KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN,
RISET DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS MULAWARMAN
Rektorat Kampus Gunung Kelua, Jalan Kuaro, Samarinda75119, Kotak Pos 1068
Telepon (0541) 741118 Faximile (0541) 747479 - 732870
Laman: www.unmul.ac.id

KEPUTUSAN REKTOR UNIVERSITAS MULAWARMAN

NOMOR : 3673 /UN17/HK.02.03/2022

TENTANG

TIM PENYUSUN MODUL ONMIPA
DI FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS MULAWARMAN TAHUN 2022

REKTOR UNIVERSITAS MULAWARMAN,

Menimbang :

a. bahwa untuk menjamin kepastian hukum dalam rangka tertib administrasi dan kelancaran kegiatan Penyusunan Modul ONMIPA di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Mulawarman Tahun 2022, dipandang perlu membentuk Tim;
b. bahwa berdasarkan pertimbangan sebagaimana dimaksud dalam huruf a, perlu menetapkan Keputusan Rektor Universitas Mulawarman tentang Tim Penyusun Modul ONMIPA di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Mulawarman Tahun 2022.

Mengingat :

1. Undang-Undang RI Nomor 20 Tahun 2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional;
2. Undang-Undang RI Nomor 12 tahun 2012 tentang Pendidikan Tinggi;
3. Undang-Undang RI Nomor 5 tahun 2014 tentang Aparatur Sipil Negara;
4. Peraturan Pemerintah RI Nomor 23 Tahun 2005 tentang Pengelolaan Keuangan Badan Layanan Umum, sebagaimana telah diubah dengan Peraturan Pemerintah RI Nomor 74 Tahun 2012 tentang Perubahan Atas Peraturan Pemerintah RI Nomor 23 Tahun 2005 tentang Pengelolaan Keuangan Badan Layanan Umum;
5. Peraturan Pemerintah RI Nomor 37 Tahun 2009 tentang Dosen;
6. Peraturan Pemerintah RI Nomor 4 Tahun 2014 tentang Penyelenggaraan Pendidikan Tinggi dan Pengelolaan Perguruan Tinggi;
7. Peraturan Presiden RI Nomor 62 Tahun 2021 tentang Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset dan Teknologi;
8. Keputusan Presiden RI Nomor 65 Tahun 1963 tentang Pendirian Universitas Mulawarman;
9. Peraturan Menteri Riset, Teknologi dan Pendidikan Tinggi RI Nomor 9 Tahun 2015 tentang Organisasi dan Tata Kerja Universitas Mulawarman, sebagaimana telah diubah dengan Peraturan Menteri Riset, Teknologi dan Pendidikan Tinggi RI Nomor 26 Tahun 2018 tentang Perubahan Atas Peraturan Menteri Riset, Teknologi dan Pendidikan Tinggi RI Nomor 9 Tahun 2015 tentang Organisasi dan Tata Kerja Universitas Mulawarman;
10. Peraturan Menteri Riset, Teknologi dan Pendidikan Tinggi RI Nomor 57 Tahun 2018 tentang Statuta Universitas Mulawarman;
11. Keputusan Menteri Keuangan RI Nomor 51/KMK.05/2009 tentang Penetapan Universitas Mulawarman sebagai Instansi Pemerintah yang Menerapkan Pengelolaan Keuangan Badan Layanan Umum;

12. Keputusan Menteri Pendidikan, Kebudayaan, Riset dan Teknologi RI Nomor 65148/MPK.A/KP.06.02/2022 tentang Pengangkatan Rektor Universitas Mulawarman Periode Tahun 2022-2026;
13. Peraturan Rektor Universitas Mulawarman Nomor 17 Tahun 2020 tentang Penyelenggaraan Pendidikan dan Pengajaran, Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat Berbasis Kampus Merdeka dan Merdeka Belajar;
14. Keputusan Rektor Universitas Mulawarman Nomor 109/OT/2006 Tahun 2006 tentang Peningkatan Status Unit Pelaksana FMIPA Menjadi Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Mulawarman;
15. Keputusan Rektor Universitas Mulawarman Nomor 2414/KP2018 tentang Pemberhentian dan Pengangkatan Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Mulawarman Periode 2018-2022.

Memperhatikan	:	Surat Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Mulawarman Nomor 2457/UN17.7/TU/2022 tanggal 27 Oktober 2022, perihal Permohonan Penerbitan SK Rektor.

