

(a) Pada suhu/temperatur konstan T_0 , kerja ditunjukkan sebagai berikut:

$$W = \int_A^B PdV = RT_0 \int_{V_0}^{2V_0} dV/V = RT_0 \ln 2$$

Ketika energi internal sama dengan 0, panas yang diserap oleh gas adalah

$$Q = W = RT_0 \ln 2$$

(b) Pada tekanan konstan P , kerja dinyatakan sebagai:

$$W = \int_{V_0}^{2V_0} PdV = PV_0 = RT_0$$

Peningkatan energi internal ditunjukkan sebagai:

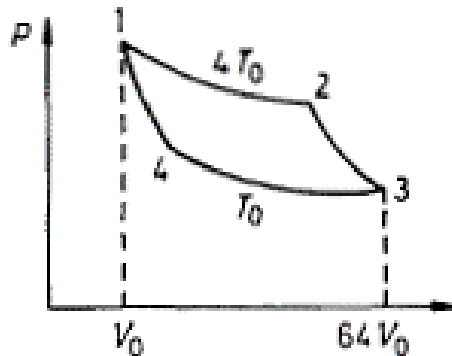
$$\Delta U = C_v \Delta T = \frac{3}{2} R \Delta T = \frac{3}{2} P \Delta V = \frac{3}{2} P V_0 = \frac{3}{2} R T_0$$

Sehingga panas yang terserap oleh gas adalah

$$Q = \Delta U + W = \frac{5}{2} R T_0$$

Contoh 1.4

Sebuah mesin Carnot mempunyai siklus seperti yang ditunjukkan pada gambar berikut. Jika W' mewakili yang dilakukan oleh 1 mol gas monoatomik dan W merupakan kerja yang dilakukan oleh 1 mol gas diatomik, hitunglah W'/W .



Solusi:

Untuk $T_1 = 4T_0$ dan $T_2 = T_0$ adalah suhu dari sumber panas, $V_1 = V_0$ dan V_2 adalah volume pada posisi 2. Kita juga mempunyai $V_3 = 64V_0$.

Dengan $W' = R(T_1 - T_2) \ln \frac{V_2'}{V_1}$ untuk mesin gas diatomic, kita menghitung

$$\frac{W'}{W} = \ln \frac{(V_2'/V_1)}{(V_2/V_1)}$$

Sehingga, dengan menggunakan persamaan adiabatik $4T_0 V_2^{\gamma-1} = T_0 V_3^{\gamma-1}$,

$$4T_0 V_2'^{\gamma'-1} = T_0 V_3^{\gamma'-1}$$

Kita menghitung

$$\frac{W'}{W} = \frac{3 + (1 - \gamma')^{-1}}{3 + (1 - \gamma)^{-1}}$$

Untuk gas monoatomic $\gamma' = 5/3$; untuk gas diatomic $\gamma' = 7/5$. Sehingga:

$$\frac{W'}{W} = \frac{1}{3}$$

Contoh 1.5

Sebuah bangunan dengan temperatur T (dalam K) dipanaskan oleh sebuah pompa panas ideal yang menggunakan atmosfer pada T_0 (K) sebagai sumber panas. Pompa mengkonsumsi usaha W dan bangunan melepaskan panas pada rentang $\alpha(T - T_0)$. Berapa temperatur setimbang pada bangunan tersebut?

Solusi:

Diketahui T_e merupakan temperatur setimbang. Panas diberikan oleh pompa pada rentang $Q_1 = W/\eta$, di mana $\eta = 1 - T_0/T_e$. Pada kesetimbangan $Q_1 = \alpha(T_e - T_0)$, sehingga:

$$W = \frac{\alpha}{T_e}(T_e - T_0)^2,$$

Selanjutnya diperoleh:

$$T_e = T_0 + \frac{W}{2\alpha} + \sqrt{T_0 \frac{W}{\alpha} \left(\frac{W}{2\alpha}\right)^2}$$

1.5 Hukum Ketiga Termodinamika

Manusia selalu berupaya meningkatkan efisiensi dan efektivitas atas segala upayanya termasuk mesin yang dibuatnya. Berdasarkan formula Carnot, efisiensi mesin Carnot yang ditunjukkan pada persamaan (1.16) menyatakan bahwa efisiensi mesin akan mencapai 100% jika $T_2 = 0$ dan selanjutnya hukum termodinamika kedua akan gugur. Berbagai upaya atau eksperimen untuk mencapai temperatur nol mutlak telah dicoba dan tidak berhasil. Upaya-upaya tersebut akhirnya memberikan kesimpulan yang merupakan hukum termodinamika ketiga yaitu sebagai berikut:

“Temperatur nol mutlak tidak dapat dicapai dengan langkah berhingga.”

Pernyataan ini berarti bahwa temperatur nol akan tercapai melalui langkah tak berhingga tetapi secara praktis hal ini tidak mungkin dilakukan. Sebagai konsekuensinya, tidak mungkin ada mesin dengan efisiensi 100%.

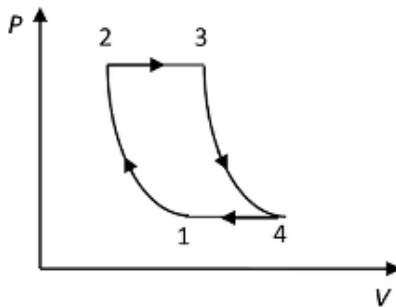
LATIHAN

1. Sebuah pengaduk bekerja dengan energi sebesar 40 kJ yang bekerja pada air di dalam sebuah gelas. Panas yang timbul dari aliran air adalah $1,5 \times 10^3$ kalori dari panas di sekitarnya. Hitung perubahan energi internal air dalam kJ!
2. Tinjaulah sebuah sistem dari gas yang memenuhi persamaan Van der Waals

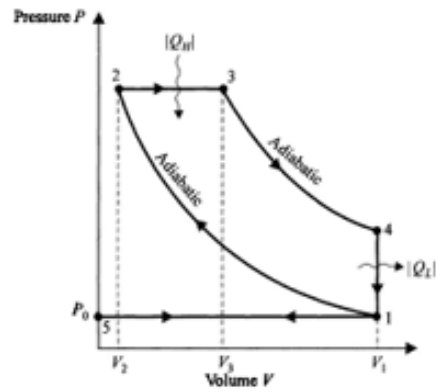
$$P + \left(\frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

di mana P, V, T dan n berturut-turut adalah tekanan, volume, suhu dan jumlah mol gas, sedangkan a dan b adalah konstanta. Hitunglah:

- a. Koefisien virial kedua dan ketiga
 - b. Kerja yang dilakukan pada proses isothermal
3. Satu mol gas ideal monoatomik berekspansi dari V_0 menjadi $2V_0$ pada proses isobarik, dimana suhu mula-mula T_0 . Hitung kerja yang diperlukan!
 4. Tentukan efisiensi siklus Joule yang terdiri dari dua proses adiabatik dan dua proses isobarik seperti gambar di bawah ini. Asumsikan bahwa C_p dan C_v konstan.



5. Tinjaulah sistem gas ideal monoatomik yang mengalami siklus diesel ideal seperti pada gambar di bawah ini.



Jika diketahui suhu dan volume pada tiap keadaan 1,2,3 dan 4 berturut-turut adalah T_1, T_2, T_3 dan T_4 dan V_1, V_2, V_3 , dan V_4 dan tekanan pada keadaan 1 adalah P_0 , maka hitunglah:

- Semua kalor yang terlibat dalam siklus di atas
- Efisiensi mesin di atas

BAB II

PRINSIP ENTROPI MAKSIMUM DAN KRITERIA KESETIMBANGAN

TEORI SINGKAT

2.1 Entropi

Hukum kedua termodinamika pada bab sebelumnya memungkinkan kita untuk mendefinisikan entropi. Proses *irreversible* (yang tidak dapat diubah) menyebabkan kita kehilangan sebagian energi atau panas, tetapi tidak harus semua, kemampuan untuk melakukan pekerjaan. Kehilangan sebagian ini dapat dinyatakan dalam konsep yang disebut entropi.

Entropi, seperti energi internal, merupakan fungsi dari keadaan atau kondisi sistem. Hanya keadaan sistem yang menentukan entropi S yang dimiliki oleh suatu sistem. Perubahan entropi dapat dinyatakan dalam persamaan (2.1) berikut:

$$\Delta S = \left(\frac{Q}{T}\right)_R \tag{2.1}$$

dengan ΔS adalah perubahan entropi, Q adalah sejumlah kecil kalor yang diterima dan T adalah temperatur. Dalam hukum kedua termodinamika menyatakan bahwa entropi total alam semesta tidak berubah ketika proses reversibel terjadi dan meningkat ketika proses *irreversible* terjadi. Proses *irreversible* menyebabkan energi terdegradasi dalam arti sebagian energi menjadi tidak tersedia untuk kinerja pekerjaan. Adapun peningkatan entropi dikaitkan dengan tingkat gangguan yang lebih besar dan penurunan entropi dengan tingkat gangguan yang lebih rendah (lebih teratur).

Dalam fisika statistik, entropi merupakan fungsi dari jumlah keadaan mikro yang ditunjukkan persamaan (2.2) berikut:

$$S = f(\Omega) \tag{2.2}$$

Untuk sistem yang terisolasi, proses alami sesuai dengan peningkatan S . Selain itu, S

didefinisikan sebagai peningkatan fungsi energi dalam dan diharapkan jumlah keadaan mikro juga meningkat seiring dengan meningkatnya energi dalam.

Contoh 2.1

Hitung perubahan entropi yang terlibat dalam pemanasan berat 1 gram atom perak pada volume konstan dari 0^o hingga 30^o C. Nilai C_v pada temperatur ini dapat diambil sebagai konstanta yang sama dengan 5,85 kal/deg.mol.

Solusi:

Perubahan entropi diperoleh

$$\Delta S = n \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_v dT}{T} = n C_v \ln \ln \frac{T_2}{T_1} = 5,85 \ln \ln \frac{30 + 273}{273} = 0,61 \text{ cal/K}$$

Contoh 2.2

Sebuah benda dengan kapasitas panas konstan C_p dan suhu T_i dikontakkan dengan reservoir pada temperatur T_f. Keseimbangan antara benda dan reservoir dibuat pada tekanan konstan. Tentukan perubahan entropi total dan buktikan bahwa nilainya positif untuk salah satu tanda dari (T_i - T_f)/T_f. Anggap |T_i - T_f|/T_f < 1.

Solusi:

Asumsikan T_i ≠ T_f (karena perubahan entropi harus 0 ketika T_i = T_f). Perubahan entropi pada benda adalah

$$\Delta S_1 = \int_{T_i}^{T_f} \frac{C_p dT}{T} = C_p \ln \ln \frac{T_f}{T_i}$$

Perubahan entropi pada sumber panas adalah

$$\Delta S_2 = \frac{\Delta Q}{T_f} = \frac{C_p(T_i - T_f)}{T_f}$$

Sehingga diperoleh entropi total sebagai berikut

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = C_p \left(\frac{T_i}{T_f} - 1 + \ln \ln \frac{T_f}{T_i} \right)$$

Ketika x > 0 dan x ≠ 1, fungsi f(x) = x - 1 - ln ln x > 0. Sehingga

$$\Delta S = C_p f \left(\frac{T_i}{T_f} \right) > 0$$

Contoh 2.3

Satu kg H₂O pada 0°C dikontakkan dengan reservoir panas pada 100 C. Ketika air telah mencapai 100°C,

- (a) berapakah perubahan entropi air?
- (b) berapakah perubahan entropi semesta?
- (c) bagaimana Anda bisa memanaskan air hingga 100°C sehingga perubahan entropi semesta adalah nol?

Solusi:

Ini adalah proses irreversible. Untuk menghitung perubahan entropi pada air dan sistem secara keseluruhan, kita harus membangun sebuah proses reversible yang mempunyai kondisi awal dan akhir yang sama sebagai proses dalam masalah ini.

- (a) Kita mengasumsikan prosesnya reversible pada tekanan konstan. Perubahan entropi pada air adalah

$$\Delta S_{H_2O} = \int_{273}^{373} mC_{H_2O} dT/T = mC_{H_2O} \ln (373/273)$$

Kita mensubstitusikan m = 1 kg dan C_{H₂O} = 4,18 J/g ke dalam persamaan di atas, diperoleh

$$\Delta S_{H_2O} = 1305 J/K$$

- (b) Perubahan pada entropi sumber panas adalah

$$\Delta S_{hs} = -|Q|/T = -1000 \times 4,18 \times 100/373 = -11121 J/K$$

Sehingga perubahan entropi semesta adalah

$$\Delta S = \Delta S_{H_2O} + \Delta S_{hs} = 184 J/K$$

- (c) Kita dapat membayangkan sumber panas banyak tak terhingga yang mempunyai perbedaan temperatur yang sangat kecil antara dua sumber yang berdekatan dari 0°C ke 100°C. Air yang berkontak dengan sumber panas dengan jumlah tak terhingga meningkatkan suhu. Proses yang membiarkan temperature air meningkat dari 0°C ke 100°C adalah reversible, sehingga ΔS = 0.

2.2 Keadaan Setimbang

Fokus kita sekarang adalah untuk mencari tahu karakteristik apa yang dapat membedakan transformasi *irreversible* (*riil*) dan transformasi reversibel (*ideal*). Kita awali dengan pertanyaan hubungan apa yang terjadi antara perubahan entropi dalam suatu transformasi dengan aliran panas *irreversible* yang menyertainya. Pada setiap tahapan transformasi reversibel, sistem meninggalkan kondisi kesetimbangan secara infinitesimal (sangat kecil). Sistem lalu berubah, tetapi sesungguhnya tetap dalam kesetimbangan melalui perubahan keadaan yang reversibel. Kondisi untuk reversibel adalah kondisi untuk kesetimbangan; dari persamaan yang mendefinisikan dS , kondisi reversibel adalah:

$$TdS = dQ_{rev} \quad (2.3)$$

Persamaan (2.3) tersebut merupakan persamaan untuk kondisi setimbang. Adapun kondisi untuk perubahan keadaan yang *irreversible* dinyatakan dengan pertidaksamaan Clausius yang bisa ditulis dalam bentuk pertidaksamaan (2.4) berikut:

$$TdS > dQ_{irrev} \quad (2.4)$$

Perubahan *irreversible* adalah perubahan *riil* (sesungguhnya) atau perubahan alamiah atau perubahan spontan. Perubahan dalam arah alami sebagai perubahan spontan dan pertidaksamaan (2.4) adalah kondisi spontanitas. Kedua persamaan di atas (2.3) dan (2.4) dapat digabung menjadi persamaan (2.5) berikut:

$$TdS \geq dQ \quad (2.5)$$

dengan tanda sama dengan menunjukkan nilai *reversible* dQ .

Dengan menggunakan hukum pertama termodinamika dalam bentuk $dQ = dU + dW$, persamaan (2.5) dapat ditulis menjadi persamaan (2.6) dan (2.7):

$$TdS \geq dU + dQ \quad (2.6)$$

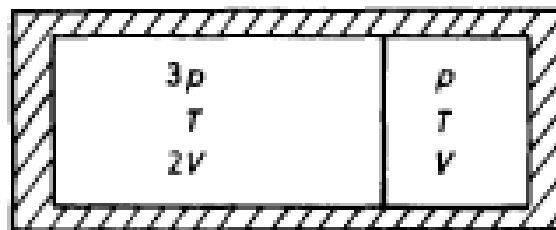
atau

$$-dU - dW + TdS \geq 0 \quad (2.7)$$

dengan tanda sama dengan (=) pada persamaan (2.6) dan (2.7) menunjukkan kondisi setimbang.

Contoh 2.4

Pertimbangkan sistem terisolasi termal yang terdiri dari dua volume, V dan $2V$ dari gas ideal yang dipisahkan oleh bagian konduktor termal dan bagian yang dapat dipindahkan. Suhu dan tekanan seperti yang ditunjukkan pada gambar. Ke dua bagian tersebut dibiarkan bergerak tanpa pencampuran gas. Ketika kesetimbangan tercapai, berapakah perubahan energi internal total dan entropi total? berapakah suhu dan tekanan kesetimbangan?



Solusi:

Misal jumlah mol gas pada kedua sisi adalah n_1 dan n_2 . Dari persamaan $6pV = n_1RT$ dan $pV = n_2RT$, kita menghitung $n_1 = 6n_2$. Jika sistem ini merupakan sistem terisolasi gas ideal, suhu akhir adalah $T_f = T$ karena kedua suhu awal sama dengan T . Tekanan akhir P_f adalah

$$P_f = (n_1 + n_2) \frac{RT}{3V} = \frac{P}{3} \left(1 + \frac{n_1}{n_2} \right) = \frac{7}{3} P$$

Kita menghitung perubahan fungsi keadaan S dengan mendesain sebuah proses isothermal kuasistatik. Sehingga

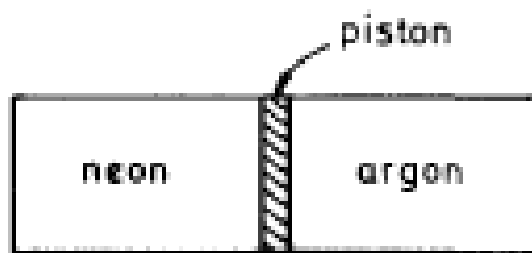
$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{1}{T} \left(\int P_1 dV_1 + P_2 dV_2 \right) \\ &= n_1 R \int_{2V}^{V_1} \frac{dV}{V} + n_2 R \int_V^{V_2} \frac{dV}{V} \\ &= n_1 R \ln \ln \frac{V_1}{2V} + n_2 R \ln \ln \frac{V_2}{V} \end{aligned}$$

Karena $V_1 + V_2 = 3V$ dan $\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2} = 6$, $V_1 = 6V_2 = \frac{18}{7} V$. Sehingga

$$\Delta S = n_1 R \ln \ln \frac{9}{7} + n_2 R \ln \ln \frac{3}{7} \approx \frac{PV}{T}$$

Contoh 2.5

Wadah silinder awalnya dipisahkan oleh piston yang dijepit menjadi dua kompartemen dengan volume yang sama. Kompartemen kiri diisi dengan satu mol gas neon pada tekanan 4 atmosfer dan yang kanan diisi dengan gas argon pada tekanan 1 atmosfer. Gas dapat dianggap ideal. Seluruh sistem awalnya bersuhu $T = 300\text{K}$, dan terisolasi secara termal dari dunia luar. Kapasitas panas sistem silinder-piston adalah C (konstan).



Jika piston sekarang tidak dijepit dan dilepaskan untuk bergerak bebas tanpa gesekan. Akhirnya, karena sedikit disipasi, ia berhenti dalam posisi setimbang. Hitung:

- suhu baru sistem (piston konduktif termal)
- rasio volume akhir neon dan argon
- perubahan entropi total sistem
- perubahan entropi tambahan yang akan dihasilkan jika piston dilepas
- jika pada keadaan awal, gas di kompartemen kiri adalah mol argon dan bukan mol neon, apakah jawaban a, b, dan c akan berbeda?

Solusi:

- Energi internal gas ideal adalah fungsi yang hanya bergantung pada suhu, sehingga energi internal sistem total tidak berubah. Begitu juga suhunya, suhu kesetimbangan yang baru adalah 300K .
- Rasio volume adalah rasio jumlah molekul, dan juga rasio tekanan awal. Jadi, rasio volume tersebut dapat dituliskan sebagai berikut $\frac{V_{Ne}}{V_{udara}} = \frac{4}{1} = \frac{1}{n}$ dengan $n = \frac{1}{4}$ merupakan jumlah mol gas argon.

c. Perubahan entropi pada sistem adalah

$$\begin{aligned} \Delta S &= N_{Ne} R \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)_{Ne} + N_{udara} R \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)_{udara} \\ &= R \ln \frac{\frac{4}{\frac{5}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{R}{4} \ln \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = 2.0 \text{ J/K} \end{aligned}$$

d. Perubahan entropi tambahan adalah

$$\Delta S' = R \ln \ln (1 + n) + R \ln \ln \frac{(1 + n)}{n} = 5.2 \text{ J/K}$$

e. Jika mula-mula gas di sebelah kiri adalah mol argon, jawaban a,b,c tidak akan berubah.

LATIHAN

1. Pada suhu sangat rendah ($T \rightarrow 0 \text{ Kelvin}$) kapasitas panas sebuah kristal dapat dinyatakan sebagai $C = aT^3$ dengan a konstanta. Carilah entropi kristal pada interval suhu tersebut!

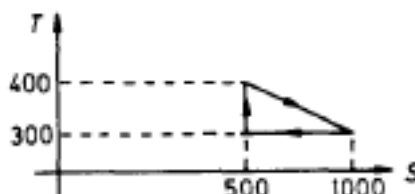
2. Hukum pertama termodinamika untuk proses reversibel dapat ditulis sebagai

$$dU = -PdV + TdS$$

Dimana U, P, V, T dan S berturut-turut adalah energi dalam, tekanan, volume, suhu dan entropi sistem. Besaran $1/T$ dapat dinyatakan sebagai...

3. Tuliskan satu persamaan dasar yang dipakai untuk mendefinisikan besaran entropi S dalam fisika statistik, yang dinyatakan dalam besaran Ω yang merupakan jumlah keadaan mikroskopik (*microstate*) dari keadaan makroskopik.

4. (a) Berapa efisiensi untuk mesin reversibel yang beroperasi di sekitar siklus yang ditunjukkan pada gambar, di mana T adalah suhu dalam K dan S adalah entropi dalam J/K?



- (b) Suatu zat cair bermassa M pada suhu T_1 dicampur dengan zat cair yang sama massanya pada suhu T_2 . Sistem terisolasi secara termal. Jika C_p adalah kalor jenis zat cair, tentukan perubahan entropi totalnya. Tunjukkan bahwa hasilnya selalu positif.
5. Sebuah silinder terisolasi termal, ditutup pada kedua ujungnya, dilengkapi dengan piston penghantar panas tanpa gesekan yang membagi silinder menjadi dua bagian. Awalnya, piston dijepit di tengah, dengan 1 liter udara pada 200 K dan tekanan 2 atm di satu sisi dan 1 liter udara pada 300 K dan 1 atm di sisi lain. Piston dilepaskan dan sistem mencapai keseimbangan dalam tekanan dan suhu, dengan piston pada posisi baru.
- (a) hitung tekanan dan suhu akhir
- (b) hitung kenaikan total entropi
- (Pastikan untuk memberikan alasan pada setiap jawaban Anda)

BAB III

TRANSFORMASI LEGENDRE DAN POTENSIAL TERMODINAMIKA

TEORI SINGKAT

Entropi yang didefinisikan pada bab sebelumnya merupakan fungsi dari energi E , volume V , dan jumlah molekul N , dan diferensial totalnya ditunjukkan oleh persamaan (3.1) berikut:

$$dS = \frac{1}{T}dE + \frac{P}{T}dV - \frac{\pi}{T}dN \quad (3.1)$$

Persamaan (3.1) tersebut dapat terpenuhi ketika dalam kesetimbangan termal. Dengan demikian kita dapat menggunakan U sebagai pengganti E dan menulis ulang diferensial total entropi sebagai diferensial total U ditunjukkan oleh persamaan (3.2) berikut ini:

$$dU = TdS - PdV + \mu dN \quad (3.2)$$

Persamaan (3.2) menunjukkan bahwa kita harus mempertimbangkan energi internal U sebagai fungsi dari S, V dan N .

Di sisi lain, energi bebas F yang didefinisikan pada bagian sebelumnya adalah fungsi T, V , dan N . Kita dapat memperoleh diferensial total dari F menggunakan $F = U - TS$ ditunjukkan oleh persamaan (3.3) dan (3.4) berikut ini:

$$dF = dU - d(TS) = dU - SdT - TdS \quad (3.3)$$

$$dF = dU - SdT - TdS = -SdT - PdV + \mu dN \quad (3.4)$$

Dari persamaan ini, kita dapat memperoleh $(\partial F / \partial T)_{V, N} = S$, seperti yang digunakan pada bagian sebelumnya. Dengan cara ini, kita dapat mengubah independen variabel dari himpunan (S, V, N) ke himpunan (T, V, N) dengan mengurangi ST dari U . Operasi ini disebut Transformasi Legendre.

Transformasi Legendre selanjutnya mendefinisikan energi bebas Gibbs (G) sebagai $G = F + PV$. Energi bebas ini merupakan fungsi dari (T, P, N) dapat dituliskan sebagai persamaan (3.5) berikut:

$$dG = -SdT + VdP + \mu dN \quad (3.5)$$

Energi bebas Gibbs ini memiliki properti yang menarik. Diantara T , P , dan N , hanya N yang merupakan variabel ekstensif. Oleh karena itu, hubungan yang ditunjukkan oleh persamaan (3.6) harus terpenuhi.

$$G(T, P, \alpha N) = \alpha G(T, P, N) \quad (3.6)$$

Persamaan (3.6) tersebut menunjukkan bahwa $G(T, P, N) = g(T, P)N$. Di sini g adalah energi bebas Gibbs per molekul. Di sisi lain, dari turunan G , kita tahu bahwa $(\partial G / \partial N)_{T, P} = \mu$. Dengan demikian kita dapat menyimpulkan bahwa $g(T, P) = \mu$, sehingga dapat dituliskan dalam persamaan (3.7) di bawah ini:

$$G(T, P, N) = \mu(T, P)N \quad (3.7)$$

dengan U , F , dan G dihubungkan oleh transformasi Legendre dan secara kolektif disebut fungsi termodinamika. Fungsi termodinamika tersebut memiliki set variabel independen yang berbeda. Variabel yang terkait dengan setiap fungsi disebut variabel alaminya. Penting untuk diketahui bahwa asosiasi ini tidak sembarangan: *sekali fungsi termodinamika telah diberikan sebagai fungsi dari variabel alaminya, kita dapat memperoleh nilai dari setiap variabel keadaan dalam kesetimbangan termal, tetapi tidak demikian ketika fungsi termodinamika yang diberikan dalam bentuk himpunan variabel lain.* Sebagai contoh, setelah kita memperoleh $F(T, V, N)$, S , P , dan μ dapat diturunkan dengan mendiferensiasikan F terhadap T , V , dan N , secara berurutan. Selanjutnya, fungsi termodinamika lainnya dapat diperoleh dengan menggunakan transformasi Legendre. Pada sisi lain, misalkan energi internal U telah diperoleh sebagai fungsi dari (T, V, N) ; dari variabel-variabel ini, T bukan variabel alami. Dalam hal ini kita tidak dapat menurunkan S dari persamaan untuk $U(T, V, N)$. Bahkan, diketahui, bahwa $U(T, V, N) = (3/2)k_B T$ untuk gas ideal yang tersusun dari molekul monoatomik. Kita tidak dapat menurunkan S atau P dari fungsi ini.

Contoh 3.1

Satu kilogram merkuri dikompresi secara isothermal pada 300 K dari 0 hingga 103 bar. Hitung perubahan yang sesuai dari energi internal ΔU ! Apakah tanda ΔU bergantung pada tekanan akhir? Kepadatan merkuri adalah 13.600 kg/m^3 , koefisien ekspansi termal volumetriknya $1,81 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, dan kompresibilitas isothermal-nya $3,9 \times 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$.

Solusi:

Deskripsi termodinamika sistem didasarkan pada dua pasang variabel konjugasi: Suhu dan entropi (T dan S) dan tekanan dan volume (p dan V). Hukum pertama berbunyi $\Delta U = W + Q$. Kerja yang diterima selama kompresi adalah $W = - \int_0^p dV$, dan dengan memperhitungkan $dV = - \chi_T V dp$ dengan $V = m/\rho$, maka diperoleh

$$W = \frac{m\chi_T p^2}{2\rho} = 14,3 \text{ J}$$

ρ dan χ_T menunjukkan kepadatan dan kompresibilitas isothermal masing-masing sampel. Pertukaran panas pada kompresi reversibel diberikan oleh $Q = \int_0^p T \left(\frac{\delta S}{\delta p}\right)_T dp$, di mana hubungan Maxwell yang berupa $\left(\frac{\delta S}{\delta p}\right)_T = - \left(\frac{\delta V}{\delta T}\right)_p = -\beta V$ digunakan; singkatan dari koefisien ekspansi termal volumetrik. Untuk $T = 300 \text{ K}$ dan $p = 103 \text{ bar}$, maka

$$Q = - \frac{m\beta T p}{\rho} = -399 \text{ J}$$

Energi dalam berkurang sebesar $\Delta U = W + Q = -385 \text{ J}$. Perhatikan bahwa kerja yang diterima $W \propto p^2$ dan kalor yang dipancarkan $Q \propto p$. Pada tekanan yang cukup tinggi, $|W| > |Q|$ sehingga $\Delta U > 0$. Tekanan ambang p' di mana perbedaan energi internal ΔU berubah tanda diberikan oleh

$$p' = \frac{2\beta T}{\chi_T} = 2,78 \times 10^4 \text{ bar.}$$

Contoh 3.2

$f(x) = x^2$, maka $f'(x) = p = 2x$. Tentukan turunannya sehingga cocok dengan Transformasi Legendre.

Solusi:

Bentuk sederhana Transformasi Legendre adalah

$$g(x) = x^2 - px$$

Fungsi inversnya berupa

$$f^{-1}(p) = x = \frac{1}{2}p$$

Jika dimasukkan ke persamaan sebelumnya, maka

$$g(p) = \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p^2 = -\frac{1}{4}p^2$$

Bentuk diferensialnya adalah

$$dg = -\frac{1}{2}p dp = -x dp.$$

LATIHAN

1. Dua benda identik memiliki energi dalam $U = NCT$, dengan konstanta C . Nilai N dan C adalah sama untuk setiap benda. Suhu awal benda adalah T_1 dan T_2 . Keduanya digunakan sebagai sumber kerja dengan menghubungkannya ke mesin kalor Carnot dan membawanya ke suhu akhir yang sama T_f . (a). Berapakah suhu akhir T_f ? (b). Berapakah besar kerja yang terjadi?
2. Sebuah bejana berisi air dan uap cair pada 100 °C. Hitung perubahan tekanan parsial uap setelah bejana diisi dengan gas inert dengan tekanan parsial 20 bar. Gas inert tidak larut dalam air. Ketergantungan kerapatan air pada tekanan adalah

$$\rho_l(p) = \rho_0[1 + \chi_T(p - p'_s)]$$

dengan $\rho_0 = 959 \text{ kg/m}^3$ dan $\chi_T = 0,46 \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$ adalah densitas dan kompresibilitas air pada 100 °C. $p'_s = 1,01 \text{ bar}$ merupakan tekanan uap saturasi pada suhu tersebut.