MEMUTUSKAN:

Menetapkan	:	KEPUTUSAN REKTOR UNIVERSITAS MULAWARMAN TENTANG TIM PENYUSUN MODUL ONMIPA DI FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM UNIVERSITAS MULAWARMAN TAHUN 2022.
KESATU	:	Mengangkat nama-nama yang tercantum dalam lampiran yang tidak terpisahkan dari Keputusan ini sebagai Tim Penyusun Modul ONMIPA di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Mulawarman Tahun 2022.
KEDUA	:	Tim sebagaimana dimaksud pada diktum kesatu keputusan ini dalam melaksanakan tugasnya bertanggung jawab kepada Rektor Universitas Mulawarman melalui Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Mulawarman.
KETIGA	:	Pembiayaan akibat ditetapkannya keputusan ini dibebankan DIPA BLU Universitas Mulawarman, anggaran Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Mulawarman.
KEEMPAT	:	Keputusan ini berlaku sejak tanggal dilaksanakan kegiatan.
KELIMA	:	Bilamana dikemudian hari terdapat kekeliruan dalam keputusan ini akan diubah dan diperbaiki sebagaimana mestinya.

Ditetapkan di Samarinda
pada tanggal 11 Nopember 2022

REKTOR,

Dr. Ir. H. Abdunnur, M.Si.
NIP 196703081992031001

LAMPIRAN
KEPUTUSAN REKTOR UNIVERSITAS MULAWARMAN
NOMOR 3673 /UN17/HK.02.03/2022
TANGGAL 11 NOPEMBER 2022
TENTANG
TIM PENYUSUN MODUL ONMIPA DI FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM UNIVERSITAS MULAWARMAN TAHUN 2022.

DAFTAR NAMA
TIM PENYUSUN MODUL ONMIPA
DI FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS MULAWARMAN TAHUN 2022

No	Bidang/Sub Bidang	Nama Dosen Penyusun Modul ONMIPA
BIDANG BIOLOGI		
	Koordinator Bidang Biologi	Dr. Nova Hariani, M.Si
	Sub Bidang	
1	Biologi Sel	Ervinda Yuliatin, S.Si., M.Si
2	Genetika, Biologi Molekuler, Bioinformatika dan Bioteknologi	Imam Rosadi, S.Si., M.Si
3	a. Fisiologi dan Metabolisme Hewan	Dr. Retno Aryani, M.Si
	b. Fisiologi dan Metabolisme Tumbuhan	Dr. Hetty Manurung, M.Si
4	a. Pertumbuhan, Perkembangan, Reproduksi dan Perilaku Hewan	Prof. Rudy Agung Nugroho, M.Si., Ph.D
	b. Pertumbuhan, Perkembangan, Reproduksi dan Perilaku Tumbuhan	Dr. Dwi Susanto, M.Si
5	a. Keanekaragaman Hayati Hewan	Mukhlis, S.Pd., M.Sc
	b. Keanekaragaman Hayati Tumbuhan	Dr. Linda Oktavianingsih, M.Si
6	Ekologi	Dr. Jusmaldi, M.Si
7	Evolusi	Mukhlis, S.Pd., M.Sc
BIDANG KIMIA		
	Koordinator Bidang Kimia	Dr. Chairul Saleh, M.Si
	Sub Bidang	
1	Kimia Analitik	Ika Yekti Liana Sari, S.Si., M.Si
2	Kimia Organik	Dr. Chairul Saleh, M.Si
3	Biokimia	Djihan Ryn Pratiwi, S.Si., M.Si
4	Kimia Fisika	Veliyana Londong Allo, S.Si., M.Si
5	Kimia Anorganik	Dr. Noor Hindryawati, M.Si
BIDANG MATEMATIKA		
	Koordinator Bidang Matematika	Qonita Qurrota A'yun, S.Si., M.Sc
	Sub Bidang	
1	Struktur Aljabar	Desi Febriani Putri, S.Si., M.Si
2	Kombinatorika	Wasono, S.Si., M.Si
		Fidia Deny Tisna Amijaya, S.Si., M.Si
3	Aljabar Linier	Dr. Syaripuddin, M.Si
		Hardina Sandariria, S.Si., M.Sc
4	Analisis Kompleks	Moh. Nurul Huda, S.Si., M.Si
		Indriasri Raming, S.Si., M.Si
5	Analisis Riil	Sri Wigantono, S.Si., M.Sc
		Asmaidi, S.Pd., M.Si