BAB IV

RELASI TERMODINAMIKA DAN CAMPURAN

TEORI SINGKAT

Variasi hubungan antara variabel keadaan termodinamika dapat diturunkan dari fakta bahwa potensial termodinamika U, F, H, G , dan Φ adalah fungsi keadaan. Semuanya memiliki perbedaan yang mencolok. Turunan total energi internal ditunjukkan oleh persamaan (4.1) dan (4.2) berikut ini.

$$dU = T dS - p dV + \mu dN \tag{4.1}$$

$$dU = \left. \frac{\partial U}{\partial S} \right|_{V,N} + \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_{S,N} + \left. \frac{\partial U}{\partial N} \right|_{S,V} dN \tag{4.2}$$

Persamaan tersebut memiliki hubungan dengan persamaan (4.3) di bawah

$$\left. \frac{\partial}{\partial V} \left(\left. \frac{\partial U}{\partial S} \right|_{V,N} \right) \right|_{S,N} = \left. \frac{\partial}{\partial S} \left(\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_{S,N} \right) \right|_{V,N} \tag{4.3}$$

sehingga hubungan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk persamaan (4.4) berikut:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_{S,N} = - \left. \frac{\partial p}{\partial S} \right|_{V,N}, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial N} \right|_{S,V} = \left. \frac{\partial \mu}{\partial S} \right|_{V,N}, \quad - \left. \frac{\partial p}{\partial N} \right|_{S,V} = \left. \frac{\partial \mu}{\partial V} \right|_{S,N} \tag{4.4}$$

Energi bebas $F(T, V, N)$ dapat dituliskan sebagai persamaan (4.5) dan (4.6) berikut

$$dF = -S dT - p dV + \mu dN \tag{4.5}$$

$$- \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_{T,N} = - \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_{V,N}, \quad - \left. \frac{\partial S}{\partial N} \right|_{T,V} = \left. \frac{\partial \mu}{\partial T} \right|_{V,N}, \quad - \left. \frac{\partial p}{\partial N} \right|_{T,V} = \left. \frac{\partial \mu}{\partial V} \right|_{T,N} \tag{4.6}$$

Pada fungsi entalpi $H(S, p, N)$ dapat diwakilkan oleh persamaan (4.7) dan (4.8) di bawah ini:

$$dH = T dS + V dp + \mu dN \tag{4.7}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_{S,N} = \left. \frac{\partial V}{\partial S} \right|_{p,N}, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial N} \right|_{S,p} = \left. \frac{\partial \mu}{\partial S} \right|_{p,N}, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial N} \right|_{S,p} = \left. \frac{\partial \mu}{\partial p} \right|_{S,N} \tag{4.8}$$

Fungsi entalpi bebas $G(T, p, N)$ dituliskan sebagai persamaan (4.9) dan (4.10) berikut ini:

$$dG = -S dT + V dp + \mu dN \tag{4.9}$$

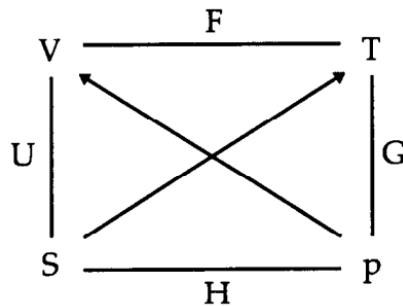
$$- \left. \frac{\partial S}{\partial p} \right|_{T,N} = \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_{p,N}, \quad - \left. \frac{\partial S}{\partial N} \right|_{T,p} = \left. \frac{\partial \mu}{\partial T} \right|_{p,N}, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial N} \right|_{T,p} = \left. \frac{\partial \mu}{\partial p} \right|_{T,N} \tag{4.10}$$

dengan fungsi potensial $\Phi(T, V, \mu)$ menjadi persamaan (4.11) dan (4.12) berikut:

$$d\Phi = -S dT - p dV - N d\mu \quad (4.11)$$

$$-\left.\frac{\partial S}{\partial V}\right|_{T,\mu} = \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_{V,\mu}, \quad \left.\frac{\partial S}{\partial \mu}\right|_{T,V} = \left.\frac{\partial N}{\partial T}\right|_{V,\mu}, \quad \left.\frac{\partial p}{\partial \mu}\right|_{T,V} = \left.\frac{\partial N}{\partial V}\right|_{T,\mu} \quad (4.12)$$

Persamaan (4.4), (4.6), (4.8), (4.10), dan (4.12) disebut sebagai Hubungan Maxwell. Pada berbagai literatur, biasanya sering dianggap bahwa sistem dengan jumlah partikel konstan sehingga jumlah hubungannya berkurang. Namun, apabila ada tambahan variabel keadaan, seperti medan magnet dan momen dipol magnetik, maka hubungannya perlu ditambah dan dirinci lebih lanjut lagi. Keberadaan potensial termodinamika dan hubungan Maxwell sulit diamati pada tahapan awal. Namun, proses tersebut tetap terjadi dan dapat diamati melalui persegi termodinamika (*thermodynamic rectangle*) pada Gambar 4.1 berikut ini.



Gambar 4.1. Persegi Termodinamika

Persegi termodinamika dapat digunakan ketika suatu sistem memiliki jumlah partikel yang konstan dan tanpa variabel keadaan tambahan. Variabel V, T, p, S dan adalah kuantitas yang memungkinkan ada apabila jumlah partikel dibuat konstan dan membentuk segi empat. Potensial ditunjukkan melalui garis yang ada berdasarkan variabel yang berlaku pada suatu keadaan. Misalnya, ada hubungan $\frac{\partial F}{\partial V} = -p$. Tanda negatif berarti arah V berlawanan dengan arah panah. Contoh lainnya adalah $\frac{\partial G}{\partial p} = +V$.

Contoh 4.1

Hubungan umum dapat ditentukan melalui kapasitas panas C_v dan C_p . Kuantitas yang dimiliki hanya yang mudah diukur. Buatlah hubungan tersebut.

Solusi:

Dengan jumlah partikel $N =$ konstan, maka

$$C_v = \left. \frac{\partial Q}{\partial T} \right|_v = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_v = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_v$$

$$C_p = \left. \frac{\partial Q}{\partial T} \right|_p = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_p = \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_p$$

Pada persamaan pertama, T dan V diset agar menjadi variabel yang dapat berubah-ubah. Pada persamaan kedua, T dan p yang dibuat sebagai variabel independen. Persamaan tersebut dapat ditulis menjadi

$$dQ = T dS = C_v dT + T \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_T dV$$

$$dQ = T dS = C_p dT + T \left. \frac{\partial S}{\partial p} \right|_T dp$$

$$dQ = T dS = C_p dT + T \left. \frac{\partial S}{\partial p} \right|_T \left(\left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V dT + \left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_T dV \right)$$

Berhubung dS berbentuk diferensial komplit, maka koefisien dT pada persamaan di atas menjadi

$$C_v = C_p + T \left. \frac{\partial S}{\partial p} \right|_T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V$$

Namun, persamaan di atas belum terlalu ringkas untuk penggunaannya. Hubungan Maxwell perlu dimasukkan pada tahapan ini, yaitu

$$\left. \frac{\partial S}{\partial p} \right|_T = - \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p$$

Bagian kanan persamaan di atas merupakan koefisien ekspansi isobarik α ,

$$\left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p = \alpha V$$

Kemudian,

$$dV = \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p dT + \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_T dp$$

Apabila proses terjadi saat volume konstan ($dV = 0$), maka

$$\left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V = - \frac{\left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p}{\left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_T}$$

Pada bagian pembilang, ada koefisien ekspansi αV . Sementara itu, pada bagian penyebut, ada koefisien kompresibilitas isothermal $V\kappa$.

$$\left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_T = -V\kappa$$

Bentuk akhir persamaan di atas dapat dituliskan sebagai

$$C_p = C_v + TV \frac{\alpha^2}{\kappa}$$

Contoh 4.2

Gas yang sempurna dapat dituliskan melalui persamaan $pV = NkT$ dan energi internalnya hanya merupakan fungsi suhu. Tunjukkan bahwa:

- a. $C_p = C_v + k$, dengan C_p dan C_v merupakan kapasitas panas (per molekul) pada tekanan dan volume konstan.
- b. Kuantitas pV^γ bernilai konstan selama ekspansi adiabatik (misalkan $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \text{konstan}$).

Solusi:

- a. Berdasarkan $pV = NkT$ dan $T dS = dU + p dV$, maka

$$C_p - C_v = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p - T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = Nk$$

Sehingga $C_p - C_v = k$.

- b. Untuk proses adiabatik, $T dS = 0$, sehingga $C_v dT = -p dV$. Masukkan ke persamaan $pV = NkT$, maka

$$p dV + V dp = Nk dT = (C_p - C_v) dT$$

Ini membuat $\gamma p dV + V dp = 0$ atau

$$pV^\gamma = \text{konstan}$$

Contoh 4.3

Sebuah bejana berinsulasi sepuluh liter dibagi menjadi dua kompartemen yang sama oleh sebuah dinding. Kompartemen pertama berisi O_2 pada 5 bar dan $80\text{ }^\circ\text{C}$, sedangkan kompartemen kedua berisi CO_2 pada 2 bar dan $50\text{ }^\circ\text{C}$. Dinding pecah sehingga gas bercampur. Hitung suhu dan tekanan akhir. Hitung juga perubahan energi dalam, entalpi, dan entropi. Kapasitas kalor O_2 dan CO_2 pada tekanan konstan masing-masing adalah 930 J/kgK dan 914 J/kgK , dan rasio yang sesuai dari kapasitas panas C_p/C_v masing-masing adalah 1,39 dan 1,26.

Solusi:

Berhubung pencampuran berlangsung pada volume konstan dan bejana diisolasi secara termal, maka energi internal total sistem tetap ada di dalam proses. Oleh karena itu,

$$\sum_i m_i c_v^i T_i' = \left(\sum_i m_i c_v^i \right) T$$

i merujuk pada setiap nilai yang dimiliki oleh dua komponen. Massa m_i diambil dari persamaan gas ideal $m_i = \frac{p_i' V_i' M_i}{RT_i'}$ untuk setiap komponen yang dicampurkan. Apabila menggunakan $\frac{R}{M_i} = C_p^i - C_v^i$ dan $\frac{C_p^i}{C_v^i} = \kappa_i$, maka suhu akhirnya adalah

$$T = \frac{\sum_i \frac{p_i' V_i'}{\kappa_i - 1}}{\sum_i \frac{p_i' V_i'}{T_i' (\kappa_i - 1)}} = 68,1\text{ }^\circ\text{C}$$

Tekanan akhir p didapat dari $\sum_i \frac{m_i}{M_i} = \sum_i \frac{p_i' V_i'}{RT_i'} = \frac{pV}{RT}$, dengan $V = \sum_i V_i'$ atau dapat dituliskan sebagai

$$p = \frac{T}{V} \sum_i \frac{p_i' V_i'}{T_i'} = 3,47\text{ bar}$$

Perubahan entalpi adalah

$$\Delta H = \sum_i m_i c_p^i (T - T_i') = -28,8\text{ J}$$

Perubahan entalpi adalah

$$\Delta S = \sum_i \left[m_i c_p^i \ln(T/T'_i) - \left(\frac{m_i R}{M_i} \right) \ln \left(\frac{p_i}{p'_i} \right) \right] = -7,1 J/K$$

dengan p_i merupakan tekanan parsial komponen i pada keadaan akhir.

Latihan

1. Dengan menggunakan persamaan keadaan $pV = NRT$ dan kalor jenis per mol $C_v = 3R/2$ untuk gas ideal monoatomik, tentukan energi bebas Helmholtz F sebagai fungsi dari jumlah mol N , R , dan T .
2. Pertimbangkan sebuah silinder yang dipisahkan menjadi dua bagian oleh piston adiabatik dan tidak tembus air. Kompartemen a dan b masing-masing berisi satu mol gas ideal monoatomik dan volume awalnya masing-masing adalah $V_{ai} = 10$ liter dan $V_{bi} = 1$ liter. Silinder yang dindingnya hanya memungkinkan untuk perpindahan panas, direndam dalam bak besar pada 0°C . Piston sekarang digerakkan secara reversibel sehingga volume akhirnya adalah $V_{bf} = 6$ dan $V_{af} = 5$ liter. Berapakah usaha yang diberikan oleh (atau ke) sistem?
3. Fotosfer matahari dapat diwakili oleh campuran gas ideal dari elektron, proton, dan atom hidrogen. Energi ionisasi hidrogen sama dengan $13,6$ eV. Bagaimanakah ketergantungan konsentrasi atom hidrogen pada suhu? Buatlah dalam bentuk persamaan.
4. Radiasi benda hitam.
 - a. Turunkan hubungan Maxwell berikut

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

- b. Berdasarkan teori elektromagnetik Maxwell, ditemukan bahwa tekanan p dari medan radiasi isotropik setara dengan $\frac{1}{3}$ densitas energi $u(T)$, yaitu $p = \frac{1}{3} u(T) = \frac{U(T)}{3V}$, dengan V adalah volume *cavity*. Dengan menggunakan hukum pertama dan kedua termodinamika serta hasil yang ada pada soal (a), tunjukkan bahwa

$$u = \frac{1}{3}T \frac{du}{dT} - \frac{1}{3}u$$

5. Pada sistem magnetik sederhana, jika suhu T dipertahankan konstan dan medan magnet H diubah menjadi $H + \Delta H$, entropi S berubah sebesar ΔS ,

$$\Delta S = -\frac{CH\Delta H}{T^2}$$

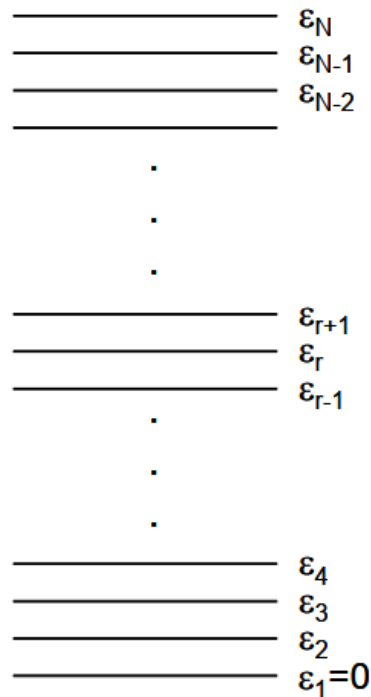
dengan C adalah karakteristik konstanta system. Tentukan bagaimana magnetisasi M bergantung pada suhu. Gambarkan grafik M versus T untuk nilai H yang kecil.

6. Sebuah membran permeabel hanya untuk air membagi kapal menjadi dua kompartemen. Kompartemen pertama berisi larutan glukosa 0,5%, sedangkan kompartemen kedua berisi larutan air sukrosa 0,8%. Hitung perbedaan tekanan melintasi membran dalam kesetimbangan pada 90 °C! Massa kilomolar air, glukosa, dan sukrosa berturut-turut adalah 18 kg/kmol, 180 kg/kmol, dan 342 kg/kmol. Asumsikan bahwa larutan tersebut ideal dan air tidak dapat dimampatkan, densitasnya adalah 1000 kg/m³. Bagaimanakah hasilnya apabila kedua konsentrasi larutan dinaikkan menjadi 100 kali nilai awalnya?

BAB V
STATISTIK MAXWELL-BOLTZMAN

5.1 Konfigurasi Penyusunan Sistem Klasik

Untuk sistem klasik, seperti atom gas, perbedaan energi dua tingkat berdekatan mendekati nol, atau $\epsilon_{i+1} - \epsilon_i \rightarrow 0$. Perbedaan energi yang mendekati nol memiliki makna bahwa tingkat energi sistem klasik bersifat kontinu. Sistem menempati salah satu dari keadaan energi di atas. Dalam sistem klasik juga tidak ada batasan jumlah sistem yang dapat menempati satu keadaan energi. Satu keadaan energi dapat saja kosong, atau ditempati oleh satu sistem, oleh dua sistem, dan seterusnya. Bahkan semua sistem berada pada satu keadaan energi pun tidak dilarang.



Gambar 5.1 Tingkat-tingkat energi yang dimiliki assembly

Cara menghitung berbagai kemungkinan penyusunan sistem serta probabilitas kemunculannya menjadi mudah bila tingkat-tingkat energi yang

dimiliki assembli dibagi atas beberapa kelompok, seperti diilustrasikan pada Gambar 5.2. Tiap kelompok memiliki jangkauan energi yang cukup kecil

Kelompok pertama memiliki jangkauan energi : 0 sampai ϵ

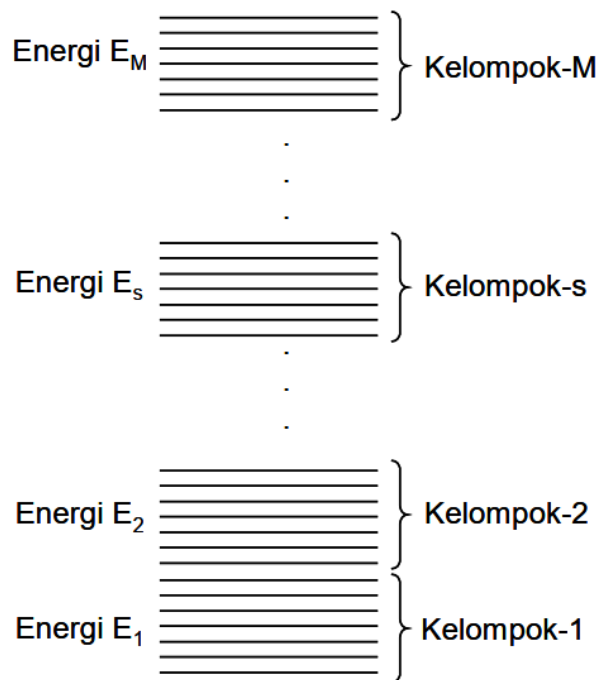
Kelompok kedua memiliki jangkauan energi : ϵ sampai 2ϵ

Kelompok ketiga memiliki jangkauan energi : 2ϵ sampai 3ϵ

·
·
·

Kelompok ke-s memiliki jangkauan energi : $(s-1)\epsilon$ sampai $s\epsilon$

Kelompok ke-N memiliki jangkauan energi : $(N - 1)\epsilon$ sampai $N\epsilon$



Gambar 5.2 Kelompok-kelompok energi dalam assembli

Satu kelompok energi mengandung sejumlah keadaan energi. Jumlah keadaan energi pada kelompok yang berbeda bisa sama dan bisa berbeda. Misalkan jumlah keadaan energi pada tiap-tiap kelompok tersebut sebagai berikut:

Jumlah keadaan pada kelompok pertama : g_1

Jumlah keadaan pada kelompok kedua : g_2

Jumlah keadaan pada kelompok ketiga : g_3

Jumlah keadaan pada kelompok ke-s : g_s

·
·
·

Jumlah keadaan pada kelompok ke-N : g_N

Energi keadaan yang berbeda dalam satu kelompok umumnya berbeda. Tetapi karena perbedaan energi keadaan yang berbeda dalam satu kelompok sangat kecil (mendekati nol) maka kita dapat mengasumsi bahwa energi dalam satu kelompok diwakili oleh satu nilai energi saja. Energi tersebut dianggap sebagai energi rata-rata keadaan dalam kelompok yang bersangkutan. Jadi,

Energi rata-rata kelompok pertama : E_1

Energi rata-rata kelompok kedua : E_2

Energi rata-rata kelompok ketiga : E_3

·
·
·

Energi rata-rata kelompok ke-s : E_s

·

-
-

Energi rata-rata kelompok ke-M : E_M

Misalkan pada konfigurasi tertentu tiap-tiap kelompok energi telah ditempati oleh sejumlah sistem sebagai berikut:

Jumlah sistem pada kelompok energi pertama : n_1

Jumlah sistem pada kelompok energi kedua : n_2

Jumlah sistem pada kelompok energi ketiga : n_3

-
-
-

Jumlah sistem pada kelompok energi ke-s : n_s

-
-
-

Jumlah sistem pada kelompok energi ke-M : n_M

Jumlah total sistem dalam assembli adalah N. Karena N sistem tersebut terdistribusi pada semua kelompok energi maka terpenuhi

$$N = \sum_{s=1}^M n_s \tag{5.1}$$

Energi total assembli memenuhi

$$U = \sum_{s=1}^M n_s E_s \tag{5.2}$$

Untuk mencari probabilitas kemunculan konfigurasi dengan kondisi

Ada n_1 sistem pada kelompok energi 1

Ada n_2 sistem pada kelompok energi 2

Ada n_3 sistem pada kelompok energi 3

.

.

Ada n_s sistem pada kelompok energi s

.

.

.

Ada n_M sistem pada kelompok energi M

ekivalen dengan mencari berapa cara penyusunan:

n_1 sistem pada g_1 keadaan energi di kelompok energi 1

n_2 sistem pada g_2 keadaan energi di kelompok energi 2

n_3 sistem pada g_3 keadaan energi di kelompok energi 3

.

.

.

n_s sistem pada g_s keadaan energi di kelompok energi s

.

.

.

n_M sistem pada g_M keadaan energi di kelompok energi M

Selanjutnya kita akan menentukan jumlah cara penyusunan system-sistem yang tersebar pada tingkat-tingkat energi di atas. Untuk maksud tersebut, mari kita mulai dengan menganggap semua keadaan energi kosong (tidak di tempati sistem) dan di luar ada sejumlah sistem yang akan diisi pada keadaan-keadaan tersebut. Di sini ada dua tahap proses yang terjadi, yaitu: proses I adalah membawa N buah sistem dari luar ke dalam assembli dan proses II adalah menyusun sistem pada kelompok-kelompok energi yang ada di dalam assembli.

Proses I: Membawa N Buah Sistem ke Dalam Assembli

Mari kita hitung jumlah cara yang dapat ditempuh pada tiap proses pertama yaitu membawa buah sistem dari luar ke dalam assembli. Proses ini tidak bergantung pada konfigurasi assembli. Yang terpenting adalah bagaimana membawa masuk N buah sistem ke dalam assembli. Untuk menentukan jumlah cara tersebut, perhatikan tahap-tahap berikut ini.

i) Ambil satu sistem dari daftar N buah sistem yang berada di luar assembli. Kita bebas

memilih satu sistem ini dari buah sistem yang ada tersebut. Jadi jumlah cara pemilihan

sistem yang pertama kali dibawa masuk ke dalam assembli adalah N cara.

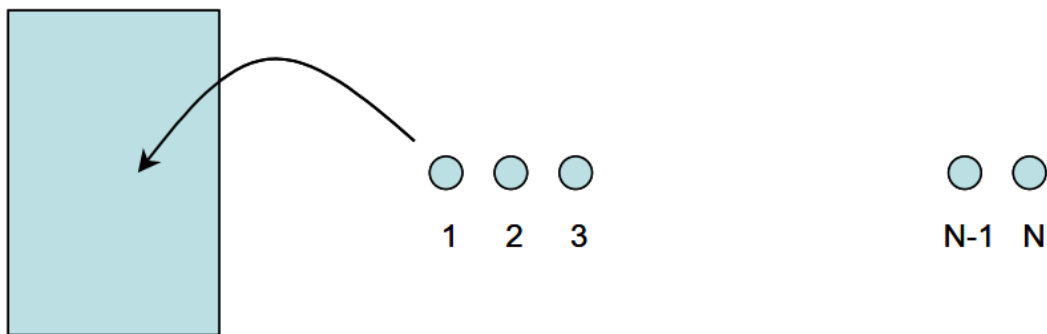
ii) Setelah sistem pertama dimasukkan ke dalam assembli maka tersisa $N-1$ sistem dalam daftar di luar. Ketika membawa masuk sistem ke dua ke dalam assembli kita dapat memilih salah satu dari $N-1$ buah sistem dalam daftar. Jumlah cara pemilihan sistem ini adalah $N-1$ cara.

iii) Begitu seterusnya.

iv) Akhirnya, ketika sistem ke- N akan dimasukkan ke dalam assembli hanya ada satu sistem yang tersisa di luar. Tidak ada pilihan-pilihan yang mungkin sehingga jumlah cara memasukkan sistem ke- N ke dalam assembli adalah hanya 1 cara.

v) Dengan demikian, jumlah total cara membawa masuk N buah sistem ke dalam assembli adalah

$$N \times (N - 1) \times (N - 2) \times \dots \times 2 \times 1 = N!$$

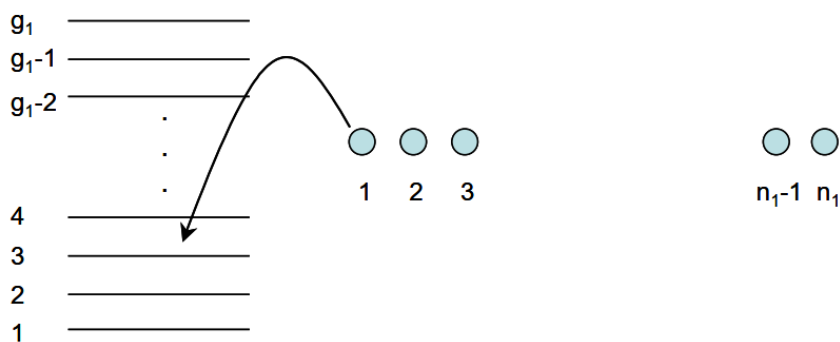


Gambar 5.3 Cara membawa N sistem di luar masuk ke dalam assembli

Proses II: Penyusunan Sistem di Dalam Kelompok-Kelompok Energi

Selanjutnya kita tinjau proses kedua. Tahapan yang ditempuh sebagai berikut.

i) Tinjau kelompok 1 yang mengandung keadaan dan ditempati oleh sistem. Sebagai ilustrasi lihat Gambar 5.4



Gambar 5.4 Menentukan cara menyusun n_1 sistem pada g_1 keadaan

Ambil partikel pertama. Kita dapat menempatkan partikel ini entah di keadaan ke-1, keadaan ke-2, keadaan ke-3, dan seterusnya hingga keadaan ke- n_1 . Jadi jumlah cara menempatkan partikel pertama pada kelompok-1 yang memiliki keadaan adalah g_1 cara. Setelah partikel-1 ditempatkan, kita ambil partikel 2. Partikel ini pun dapat ditempatkan di keadaan ke-1, keadaan ke-2, keadaan ke-3, dan seterusnya hingga keadaan ke- n_1 . Dengan demikian, jumlah cara menempatkan partikel kedua juga g_1 cara. Hal yang sama juga berlaku bagi partikel ke-3, partikel ke-4, dan seterusnya, hingga partikel ke- n_1 . Akhirnya, jumlah cara menempatkan partikel pada buah keadaan adalah

$$g_1 \times g_1 \times g_1 \times \dots \times g_1 \text{ (} n_1 \text{ buah perkalian)} = g_1^{n_1}$$

Sejumlah cara di atas secara implisit mengandung makna bahwa urutan pemilihan partikel yang berbeda menghasilkan penyusunan yang berbeda pula. Padahal tidak demikian. Urutan pemilihan yang berbeda dari sejumlah partikel yang ada tidak berpengaruh pada penyusunan asalkan jumlah partikel pada tiap bangku tetap jumlahnya. Urutan pemilihan sejumlah partikel menghasilkan macam cara penyusunan. Dengan demikian, jumlah riil cara penyusunan partikel pada buah keadaan seharusnya adalah

$$\frac{g_1^{n_1}}{n_1!}$$

Penjelasan yang sama juga berlaku bagi buah partikel yang disusun pada keadaan. Jumlah cara penyusunan partikel tersebut adalah

$$\frac{g_2^{n_2}}{n_2!}$$

Secara umum jumlah cara menempatkan partikel di dalam kelompok energi yang mengandung keadaan adalah

$$\frac{g_s^{n_s}}{n_s!}$$

Akhirnya jumlah cara mendistribusikan secara bersama-sama sistem pada kelompok dengan keadaan, sistem pada kelompok dengan keadaan, .., sistem pada keadaan adalah

$$\frac{g_1^{n_1}}{n_1!} \times \frac{g_2^{n_2}}{n_2!} \times \frac{g_3^{n_3}}{n_3!} \times \dots \times \frac{g_M^{n_M}}{n_M!} = \prod_{s=1}^M \frac{g_s^{n_s}}{n_s!}$$

Dengan demikian, jumlah total cara menempatkan N buah sistem ke dalam konfigurasi yang mengandung sistem pada kelompok dengan keadaan, sistem pada kelompok dengan keadaan, .., sistem pada kelompok dengan keadaan adalah

$$W = N! \prod_{s=1}^M \frac{g_s^{n_s}}{n_s!} \tag{5.3}$$

Kita tinjau assembli yang terisolasi dari lingkungan. Tidak ada pertukaran partikel maupun energi antara assembli dan lingkungan. Dengan demikian, jumlah sistem dan energi total U yang dimiliki assembli konstan. Akibatnya

$$\delta N = \sum_{s=1}^M \delta n_s = 0 \tag{5.4}$$

$$\delta U = \sum_{s=1}^M E_s \delta n_s = 0 \tag{5.5}$$

5.2 Konfigurasi Dengan Probabilitas Maksimum

Sekarang kita mencari konfigurasi yang memiliki probabilitas kemunculan paling besar. Kita menganggap bahwa konfigurasi yang dibentuk oleh sistem-sistem dalam assembli yang menghasilkan besaran makroskopik adalah konfigurasi

dengan probabilitas maksimum tersebut. Cara yang dilakukan adalah mencari kumpulan sedemikian sehingga W maksimum. Tetapi karena W merupakan perkalian sejumlah faktor maka akan lebih mudah jika kita memaksimalkan. Karena jika maksimum maka W pun maksimum. Kita peroleh

$$\begin{aligned}
 \ln W &= \ln N! + \ln \prod_{s=1}^M \frac{g_s^{n_s}}{n_s!} \\
 &= \ln N! + \ln \left\{ \frac{g_1^{n_1}}{n_1!} \times \frac{g_2^{n_2}}{n_2!} \times \dots \times \frac{g_M^{n_M}}{n_M!} \right\} \\
 &= \ln N! + \ln \left(\frac{g_1^{n_1}}{n_1!} \right) + \ln \left(\frac{g_2^{n_2}}{n_2!} \right) + \dots + \ln \left(\frac{g_M^{n_M}}{n_M!} \right) \\
 &= \ln N! + \sum_{s=1}^M \ln \left(\frac{g_s^{n_s}}{n_s!} \right) \\
 &= \ln N! + \sum_{s=1}^M \{ \ln g_s^{n_s} - \ln n_s! \} \\
 &= \ln N! + \sum_{s=1}^M \{ n_s \ln g_s - \ln n_s! \}
 \end{aligned}$$