No	Bidang/Sub Bidang	Nama Dosen Penyusun Modul ONMIPA
BIDANG FISIKA		
	Koordinator Bidang Fisika	Dr. Dadan Hamdani, M.Si
	Sub Bidang	
1	Mekanika Klasik	Dr. Dadan Hamdani, M.Si
2	Elektrodinamika	Ahmad Zarkasi, S.Si., M.Si
3	Termodinamika dan Fisika Statistika	Dr. Rahmawati Munir, M.Si
4	Fisika Modern dan Mekanika Kuantum	Suhadi Muliyono, S.Si., M.Si

REKTOR UNIVERSITAS MULAWARMAN,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI UNIVERSITAS MULAWARMAN REKTOR

Dr. Ir. H. Abdunnur, M.Si.
NIP 196703081992031001

2022

MODUL ONMIPA BIDANG MATEMATIKA

Analisis Real

Disusun oleh:

Sri Wigantono, S.Si., M.Sc.

Asmaidi, S.Pd., M.Si.

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS MULAWARMAN

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Esa karena atas rahmat dan hidayah-Nya kami dapat menyusun Modul ONMIPA Bidang Matematika Analisis Real. Penulisan modul ONMIPA ini diperuntukkan bagi mahasiswa ONMIPA Matematika khususnya dan pembaca pada umumnya. Adapun tujuan penulisan modul ONMIPA ini untuk membantu mahasiswa dalam mempelajari dan memperdalam materi matematika terkait dengan Analisis Real.

Materi dalam Modul ONMIPA Bidang Matematika Analisis Real mengacu pada Petunjuk Pelaksanaan Olimpiade Matematika Nasional dan Ilmu Pengetahuan Alam (ONMIPA) Tahun 2022 yang dikeluarkan oleh Pusat Prestasi Nasional (Puspresnas) Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset dan Teknologi Republik Indonesia. Adapun materi yang terdapat dalam Modul ONMIPA Bidang Matematika Analisis Real meliputi materi Sistem Bilangan Real, Barisan dan Deret, Limit Fungsi, Fungsi Kontinu, Turunan Fungsi, Aplikasi Turunan Fingsi, Integral Riemann, dan Topologi R.

Penulisan Modul ONMIPA Bidang Matematika Analisis Real ini dapat diselesaikan dengan dukungan dan bantuan dari berbagai pihak yang perlu diberikan ucapan terima kasih. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini tidak berlebihan jika disampaikan rasa terima kasih dan penghargaan yang sebesar-besarnya terutama Rektor Universitas Mulawarman, Dekan FMIPA Universitas Mulawarman, Ketua Jurusan Matematika Universitas Mulawarman, Koordinator Program Studi Matematika, dan teman-teman dosen Program Studi Matematika. Kami mengucapkan terima kasih atas pengorbanan waktu, tenaga, dan pikiran dalam penyelesaian Modul ONMIPA ini. Kami mengharapkan saran dan kritik dari para pembaca sebagai bahan untuk melakukan evaluasi dan peningkatan kualitas Modul ONMIPA ini.