5.6

Karena baik maupun merupakan bilangan-bilangan yang sangat besar maka untuk mempermudah perhitungan kita dapat menggunakan pendekatan Stirling sebagai berikut

$$\ln N! \cong N \ln N - N$$

$$\ln n_s \cong n_s \ln n_s - n_s$$

sehingga kita dapatkan bentuk aproksimasi

$$\ln W \cong N \ln N - N + \sum_{s=1}^M \{ n_s \ln g_s - n_s \ln n_s + n_s \}$$

5.7

Dengan demikian, diferensial dari $\ln W$ menjadi

$$\begin{aligned}
 \delta \ln W &\cong \delta N \ln N - \delta N + \delta \sum_{s=1}^M \{n_s \ln g_s - n_s \ln n_s + n_s\} \\
 &= 0 - 0 + \sum_{s=1}^M \{\delta n_s \ln g_s + n_s \delta \ln g_s - \delta n_s \ln n_s - n_s \delta \ln n_s + \delta n_s\} \\
 &= \sum_{s=1}^M \left\{ \delta n_s \ln g_s + n_s \times 0 - \delta n_s \ln n_s - n_s \left(\frac{1}{n_s} \delta n_s \right) + \delta n_s \right\} \\
 &= \sum_{s=1}^M \{\delta n_s \ln g_s - \delta n_s \ln n_s\} \\
 &= \sum_{s=1}^M \{\ln g_s - \ln n_s\} \delta n_s \\
 &= \sum_{s=1}^M \ln \left(\frac{g_s}{n_s} \right) \delta n_s
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Karena kita harus menerapkan syarat batas kekekalan energi dan jumlah partikel, maka solusi untuk n_s dicari dengan menerapkan perngali Langrange sebagai berikut

$$\delta \ln W + \alpha \delta N + \beta \delta U = 0 \tag{5.9}$$

Substitusi persamaan (5.4), (5.5), dan (5.8) ke dalam persamaan (5.9) diperoleh

$$\sum_{s=1}^M \ln \left(\frac{g_s}{n_s} \right) \delta n_s + \alpha \sum_{s=1}^M \delta n_s + \beta \sum_{s=1}^M E_s \delta n_s = 0$$

yang dapat disederhanakan menjadi

$$\sum_{s=1}^M \left\{ \ln \left(\frac{g_s}{n_s} \right) + \alpha + \beta E_s \right\} \delta n_s = 0 \tag{5.10}$$

Karena kondisi ini berlaku untuk nilai n_s berapapun maka harus terpenuhi

$$\ln\left(\frac{g_s}{n_s}\right) + \alpha + \beta E_s = 0$$

$$\ln\left(\frac{g_s}{n_s}\right) = -\alpha - \beta E_s$$

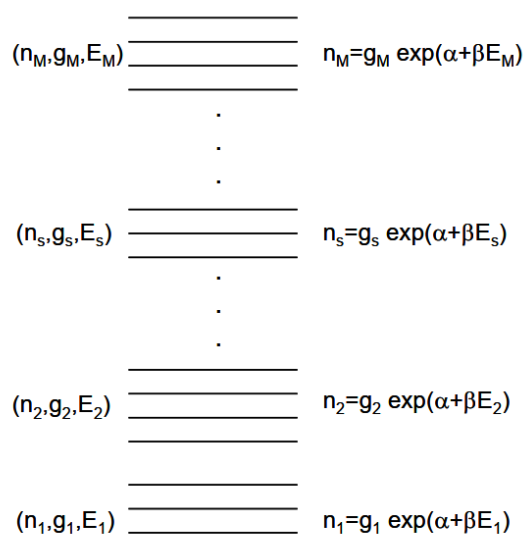
$$\frac{g_s}{n_s} = \exp(-\alpha - \beta E_s)$$

yang menghasilkan ungkapan untuk n_s sebagai

$$n_s = g_s \exp(\alpha + \beta E_s) \tag{5.11}$$

Jadi konfigurasi yang memiliki peluang kemunculan paling besar adalah yang memiliki jumlah sistem pada tiap kelompok energi yang memenuhi persamaan (5.11).

Gambar 2.5 adalah ilustrasi yang mngambrakan jumlah partikel yang menempati berbagai kelompok energi.



Gambar 5.5 Jumlah partikel yang menempati tiap kelompok energi

Contoh 5.1

Jelaskan perbedaan antara statistik Maxwell-Boltzmann dengan statistik lainnya. Bagaimana hubungan statistik-statistik tersebut dengan keterbedaan dari partikel-partikel identik?

Solusi:

Statistik Maxwell-Boltzmann berlaku untuk sistem terlokalisasi, partikel-partikel saling terbedakan dan jumlah partikel yang dapat mengisi satu keadaan tidak dibatasi. Jumlah rata-rata partikel yang mengisi tingkat energi ϵ_l memenuhi bentuk umum

$$a_l = w_l \exp(-\alpha - \beta\epsilon_l)$$

dengan w_l adalah degenerasi dari tingkat energi ke- l . Statistik Fermi-Dirac berlaku untuk sistem yang terdiri atas fermion, partikel-partikel tak dapat terbedakan dan memenuhi prinsip larangan Pauli. Satu keadaan hanya dapat diisi maksimal dua partikel dengan arah spin berlawanan. Jumlah rata-rata partikel yang mengisi tingkat energi ϵ_l adalah

$$a_l = \frac{w_l}{e^{(\alpha + \beta\epsilon_l)} + 1}$$

Statistik Bose-Einstein berlaku untuk sistem yang terdiri atas boson, partikel-partikel tak dapat terbedakan. Satu keadaan kuantum dapat diisi oleh partikel dalam jumlah berapa pun. Jumlah rata-rata partikel yang mengisi tingkat energi ϵ_l adalah

$$a_l = \frac{w_l}{e^{(\alpha + \beta\epsilon_l)} - 1}$$

Contoh Soal 5.2

Jelaskan mengapa, statistik Maxwell-Boltzmann tepat digunakan untuk sistem: Gas He⁴ dalam suhu ruang dan tekanan standar (STP)!

Solusi

Gas He⁴ termasuk boson sehingga memenuhi statistik Bose-Einstein. Namun pada keadaan STP kita dapat mempergunakan statistik Maxwell-Boltzmann karena terpenuhi $e^{-\alpha} \ll 1$. Mari kita cek

$$e^{-\alpha} = n \left(\frac{h^2}{2\pi mkT} \right)^{1/2}$$

Kita menggunakan persamaan gas ideal $pV = NkT$, atau $n = N/V = p/kT$. Dengan demikian

$$e^{-\alpha} = n \left(\frac{h^2}{2\pi mkT} \right)^{1/2} = \frac{p}{kT} \left(\frac{h^2}{2\pi mkT} \right)^{1/2}$$

Pada STP maka $T \approx 300$ K, $P = 1$ atm ≈ 105 Pa. Dengan memasukkan nilai tersebut dan massa atom helium maka diperoleh $e^{-\alpha} \approx 3 \times 10^{-6} \ll 1$

Soal Latihan

1. Hitung temperatur dari sebuah sistem yang terisi $6,0 \times 10^{22}$ atom gas helium pada tekanan atmosfer.
2. Tiga energi terendah dari sebuah molekul adalah $E_1 = 0$, $E_2 = \epsilon$, $E_3 = 10\epsilon$. Tunjukkanlah bahwa untuk temperatur yang cukup rendah, hanya terdapat 2 tingkat energi yang dapat terisi (E_1 dan E_2). Tentukan seberapa rendah temperatur yang dimaksud.

3. Misalkan energi dari sebuah partikel dapat direpresentasikan dalam bentuk dengan z adalah kordinat, atau momentum, dan dapat memiliki nilai dari $-\infty$ sampai ∞ . Tunjukkanlah bahwa energi rata-rata tiap partikel untuk sistem di atas yang memenuhi statistik Boltzmann adalah $E_k = T / 2$

BAB VI

RUANG FASA DAN PARAMETER STATISTIK

TEORII RINGKAS

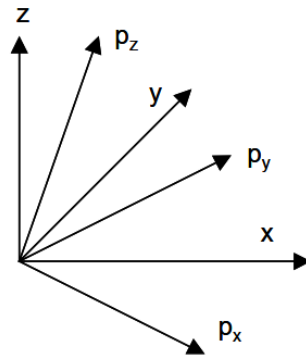
6.1 Defenisi Ruang Fasa

Ruang fasa adalah ruang yang dibentuk oleh ruang spasial dan ruang momentum atau ruanh spasial dan ruang kecepatan. Kita perlu memahami ruang fasa karena sebenarnya keadaan system statistik yang telah dan akan kita bahas adalah keadaan system tersebut dalam ruang fasa.

Misalkan kita memiliki sebuah partikel. Posisi partikel dapat diterangkan dengan lengkap oleh tiga koordinat ruang, yaitu x , y , dan z . Tetapi posisi saja tidak lengkap mendeskripsikan dinamika partikel. Kita juga memerlukan informasi tentang kecepatan partikel tersebut. Kecepatan partikel dapat didefinisikan dengan lengkap oleh tiga koordinat kecepatan, yaitu v_x , v_y , dan v_z . Dengan demikian, dinamika sebuah partikel dapat dijelaskan secara lengkap oleh enam buah koordinat, yaitu tiga koordinat ruang: x , y , dan z serta tiga koordinat kecepatan: v_x , v_y , dan v_z . Kita dapat menggabungkan enam koordinat tersebut dalam satu ungkapan, yaitu (x, y, z, v_x, v_y, v_z)

Karena momentum merupakan perkalian massa dan kecepatan, yaitu $\vec{p} = m\vec{v}$ maka alternatif lain untuk mendeskripsikan dinamikan partikel secara lengkap adalah memberikan tiga koordinat spasial dan tiga koordinat momentum. Dalam deskripsi ini, dinamika partikel dapat dijelaskan dengan lengkap jika tiga koordinat spasial dan tiga koordinat momentum dapat ditentukan.

Keenam koordinat tersebut digabung dalam satu ungkapan (x, y, z, p_x, p_y, p_z)



Gambar 6.1 Ilustrasi koordinat ruang fasa.

Ruang yang direpresentasikan oleh koordinat posisi saja disebut ruang spasial. Ruang yang diungkapkan oleh koordinat momentum saja disebut ruang momentum. Ruang yang direpresentasikan oleh gabungan koordinat ruang dan momentum disebut ruang fasa.

1.2 Elemen Volumen Ruang Fasa

Jika ruang fasa dibangun oleh ruang spasial tiga dimensi dan ruang momentum tiga dimensi maka:

Elemen volum ruang spasial adalah $dV_s = dx dy dz$

Elemen volum ruang momentum adalah: $dV_p = dp_x dp_y dp_z$

Elemen volum ruang fasa menjadi: $d\Gamma = dV_s dV_p = dx dy dz dp_x dp_y dp_z$

Jika ruang fasa dibangun oleh ruang spasial dua dimensi dan ruang momentum dua dimensi maka:

Elemen volum ruang spasial $dS_s = dx dy$

Elemen volum ruang momentum adalah: $dS_p = dp_x dp_y$

Elemen volum ruang fasa menjadi: $d\Gamma = dS_s dS_p = dx dy dp_x dp_y$

Jika ruang fasa dibangun oleh ruang spasial satu dimensi dan ruang momentum satu dimensi maka,

Elemen volum ruang spasial $dX = dx$

Elemen volum ruang momentum adalah: $dPp = dp_x$

Elemen volum ruang fasa adalah: $d\Gamma = dX dPp = dx dp_x$

Untuk kasus tiga dimensi, yang dimaksud elemen volum adalah elemen volum yang umumnya kita kenal. Untuk kasus dua dimensi, yang dimaksud elemen volum adalah elemen luas, sedangkan untuk kasus satu dimensi, yang dimaksud elemen volum adalah elemen Panjang.

1.3 Energi Kinetik

Tinjau elemen kecil volume dalam ruang fasa yang dibatasi oleh koordinat-koordinat berikut ini:

Antara x sampai $x + dx$

Antara y sampai $y + dy$

Antara z sampai $z + dz$

Antara p_x sampai $p_x + dp_x$

Antara p_y sampai $p_y + dp_y$

Antara p_z sampai $p_z + dp_z$

Volume ruang fasa elemen tersebut adalah

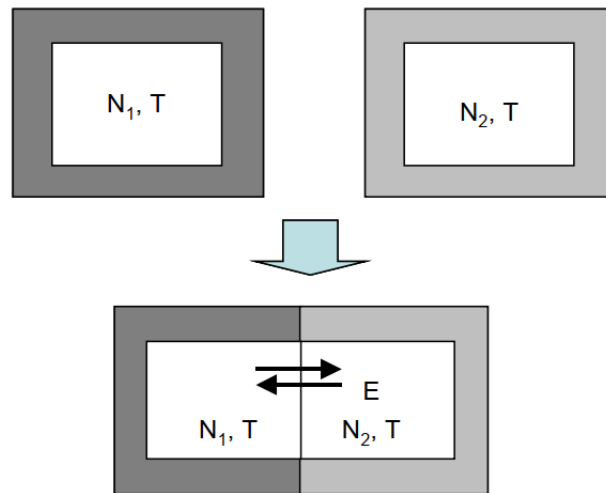
$$d\Gamma = dx dy dz dp_x dp_y dp_z \tag{6.1}$$

Di dalam elemen volume tersebut, komponen momentum partikel adalah p_x , p_y dan p_z . Dengan demikian, energi kinetik partikel yang berada dalam elemen volum tersebut adalah

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2m} ([mv_x]^2 + [mv_y]^2 + [mv_z]^2) \\ &= \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \end{aligned} \tag{6.2}$$

1.4 Menentukan Parameter β

Ketika mencari konfigurasi dengan probabilitas terbesar, kita memperkenalkan dua pengali Lagrange, yaitu α dan β untuk mengakomodasi syarat batas bahwa jumlah sistem dan energi assembli harus konstan. Secara fisis kita meyakini bahwa tidak mungkin ada sistem yang memiliki energi tak berhingga. Oleh karena itu jika $E_s \rightarrow \infty$ maka haruslah $n_s \rightarrow 0$. Ini hanya mungkin terpenuhi jika parameter β bernilai negatif. Lalu, bergantung pada besaran apakah β ?



Gambar 6.2 Dua buah assembli terisolasi digabung setelah membuka masing-masing satu sisinya. Pada batas dua assembli diijinkan pertukaran energi tetapi tidak diijinkan pertukaran partikel.

Setelah mengetahui bahwa nilai parameter β harus negatif mari kita mencari bentuk ekspresi dari parameter tersebut. Untuk mempermudah mari kita tinjau dua assembli terisolasi dan berada pada suhu yang sama T . Kesamaan suhu bermakna ke dua assembli berada dalam kesetimbangan termal. Assembli pertama memiliki sistem dan assembli kedua mengandung sistem. Kemudian salah satu sisi masing-masing assembli dilepas dan dua assembli dikontakkan pada sisi yang dilepas tersebut. Setelah dikontakkan dua assembli menjadi sebuah assembli baru yang tetap terisolasi dari lingkungan.