Samarinda,   November 2022

TIM

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB 1
SISTEM BILANGAN REAL

INDIKATOR KOMPETENSI

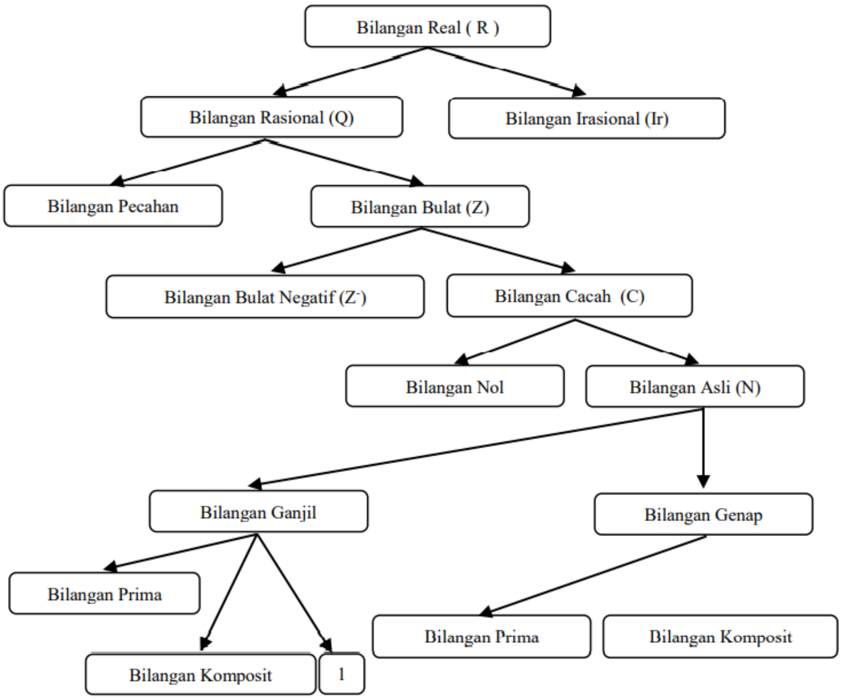
Setelah mempelajari materi dalam BAB 1 ini, mahasiswa mampu:
- Memahami Konsep Bilangan Real dan Sifat - sifatnya
- Menjelaskan Trikotomi (Sifat Urutan)
- Memahami Definisi dan Teorema Terkait Relasi
- Menjelaskan Aksioma Lapangan
- Memahami dan Menjelaskan Konsep Pertidaksamaan
- Menjelaskan *Rataan Aritmatik*, *Rataan Geometrik*, dan *Rataan Harmonik*
- Memahami dan Menjelaskan Konsep Ketaksamaan dan Jenis - jenisnya
- Memahami dan Menjelaskan Konsep Harga Mutlak
- Menjelaskan Konsep Supremum dan Infimum

1.1 Bilangan Real dan Sifat - sifatnya

1.1.1 Bilangan Real

Ketika duduk di Sekolah Dasar semua siswa diajarkan dengan garis bilangan. Pada garis bilangan tersebut terdapat berbagai bilangan antara lain bilangan reall itu sendiri. Bilangan real terdiri dari bilangan rasional dan irrasional. Adapun bilangan rasional terdiri dari bilangan pecahan dan bilangan bulat. Bilangan bulat terdiri dari bilangan bulat negatif dan bilangan cacah. Bilangan cacah terdiri dari bilangan nol dan bilangan asli. Selanjutnya bilangan asli dibagi menjadi dua yaitu bilangan ganjil dan genap. Bilangan ganjil terdiri dari bilangan prima, bilangan komposit dan 1, sedangkan bilangan genap terdiri dari bilangan prima dan bilangan komposit.

Sistem bilangan real dapat digambarkan seperti pada diagram alir berikut.



Gambar 1. Diagram Alir Bilangan Real

1.1.2 Bilangan Rasional dan Irrasional

Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat ditulis dalam bentuk $\frac{p}{q}$ dengan syarat q tidak boleh sama dengan nol dan p, q anggota bilangan bulat. Misalkan x anggota himpunan bilangan rasional Q, maka secara matematika himpunan bilangan rasional Q dapat ditulis:

$$Q = \left\{ x \middle| x = \frac{p}{q}, q \neq 0 \wedge p, q \in Z \right\}$$

Contoh soal

Tuliskan 5 contoh bilangan rasional!

Pembahasan

Contoh bilangan rasional : 2, 11, $\frac{4}{7}$, 0,3333 ..., $\frac{10}{3}$

Bilangan Irrasional adalah bilangan yang tidak bisa ditulis dalam bentuk $\frac{p}{q}$. Bilangan irrasional biasanya terdapat bilangan dalam bentuk akar tidak murni. Selain itu, bilangan irrasional juga terdapat pada bilangan desimal yang mana pengulangan angka setelah tanda koma tidak berpola atau tidak teratur. Misalkan Ir bilangan irrasional, maka secara matematika himpunan bilangan irrasional dapat ditulis:

$$Ir = \left\{x \middle| x \neq \frac{p}{q}, q \neq 0 \wedge p, q \in Z\right\}$$

Contoh soal

Tuliskan 5 contoh bilangan Irrasional!