Misalkan pada permukaan kontak dua assembli dipasang dinding sedemikian rupa sehingga tidak ada pertukaran sistem antara dua assembli namun pertukaran energi diperbolehkan. Akibatnya, sebelum dan sesudah dua assembli disatukan, jumlah partikel di assembli kiri maupun assembli kanan tidak berubah. Tetapi energi yang dimiliki masing-masing assembli awal bisa berubah (lihat Gambar 6.2). Karena assembli gabungan terisolasi dari lingkungan maka pertukaran energi antar dua assembli awal tidak mengubah energi total assembli gabungan. Dengan persyaratan di atas kita dapatkan beberapa konstrain berikut ini

$$N_1 = \sum_s n_{1s} = \text{konstan} \quad 6.3$$

$$N_2 = \sum_s n_{2s} = \text{konstan} \quad 6.4$$

$$U = U_1 + U_2 = \sum_s n_{1s} E_{1s} + \sum_s n_{2s} E_{2s} = \text{konstan} \quad 6.5$$

Apabila kita nyatakan dalam bentuk diferensial, persamaan (6.3) sampai (6.5) berbentuk

$$\delta N_1 = \sum_s \delta n_{1s} = 0 \quad 6.6$$

$$\delta N_2 = \sum_s \delta n_{2s} = 0 \quad 6.7$$

$$\delta U = \sum_s E_{1s} \delta n_{1s} + \sum_s E_{2s} \delta n_{2s} = 0 \quad 6.8$$

Sebelum ke dua assembli digabung maka jumlah penyusunan sistem pada keadaan-keadaan energi di masing-masing assembli memenuhi

$$W_1 = N_1! \prod_s \left(\frac{g_{1s}^{n_{1s}}}{n_{1s}!} \right) \quad 6.9$$

$$W_2 = N_2! \prod_s \left(\frac{g_{2s}^{n_{2s}}}{n_{2s}!} \right) \quad 6.10$$

Ketika dua assembli digabung maka probabilitas penyusunan sistem-sistem pada assembli gabungan tersebut merupakan perkalian probabilitas penyusunan pada masing-masing assembli awal, yaitu

$$W = W_1 W_2$$

atau bila diungkapkan dalam notasi logaritma menjadi

$$\ln W = \ln W_1 + \ln W_2 \quad 6.11$$

Kita akan mencari konfigurasi dengan probabilitas maksimum dengan memperhatikan tiga konstrain pada persamaan (6.3) sampai (6.5). Ini menyaratkan pengenalan tiga pengali Lagrange α_1 , α_2 , dan β . Syarat maksimum memenuhi persamaan

$$\delta \ln W + \alpha_1 \delta N_1 + \alpha_2 \delta N_2 + \beta \delta U = 0 \quad 6.12$$

Dengan menggunakan persamaan (6.8) maka

$$\delta \ln W = \delta \ln W_1 + \delta \ln W_2 = \sum_s \frac{\partial \ln W_1}{\partial n_{1s}} \delta n_{1s} + \sum_s \frac{\partial \ln W_2}{\partial n_{2s}} \delta n_{2s} \quad 6.13$$

Substitusi persamaan (6.3), (6.4), (6.5), dan (6.10) ke dalam persamaan (6.9) diperoleh

$$\sum_s \frac{\partial \ln W_1}{\partial n_{1s}} \delta n_{1s} + \sum_s \frac{\partial \ln W_2}{\partial n_{2s}} \delta n_{2s} + \alpha_1 \sum_s \delta n_{1s} + \alpha_2 \sum_s \delta n_{2s} + \beta \left[\sum_s E_{1s} \delta n_{1s} + \sum_s E_{2s} \delta n_{2s} \right] = 0$$

yang dapat disederhanakan menjadi

$$\delta \ln W = \delta \ln W_1 + \delta \ln W_2 = \sum_s \frac{\partial \ln W_1}{\partial n_{1s}} \delta n_{1s} + \sum_s \frac{\partial \ln W_2}{\partial n_{2s}} \delta n_{2s} \quad 6.15$$

Agar persamaan (6.11) selalu terpenuhi untuk variasi δn_{1s} dan δn_{2s} berapa pun maka suku dalam kurung pada harus nol, atau

$$\frac{\partial \ln W_1}{\partial n_{1s}} + \alpha_1 + \beta E_{1s} = 0 \quad 6.16$$

$$\delta \ln W = \delta \ln W_1 + \delta \ln W_2 = \sum_s \frac{\partial \ln W_1}{\partial n_{1s}} \delta n_{1s} + \sum_s \frac{\partial \ln W_2}{\partial n_{2s}} \delta n_{2s} \quad 6.17$$

Persamaan (6.16) dan (6.17) mengandung β yang sama. Ini mengisyaratkan bahwa jika β merupakan fungsi parameter termodinamika maka parameter yang menentukan β haruslah yang tidak berubah sebelum dan sesudah dua assembli digabung. Parameter tersebut hanya suhu. Sebelum dan sesudah dua assembli digabung suhunya sama. Jadi kita simpulkan bahwa β hanya merupakan fungsi suhu, atau

$$\beta = \beta(T) \quad 6.18$$

1.5 Menentukan Parameter α

Setelah mengetahui ungkapan untuk g_s , kita siap menentukan parameter pengali Lagrange α . Kita mulai dari hubungan $n_s = g_s e^{\alpha + \beta E_s}$. Selanjutnya kita lakukan penjumlahan untuk semua s yang mungkin

Penjumlahan di ruas kiri adalah jumlah total sistem. Jadi

$$N = e^\alpha \sum_s g_s e^{\beta E_s} \quad 6.19$$

Mari kita fokuskan pada suku penjumlahan di ruas kanan persamaan (6.19). Kita ganti g_s dengan bentuk kontinu. Penjumlahan selanjutnya diganti dengan integral pada semua jangkai energi yang mungkin, yaitu dari $E = 0$ sampai $E = \infty$. Bentuk integral yang dimaksud adalah

$$\begin{aligned} N &= e^\alpha \int_0^\infty 2\pi V B (2m)^{3/2} e^{\beta E} E^{1/2} dE \\ &= 2\pi V B (2m)^{3/2} e^\alpha \int_0^\infty e^{\beta E} E^{1/2} dE \end{aligned} \quad 6.20$$

Untuk menyelesaikan integral (6.20) mari kita mendefinisikan $\beta E = -y$ sehingga

$$E = -\frac{y}{\beta} \tag{6.21a}$$

$$dE = -\frac{1}{\beta} dy \tag{6.21b}$$

dan

$$E^{1/2} = \left(-\frac{y}{\beta}\right)^{1/2} = \left(-\frac{1}{\beta}\right)^{1/2} y^{1/2} \tag{6.21c}$$

Dengan mensubstitusi persamaan (6.21a) sampai (6.21c) maka suku integral di ruas kanan persamaan (6.20) menjadi

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{\beta E} E^{1/2} dE &= \int_0^{\infty} e^{-y} \left(-\frac{1}{\beta}\right)^{1/2} y^{1/2} \left(-\frac{1}{\beta}\right) dy \\ &= \left(-\frac{1}{\beta}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{1/2} dy = \left(-\frac{1}{\beta}\right)^{3/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

di mana adalah fungsi gamma. Dapat dibuktikan secara analitik (walaupun agak panjang) dan juga sudah ditabelkan bahwa $\Gamma(x) \Gamma(3 / 2) = \pi / 2$ sehingga

$$\int_0^{\infty} e^{\beta E} E^{1/2} dE = \left(-\frac{1}{\beta}\right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{6.22}$$

Akhirnya, substitusi persamaan (6.22) ke dalam (6.20) diperoleh

$$\int_0^{\infty} e^{\beta E} E^{1/2} dE = \left(-\frac{1}{\beta}\right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{6.23}$$

Karena kita sudah membuktikan $\beta = -1/kT$ maka sehingga parameter α

$$N = 2\pi V B (2m)^{3/2} e^{\alpha} (kT)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= VB(2\pi mkT)^{3/2} e^{\alpha}$$

atau

$$\alpha = \ln \left[\frac{N}{VB(2\pi mkT)^{3/2}} \right] \quad 6.24$$

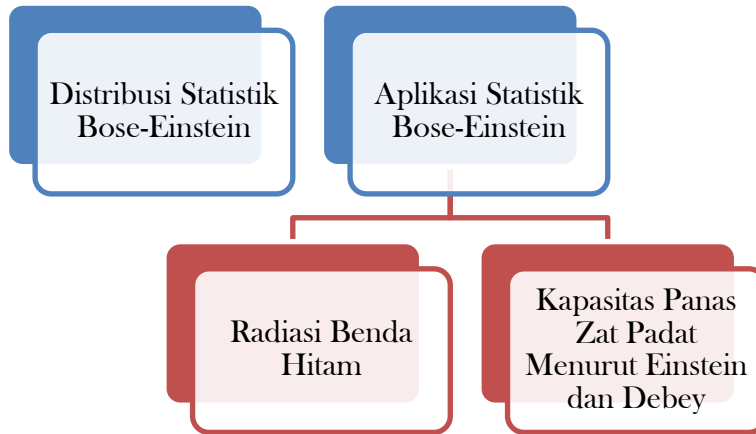
Hingga saat ini kita sudah lengkap menentukan parameter-parameter fungsi distribusi klasik yang semula merupakan pengali Lagrange yang diperkenalkan untuk memperhitungkan jumlah partikel konstan dan energi total konstan.

BAB VII

STATISTIK BOSE-EINSTEIN DAN APLIKASINYA

TEORI DASAR

A. Statistik Bose-Einstein



Distribusi Bose-Einstein adalah distribusi yang berkaitan pada mekanika kuantum.

$$W = \frac{(n + g - 1)!}{n! (g - 1)!}$$

Banyaknya konfigurasi partikel ini hanya berlaku pada tingkat energi tertentu. Jumlah total banyaknya cara partikel dapat menempati sistem adalah

$$\prod_i W_i = \prod_i \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i! (g_i - 1)!}$$

Sehingga apabila kita gunakan logaritma natural, maka

$$\sum_i \ln W_i = \sum_i [\ln(n_i + g_i - 1)! - \ln n_i! - \ln(g_i - 1)!]$$

$$\sum_i W_i = \sum_i [(n_i + g_i - 1) \ln(n_i + g_i - 1) - n_i \ln n_i - (g - 1) \ln(g - 1)]$$

Gunakan metode Lagrange untuk mengetahui nilai maksimum dan minimum dengan menghubungkannya pada relasi Maxwell dengan pengali Lagrange di dalamnya, yaitu

$$F(n_i) = \sum_i W_i + \alpha \sum_i n_i + \beta \sum_i E_i n_i \quad 7.1$$

Sehingga turunannya terhadap n_i adalah

$$F \frac{dF(n_i)}{dn_i} = \sum_i \frac{d \ln(W_i)}{d \ln n_i} + \alpha + \beta \sum_i E_i \quad 7.2$$

Pada suku pertama

$$\sum_i \frac{d \ln W_i}{d n_i} = \sum_i \ln \frac{n_i + g_i - 1}{n_i}$$

Sehingga ketika ruas kiri sama dengan nol dan untuk keadaan i , maka

$$\ln \frac{n_i + g_i - 1}{n_i} + \alpha + \beta E_i = 0$$

dan untuk $n_i + g_i \gg 1$, maka'

$$F n_i = \frac{g_i}{e^{(\alpha + \beta E_i)} - 1} \quad 7.3$$

Persamaan ini merupakan persamaan distribusi Bose-Einstein.

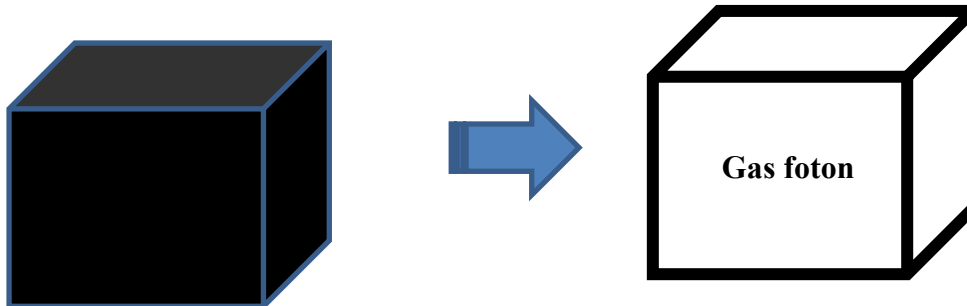
B. Aplikasi Statistik Bose-Einstein

Statistik ini diterapkan pada assembli boson, yaitu partikel kuantum dengan spin yang merupakan kelipatan bulat dari $h/2\pi$. Contoh boson adalah foton, fonon, dan atom helium.

Radiasi Benda Hitam

Benda hitam merupakan penyerap sekaligus pemancar kalor terbaik. Benda hitam

dapat dianalogikan sebagai kotak yang berisi gas foton



Kerapatan keadaan foton dalam kotak merupakan dua kali kerapatan gelombang stasioner, yaitu

$$g(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda \quad 7.4$$

Dengan demikian, jumlah foton dengan panjang gelombang antara λ sampai $\lambda + d\lambda$ adalah

$$n(\lambda)d\lambda = \frac{g(\lambda)d\lambda}{e^{E/KT} - 1} \quad 7.5$$

Karena energi satu foton adalah $E = hc / \lambda$ maka energi foton yang memiliki panjang gelombang antara λ sampai $\lambda + d\lambda$ adalah

$$E(\lambda)d\lambda = \frac{hc}{\lambda} n(\lambda)d\lambda$$

$$E(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{hc/kT} - 1} \quad 7.6$$

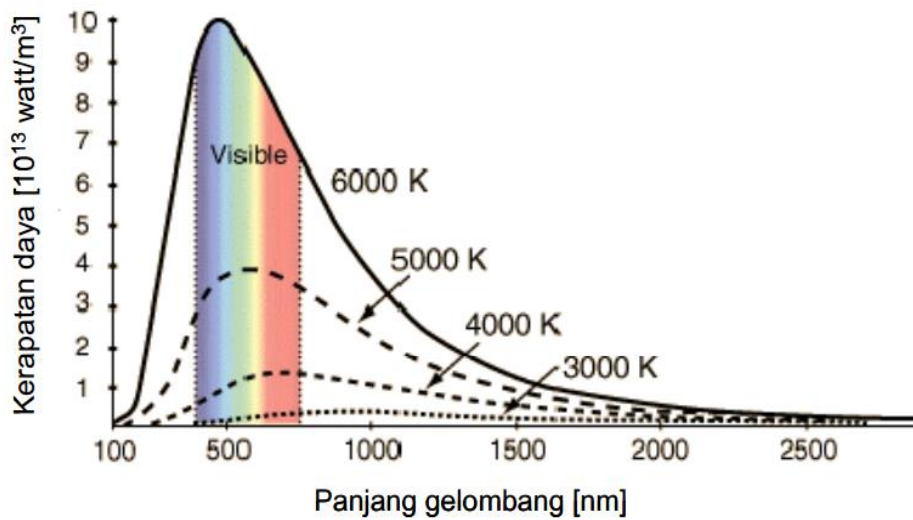
Jumlah foton

$$n(\lambda)d\lambda = \frac{g(\lambda)d\lambda}{e^{E/KT} - 1} \quad 7.7$$

Kerapatan keadaan foton

$$g(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda \quad 7.8$$

Hukum Pergeseran Wien



Spektrum Radiasi Benda Hitam Pada Berbagai Suhu

$$E(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{E/KT} - 1} \quad 7.9$$

Misalkan $x = \lambda kT / hc$. Dengan permisalan tersebut maka kita dapat menulis

$$E(\lambda) = 8\pi hc \left(\frac{kT}{hc}\right)^5 \frac{1}{x^5(e^{1/x} - 1)}$$

$$\frac{dE(\lambda)}{d\lambda} = \frac{dE(\lambda)}{dx} \frac{dx}{d\lambda} = \frac{kT}{hc} \frac{dE(\lambda)}{dx}$$

$$\frac{dE(\lambda)}{d\lambda} = \left(\frac{kT}{hc}\right) 8\pi hc \left(\frac{kT}{hc}\right)^5 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^5(e^{1/x} - 1)}\right) \quad 7.10$$

Agar terpenuhi $dE / d\lambda = 0$ maka pada persamaan harus terpenuhi

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^5(e^{1/x} - 1)} \right) = 0$$

Jika dilakukan diferensiasi secara seksama akan didapatkan hubungan berikut ini.

$$(1 - 5)e^{1/x} - 5 = 0$$

Gunakan instruksi Mathematica (Wolfram Research), maka solusi untuk x yang memenuhi persamaan adalah 0,194197. Dengan demikian, λ_m memenuhi hubungan.

$$\frac{\lambda_m k T}{hc} = 0,194197$$

atau

$$\lambda_m T = 0,194197 \frac{hc}{k}$$

Dengan menggunakan nilai konstanta $k = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K, $h = 6,625 \times 10^{-34}$ J s, dan $c = 3 \times 10^8$ m/s maka kita peroleh

$$\lambda_m T = 2,8 \times 10^{-3} mK \qquad 7.10$$

Persamaan ini tidak lain daripada ungkapan hukum pergeseran Wien. Menjelaskan hubungan antara suhu benda, gelombang dengan intensitas maksimum yang dipancarkan benda tersebut Hukum pergeseran Wien telah dipakai untuk memperkirakan suhu benda berdasarkan spectrum elektromagnetik yang dipancarkannya

Contoh 7.1

Pertimbangkan sebuah sistem mekanika-kuantum dari gas boson yang tak berinteraksi dan spin-nol, dengan massa masing-masing partikel adalah m dan bebas bergerak dalam ruang dengan volume V .

- a. Tentukan energi dan kapasitas panas di daerah temperatur rendah!
- b. Jelaskan mengapa pada temperatur rendah, potensial kimia perlu dibuat sama dengan nol!

Jawab:

- a. Distribusi Bose yang dinyatakan dengan

$$\frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} - 1}$$

Mengharuskan nilai $\mu \leq 0$,

Secara umum

$$n = \int \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} - 1} \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon$$

Pada saat temperatur turun, potensial kimia turun terus hingga mencapai nilai 0, yang mana

$$n = \int \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} - 1} \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon$$

- b. Kondensasi Bose terjadi pada saat temperatur terus menurun secara kontinu dengan $\mu = 0$. Dengan demikian, pada limit temperatur yang sangat rendah, sistem Bose dapat dikatakan memiliki $\mu = 0$. Jumlah partikel pada keadaan tak terkondensasi tak kekal. Densitas energi u dan kapasitas panas spesifik c diperoleh sbb :

$$u = \int \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT} - 1} \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon \quad c = \frac{u}{T} = 5\pi k \left(\frac{2mkT}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x - 1}$$

$$= \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx$$

Contoh 7.2

Cari ekspresi energi untuk sistem mekanika-kuantum dari gas foton ($m=0$).

Tunjukkan bahwa energinya berbanding lurus dengan T^4

Jawab:

Untuk gas foton, maka $\mu=0$ terpenuhi pada setiap temperatur dan $\epsilon=\hbar\omega$, rapat keadaannya adalah $\frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$ dan densitas energinya adalah

$$u = \frac{1}{\pi^2 c^3} \int \frac{\hbar\omega^3}{e^{\omega/kT} - 1} d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4 \int \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

Latihan Soal

1. Cari ekspresi untuk temperatur transisi Bose-Einstein T_c untuk gas yang terdiri dari N partikel Bose tak berspin bermassa m berada dalam ruang tertutup dengan volume V dan pada temperatur T .
2. Pertimbangkan sebuah sistem gas boson yang identik, tak berinteraksi, dan nonrelativistik. Jelaskan apakah efek kondensasi Bose-Einstein dapat diterapkan dalam kasus gas dua dimensi maupun gas satu dimensi.
3. Pertimbangkan sebuah gas foton yang dibatasi dalam volume V dan dalam kesetimbangan pada temperatur T . Foton tersebut merupakan partikel tak bermassa, sehingga $\epsilon = p$
 - a. Tentukan potensial kimia dari gas. Jelaskan.
 - b. Tentukan bagaimana jumlah foton pada volume tersebut bergantung pada temperatur.

BAB VIII

STATISTIK STATISTIK FERMI-DIRAC DAN APLIKASINYA

TEORI RINGKAS

Perumusan statistik Fermi-Dirac untuk assembli fermion, yaitu partikel kuantum dengan spin merupakan kelipatan ganjil dari $h / 4\pi$. Contoh partikel fermion adalah elektron, proton, dan positron.

A. Statistik Fermi-Dirac

Untuk memahami penurunan fungsi distribusi Fermi-Dirac:

- ✚ Memahami prinsip permutasi untuk benda-benda yang tidak dapat dibedakan,
- ✚ Sifat yang ditunjukkan oleh sebuah besaran yang nilainya kekal (konstan),
- ✚ Bagaimana mencari nilai maksimum dari sebuah fungsi.
- ✚ Memahami penurunan distribusi Maxwell-Boltzmann serta Bose-Einstein

Konfigurasi Fermion

Penurunan fungsi distribusi Fermi-Dirac dengan membagi keadaan-keadaan atas kelompok-kelompok sebagai berikut:

Kelompok-1 mengandung g_1 keadaan dengan energi rata-rata E_1

Kelompok-2 mengandung g_2 keadaan dengan energi rata-rata E_2

.
. .

Kelompok-s mengandung g_s keadaan dengan energi rata-rata E_s

.
. .

Kelompok-M mengandung g_M keadaan dengan energi rata-rata E_M

Jumlah sistem yang menempati masing-masing keadaan misalkan

n_1 sistem menempati keadaan-1

n_2 sistem menempati keadaan-2

.

.

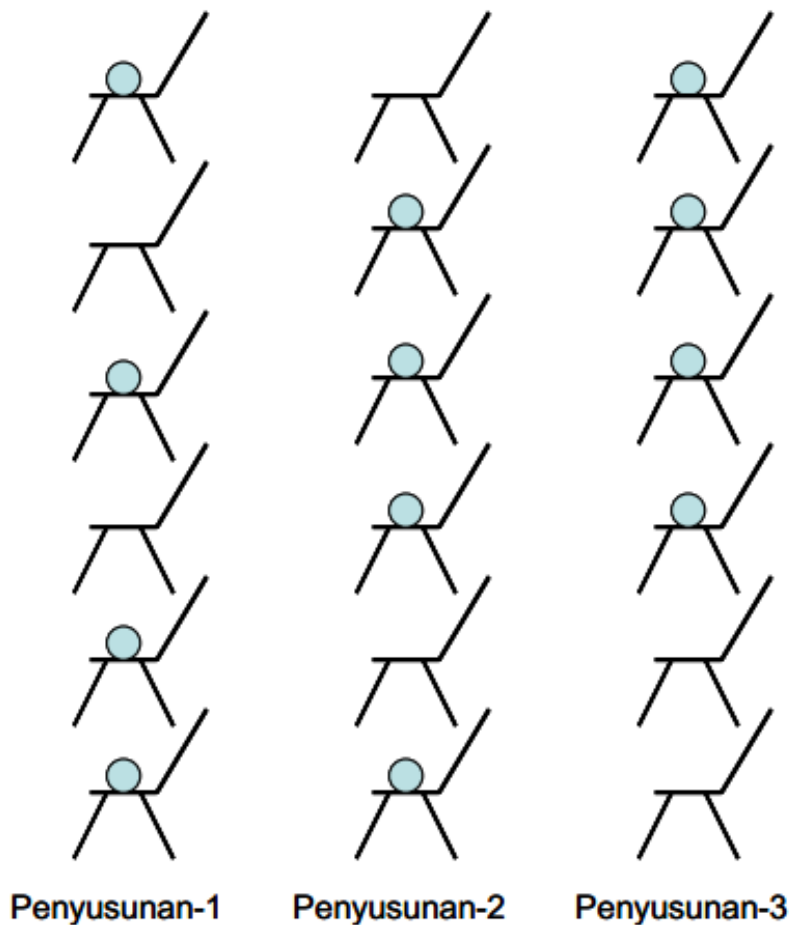
.

n_s sistem menempati keadaan-s

n_M sistem menempati keadaan-M

Karena satu keadaan maksimum menampung satu sistem maka harus terpenuhi

$n_1 \leq g_1, n_2 \leq g_2, \dots, n_s \leq g_s, \dots, n_M \leq g_M$



Gambar 8.1 Contoh penyusunan fermion analog dengan penyusunan kursi.

Penempelan benda menjamin bahwa tidak boleh lebih dari satu benda berada pada satu kursi akibatnya kita dapatkan:

Ada n_1 buah kursi yang ditemplei benda

Ada $g_1 - n_1$ buah kursi yang kosong.

Jadi, jumlah penyusunan yang berbeda hanyalah

$$\frac{g_1!}{(g_1 - n_1)! n_1!} \qquad \frac{g_2!}{(g_2 - n_2)! n_2!}$$

Jumlah total cara penyusunan secara bersama-sama n_1 sistem pada g_1 keadaan, n_2 sistem pada g_2 keadaan, ..., n_M sistem pada g_M keadaan:

$$\frac{g_1!}{(g_1 - n_1)! n_1!} \times \frac{g_2!}{(g_2 - n_2)! n_2!} \dots \times \frac{g_M!}{(g_M - n_M)! n_M!}$$

$$= \prod_{s=1}^M \frac{g_s!}{(g_s - n_s)! n_s!}$$

Untuk partikel tidak terbedakan jumlah cara adalah $N! / N! = 1$ sehingga jumlah cara penyusunan fermion untuk konfigurasi di atas adalah

$$W = \prod_{s=1}^M \frac{g_s!}{(g_s - n_s)! n_s!} \tag{8.1}$$

Atau dalam notasi logaritma

$$\ln W = \sum_{s=1}^M \ln \left[\frac{g_s!}{(g_s - n_s)! n_s!} \right]$$

Jumlah total sistem dan energi total dalam assembli:

$$N = \sum_{s=1}^M n_s \qquad U = \sum_{s=1}^M E_s n_s$$

Bentuk differensial dari N dan U:

$$\delta N = \sum_{s=1}^M \delta n_s \qquad \delta U = \sum_{s=1}^M E_s \delta n_s$$

Sederhanakan ln W:

$$\ln W = \sum_{s=1}^M \ln g_s! - \ln(g_s - n_s)! - \ln n_s!$$

Sederhanakan factorial $\ln g_s! \cong g_s \ln g_s - g_s$

$$\ln(g_s - n_s)! \cong (g_s - n_s) \ln(g_s - n_s) - (g_s - n_s)$$

$$\ln n_s! \cong n_s \ln n_s - n_s$$

ln W dapat diaproksimasi:

$$\begin{aligned} \ln W &\cong \sum_{s=1}^M g_s \ln g_s - g_s - (g_s - n_s) \ln(g_s - n_s) + (g_s - n_s) - n_s \ln n_s + n_s \\ &= \sum_{s=1}^M g_s \ln g_s - (g_s - n_s) \ln(g_s - n_s) - n_s \ln n_s \end{aligned}$$

Ambil diferensial ke dua ruas persamaan

$$\delta \ln W = \sum_{s=1}^M \delta [g_s \ln g_s] - \delta [(g_s - n_s) \ln(g_s - n_s)] - \delta [n_s \ln n_s] \qquad 8.2$$

Hitung satu persatu suku dalam persamaan

$$i) \quad \delta[g_s \ln g_s] = \frac{\partial}{\partial n_s} [g_s \ln g_s] \delta n_s = 0$$

$$ii) \quad \delta[(g_s - n_s) \ln(g_s - n_s)] = \frac{\partial}{\partial n_s} [(g_s - n_s) \ln(g_s - n_s)] \delta n_s$$

$$= \left[-\ln(g_s - n_s) + (g_s - n_s) \times \frac{1}{(g_s - n_s)} \times (-1) \right] \delta n_s = -[\ln(g_s - n_s) + 1] \delta n_s$$

$$iii) \quad \delta[n_s \ln n_s] = \frac{\partial}{\partial n_s} [n_s \ln n_s] \delta n_s = \left[\ln n_s + n_s \times \frac{1}{n_s} \times 1 \right] \delta n_s = [\ln n_s + 1] \delta n_s$$

$$\delta \ln W = \sum_{s=1} 0 + [\ln(g_s - n_s) + 1] \delta n_s - [\ln n_s + 1] \delta n_s$$

$$= \sum_{s=1}^M [\ln(g_s - n_s) - \ln n_s] \delta n_s$$

$$= \sum_{s=1}^M \ln \left[\frac{g_s - n_s}{n_s} \right] \delta n_s$$

Konfigurasi dengan probabilitas maksimum diperoleh dengan mencari solusi untuk persamaan $\delta \ln W + \alpha \delta N + \beta \delta U$

$$\sum_{s=1}^M \ln \left[\frac{g_s - n_s}{n_s} \right] \delta n_s + \alpha \sum_{s=1}^M \delta n_s + \beta \sum_{s=1}^M E_s \delta n_s = 0$$

$$\sum_{s=1}^M \left\{ \ln \left[\frac{g_s - n_s}{n_s} \right] + \alpha + \beta E_s \right\} \delta n_s = 0$$

Aplikasi Statistik Fermi-Dirac

Kita dapat menulis ulang fungsi distribusi Fermi Dirac

$$f(E) = \frac{1}{e^{-\alpha - \beta E} + 1}$$

8.3

dalam bentuk yang lebih mudah, yaitu

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left[\frac{(E - E_F)}{kT}\right] + 1} \quad 8.4$$

Fungsi Fermi-Dirac pada suhu 0 K

i) Jika $E > E_F$, maka $(E - E_F)/kT = (E - E_F)/0 = \infty$ sehingga

$$f(E > E_F, T = 0) = \frac{1}{e^\infty + 1} = 0$$

ii) Jika $E < E_F$, maka $(E - E_F)/kT = -(E_F - E)/0 = -\infty$ sehingga

$$f(E < E_F, T = 0) = \frac{1}{e^{-\infty} + 1} = 1$$

Energi Fermi

Rapat keadaan persatuan volume:

$$N = V \int_0^\infty n(E) dE = V \int_0^\infty g(E) f(E) dE \quad 8.5$$

Jika perhitungan dilakukan pada $T = 0$ maka

$$N = V \int_0^{E_F} g(E) f(E) dE + V \int_{E_F}^\infty g(E) f(E) dE$$

$$N = V \int_0^{E_F} g(E) \cdot 1 dE + V \int_{E_F}^\infty g(E) \cdot 0 dE = V \int_0^{E_F} g(E) dE \quad 8.6$$

$$g(E) = \frac{1}{h^3} 4\pi\sqrt{2}m^{3/2}E^{1/2} \quad 8.7$$

Dan akhirnya diperoleh ungkapan untuk energi Fermi pada suhu 0 K sebagai berikut:

$$E_F = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3} \quad 8.8$$

Selanjutnya kita dapat mendefinisikan suhu Fermi melalui hubungan $kT_F = E_F$ maka diperoleh ungkapan untuk suhu Fermi pada suhu 0 K sebagai

$$T_F = \frac{E_F}{k}$$

$$T_F = \frac{h^2}{2mk} \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3} \quad 8.9$$

Energi rata-rata elektron

Bentuk umum yang digunakan untuk mencari integral yang melibatkan fungsi Fermi-Dirac dingkapkan dengan persamaan 8.4

$$= \int_0^{E_F} \varphi(E) dE + \left. \frac{d\varphi}{dE} \right|_{E_F} (kT)^2 \frac{\pi^2}{6} \quad 8.11$$

Selanjutnya mari kita aplikasikan bentuk ungkapan persamaan (7.14) untuk mencari beberapa besaran yang dimiliki fermion. Pertama kita akan menghitung energi rata-rata elektron. Energi rata-rata memenuhi

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} E g(E) f(E) dE}{\int_0^{\infty} g(E) f(E) dE} \quad 8.12$$

Kerapatan keadaan elektron (karena memiliki dua arah spin) memenuhi

$$g(E) = \frac{8\pi\sqrt{2m^{3/2}}}{h^3} E^{1/2} \quad 8.13$$

Lihat bagian pembilang pada persamaan (8.20)

$$\begin{aligned}\varphi(E) &= \frac{8\pi\sqrt{2m}^{3/2}}{h^3} E^{3/2} \\ \frac{d\varphi}{dE} &= \frac{8\pi\sqrt{2m}^{3/2}}{h^3} \times \frac{3}{2} E^{1/2} = \frac{12\pi\sqrt{2m}^{3/2}}{h^3} E^{1/2} \\ \int_0^{E_F} \varphi(E) dE &= \frac{8\pi\sqrt{2m}^{3/2}}{h^3} \int_0^{E_F} E^{3/2} dE \\ &= \frac{8\pi\sqrt{2m}^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{5} E_F^{5/2}\end{aligned}$$

8.14

$$\text{pembilang} = \frac{8\pi\sqrt{2m}^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{5} E_F^{5/2} + \frac{12\pi\sqrt{2m}^{3/2}}{h^3} E_F^{1/2} (kT)^2 \frac{\pi^2}{6}$$

Karena umumnya $kT \ll E_F$ maka suku kedua jauh lebih kecil daripada suku pertama sehingga kita dapat mengaproksimasi

8.15

$$\text{pembilang} \approx \frac{8\pi\sqrt{2m}^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{5} E_F^{5/2}$$

Selanjutnya kita lihat penyebut pada persamaan (7.23). Tampak di sini bahwa

$$\begin{aligned}\varphi(E) &= \frac{8\pi\sqrt{2m}^{3/2}}{h^3} E^{1/2} \\ \frac{d\varphi}{dE} &= \frac{8\pi\sqrt{2m}^{3/2}}{h^3} \times \frac{1}{2} E^{-1/2} = \frac{4\pi\sqrt{2m}^{3/2}}{h^3} E^{-1/2} \\ \int_0^{E_F} \varphi(E) dE &= \frac{8\pi\sqrt{2m}^{3/2}}{h^3} \int_0^{E_F} E^{1/2} dE \\ &= \frac{8\pi\sqrt{2m}^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{3} E_F^{3/2}\end{aligned}$$

Dengan demikian kita dapatkan

$$\text{penyebut} = \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{3} E_F^{3/2} + \frac{4\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} E_F^{-1/2} (kT)^2 \frac{\pi^2}{6} \quad 8.16$$

Karena umumnya $kT \ll E_F$ maka suku kedua jauh lebih kecil daripada suku pertama sehingga maka kita dapat mengaproksimasi

$$\text{penyebut} \approx \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{3} E_F^{3/2} \quad 8.17$$

Dengan demikian energi rata-rata menjadi

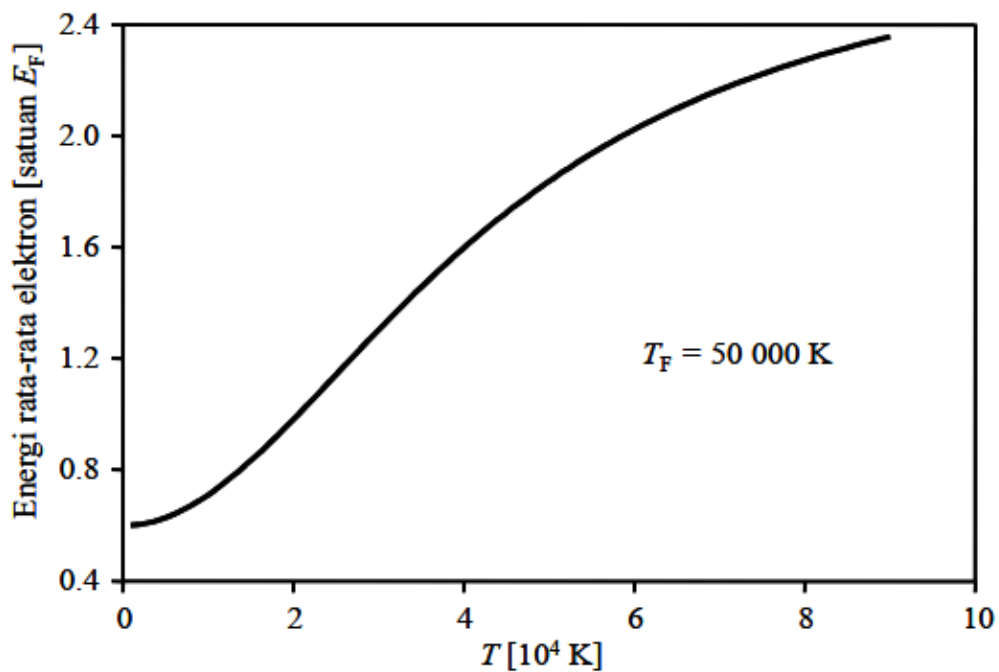
$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{\text{pembilang}}{\text{penyebut}} \\ &= \frac{\frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{5} E_F^{5/2}}{\frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{3} E_F^{3/2}} \\ &= \frac{3}{5} E_F \end{aligned} \quad 8.18$$

Namun, jika kita mengambil sampai orde dua, maka energi rata-rata diperoleh dari persamaan (7.24) dan (11.26) yaitu

$$\bar{E} = \frac{\frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{5} E_F^{5/2} + \frac{12\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} E_F^{1/2} (kT)^2 \frac{\pi^2}{6}}{\frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{3} E_F^{3/2} + \frac{4\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} E_F^{-1/2} (kT)^2 \frac{\pi^2}{6}}$$

$$= \frac{3}{5} E_F \left[\frac{1 + \frac{15}{24} \pi^2 \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2}{1 + \frac{3}{24} \pi^2 \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2} \right] \quad 8.19$$

Gambar 8.1 adalah energi rata-rata elektron sebagai fungsi suhu. Tampak bahwa energi rata-rata makin bertambah dengan bertambahnya suhu. Ini diakibatkan makin banyaknya elektron yang menempati tingkat energi di atas energi fermi



Gambar 8.1 Energi rata-rata elektron sebagai fungsi suhu. Pada perhitungan digunakan suhu fermi 50 000 K.

Contoh 8.3

Ditinjau suatu semikonduktor intrinsik yang mempunyai celah energi (energy gap) selebar E_G , dengan densitas elektron konduksi n dan densitas hole p . Tunjukkan bahwa hubungan berikut dipenuhi:

$$n = p = 2 \left(\frac{2\pi(m_e m_h)^{1/2} kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-E_G/2kT}$$

Tunjukkan pula bahwa potensial Fermi dari sistem elektron dapat dinyatakan dengan :

$$\mu = \frac{1}{2} E_G + \frac{3}{4} kT \log \frac{m_h}{m_e}$$

Jika elektron konduksi dan hole diasumsikan berkelakuan sebagai partikel bebas dengan massa efektif masing-masing m_e dan m_h . Awal nilai energi diambil pada bagian atas pita yang terisi dengan asumsi $E_G \gg kT$. Hitung nilai $n (= p)$ untuk kasus : $E_G = 0,7 \text{ eV}$, $T = 300 \text{ K}$, $m_h = m_e = m$.

Solusi:

Jumlah total elektron diberikan oleh :

$$N = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1} + \sum_j \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_j - \mu)} + 1}$$

Dengan ϵ_i merupakan level energi pada pita konduksi dan ϵ_j merupakan level energi pada pita terisi. Pada kasus semikonduktor intrinsik jumlah total state elektron sama dengan N , yakni $\sum_j 1 = N$. Sehingga dapat dituliskan:

$$\sum_i \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1} = \sum_j \left(1 - \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_j - \mu)} + 1} \right) = \sum_j \frac{1}{e^{\beta(-\epsilon_j - \mu)} + 1}$$

Persamaan ini menunjukkan kesamaan jumlah elektron konduksi dan jumlah hole dalam pita yang terisi, yakni

$$n = p.$$

ϵ_i dan ϵ_j dapat dituliskan sebagai

$$\epsilon_i = E_G + \mathbf{p}^2/2m_e, \quad \epsilon_j = -\mathbf{p}^2/2m_h$$

dengan p adalah momentum partikel dan n dan p ditunjukkan oleh

$$n = \frac{2}{h^3} \int \frac{d\mathbf{p}}{e^{\beta(E_G - \mu + \mathbf{p}^2/2m_e)} + 1},$$

$$p = \frac{2}{h^3} \int \frac{d\mathbf{p}}{e^{\beta(\mu + \mathbf{p}^2/2m_h)} + 1}.$$

Pada 0 K, baik n maupun p sama dengan nol. Pada temperatur yang tidak sangat tinggi,

hubungan $E_G - \mu \gg kT$, dan $\mu \gg kT$ masih berlaku dan nilai n dan p dapat dianggap kecil. Dengan demikian dapat diasumsikan sifat non-degenerasi baik pada elektron konduksi maupun hole. Sehingga dapat diperoleh

$$n \sim \frac{2}{h^3} \int e^{-\beta(E_G - \mu + \mathbf{p}^2/2m_e)} d\mathbf{p} = 2 \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-(E_G - \mu)/kT},$$

$$p \sim \frac{2}{h^3} \int e^{-\beta(\mu + \mathbf{p}^2/2m_h)} d\mathbf{p} = 2 \left(\frac{2\pi m_h kT}{h^2} \right) e^{-\mu/kT}.$$

Dari persamaan (7), (8) dan (3) dapat ditentukan $e^{\mu/kT}$ yakni

$$e^{\mu/kT} = \left(\frac{mh}{me}\right)^{3/4} e^{E_G/2kT}$$

Dari (7) dan (8) dapat dituliskan

$$n = p = 2 \cdot \left[\frac{2\pi(m_e m_h)^{1/2} kT}{h^2} \right]^{3/2} e^{-E_G/2kT}$$

Dari (9) dapat diperoleh

$$\mu = \frac{1}{2} E_G + \frac{3}{4} kT \log \frac{m_h}{m_e}$$

Potensial Fermi yang ditentukan persamaan (11) sangat dekat dengan pertengahan celah energi jika nilai $\log(mh/me)$ berorde satu dan temperatur berada di bawah nilai E_G/k . Untuk $E_G = 0,7$ eV, E_G/k bernilai $0,81 \times 10^4$ K. Karenanya pada temperatur biasa hubungan $E_G/k \gg T$, $E_G - \mu \gg kT$, dan $\mu \gg kT$ dipenuhi. Dengan nilai $T = 300$ K dan $m_e = m_h = m$, diperoleh

$$n = p = 4,83 \times 10^{15} \times (300)^{3/2} e^{-0,41 \times 10^4 / 300} \sim 1,6 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}.$$

Contoh 8.4

Pertimbangkan sebuah gas foton yang dibatasi dalam volume V dan dalam kesetimbangan pada temperatur T . Foton tersebut merupakan partikel tak bermassa, sehingga $\varepsilon = pc$.

- Tentukan potensial kimia dari gas. Jelaskan.
- Tentukan bagaimana jumlah foton pada volume tersebut bergantung pada temperatur.

Solusi:

a. Potensial kimia dari gas foton adalah nol. Karena jumlah foton tidak kekal pada sebuah nilai temperatur dan volume yang diberikan, jumlah rata-rata foton ditentukan oleh

$$\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = 0$$

maka

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = 0$$

b. Rapat keadaan dari sistem ini adalah

$$\left(\frac{8\pi V p^2}{h^3}\right) dp$$

$$\left(\frac{V \omega^2}{\pi^2 c^3}\right) d\omega$$

Sehingga jumlah fotonnya adalah

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \int \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 \frac{1}{e^{h\omega/kT} - 1} d\omega \\ &= \frac{V}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{h}\right)^3 \int_0^\infty \frac{\alpha^2}{e^\alpha - 1} d\alpha \\ \bar{N} &\propto T^3 \end{aligned}$$

Latihan Soal

1. Tunjukkan bahwa untuk gas foton berlaku $p=U/3V$
2. Misal suatu besaran fisika I dari suatu sistem elektron dinyatakan dengan suatu integral yang mengandung distribusi Fermi $f(\epsilon)$

$$I = \int_0^{\infty} g(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon \equiv \int_0^{\infty} \psi(\varepsilon) D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (g = \psi D)$$

Dengan D adalah density of states. Turunkan rumus-rumus berikut ini jika degenerasi cukup kuat:

$$\left(\frac{\partial I}{\partial T} \right)_{\mu} = \frac{1}{3} \pi^2 k^2 T g'(\mu_0) + O(T^3),$$

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \mu} \right)_T = g(\mu_0) + O(T^2),$$

$$\left(\frac{\partial I}{\partial T} \right)_N = \frac{1}{3} \pi^2 k^2 T \psi'(\mu_0) D(\mu_0) + O(T^3).$$

3. Ditinjau susceptibilitas paramagnetik spin dari gas elektron bebas. Jelaskan makna fisis beda kualitatif antara nilai susceptibilitas tersebut pada kasus degenerasi kuat dan degenerasi lemah. Jelaskan pula makna dari rasio antar kedua nilai tersebut!

DAFTAR REFERENSI

- Greiner, W., Neise, L., Stocker, H., 1997. *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. New York: Springer.
- Lim, Y.K., 1990. *Problems and Solutions on Thermodynamics and Statistical Mechanics*. Singapore: World Scientific Publishing.
- Skacej, G., Zihlerl, P., 2019. *Solved Problems in Thermodynamics and Statistical Physics*. Third Edition. Switzerland: Springer.
- Lim, S. C., Lai, C. H., & Kwek, L. C. (Eds.). (2021). *Problems and solutions on thermodynamics and statistical mechanics*. World Scientific.
- Wang, K. L. (1990). *Problems And Solutions On Thermodynamics And Statistical Mechanics*. World Scientific Publishing Company.



FMIPA UNMUL



Kampus
Merdeka
INDONESIA JAYA

Akreditasi **A**
Universitas Mulawarman
Nomor: 1466/SK/BAN-PT/Akreditasi/PT/2017; Tgl: 23 Mei 2017