Pembahasan

Contoh bilangan irrasional :

a) $0{,}23123456 \ldots$

b) $\sqrt{2}$

c) π

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $12{,}31285901 \ldots$

1.1.3 Bilangan Bulat

Suatu bilangan yang tidak memiliki pecahan decimal disebut dengan bilangan bulat dan disimbolkan dengan Z. Bilangan bulat terbagi atas bilangan asli (N) atau bilangan bulat positif $\{1,2,3,\cdots\}$, bilangan bulat negatif $\{-1,-2,-3,\cdots\}$, dan bilangan nol. Bilangan bulat dapat ditulis:

$$Z = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

1.1.4 Bilangan Cacah

Bilangan cacah merupakan gabungan antara bilangan asli atau bilangan bulat positif dengan bilangan nol. Bilangan cacah disimbolkan dengan C. Secara matematika bilangan cacah dapat ditulis:

$$C = \{0, 1, 2{,}3, \ldots\}$$

1.1.5 Bilangan Genap dan Ganjil

Bilangan genap dan ganjil termasuk ke dalam bilangan asli. Bilangan genap merupakan bilangan yang habis dibagi dengan 2 (dua), sebaliknya bilangan ganjil adalah bilangan yang tidak habis dibagi dengan 2 (dua). Secara matematika bilangan genap ditulis $\{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$, sedangkan bilangan ganjil $\{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$.

1.1.6 Bilangan Prima

Suatu bilangan yang mempunyai faktor dirinya sendiri dan 1 (satu) disebut bilangan prima yang disimbolkan dengan P. Jika diketahui m bilangan prima maka m hanya memiliki faktor dirinya sendiri yaitu m dan 1. Adapun contoh bilangan prima dituliskan sebagai berikut.

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$$

1.1.7 Bilangan Komposit

Bilangan komposit merupakan subset dari bilangan ganjil dan genap. Bilangan komposit mempunyai lebih dari 2 faktor. Adapun contoh bilangan komposit adalah bilangan asli selain 1 dan selain bilangan prima. Misalkan K adalah bilangan komposit, maka himpunan bilangan komposit dapat ditulis:

$$K = \{2, 4, 6, 8, 9, 12, \ldots\}$$

1.2 Sifat – sifat, Aksioma dan Teorema Terkait Bilangan Reall

1.2.1 Sifat – sifat Bilangan Reall

Adapun sifat bilangan riil (R) terhadap operasi "+" (penjumlahan) dan "×" (perkalian) diuraikan di bawah ini.

1. Sifat Tertutup Bilangan Rea
   a) $(p + q) \in R,\ \forall\, p, q \in R$
   b) $(p \times q) \in R,\ \forall\, p, q \in R$
2. Sifat Komutatif Bilangan Real
   a) $p + q = q + p,\ \forall\, p, q \in R$
   b) $p \times q = q \times p,\ \forall\, p, q \in R$
3. Sifat Asosiatif Bilangan Real
   a) $(p + q) + r = p + (q + r),\ \forall\, p, q \in R$
   b) $(p \times q) \times r = p \times (q \times r),\ \forall\, p, q \in R$
4. Sifat Identitas Bilangan Real
   a) 0 disebut identitas bilangan reall terhadap operasi penjumlahan jika $p + 0 = 0 + p,\ \forall\, p \in R$
   b) 1 disebut identitas bilangan real terhadap operasi perkalian jika $p \times 1 = 1 \times p,\ \forall\, p \in R$
5. Sifat Kebalikan (Invers) Bilangan Real
   a) Akan terdapat $-p \in R$ yang disebut kebalikan atau invers dari bilangan real p terhadap operasi penjumlahan sehingga $p + (-p) = (-p) + p$, $\forall\, p \in R$
   b) Akan terdapat $\frac{1}{p},\ \forall\, p \in \mathbb{R} - \{0\}$ yang disebut kebalikan atau invers dari bilangan real p terhadap operasi perkalian sehingga $p \times \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \times p = 1$.

6. Sifat Distributif Bilangan Real

a) $(p+q) \times r = (p \times r) + (q \times r),\ \forall\, p, q, r \in R$

b) $p \times (q+r) = (p \times q) + (p \times r),\ \forall\, p, q, r \in R$

1.2.2 Teorema Terkait Bilangan Real

Teorema I

a) Andaikan $p, q \in R$, dimana $p + q = q$ haruslah $p = 0$

b) Andaikan $p, q \in R$ dengan $q \neq 0$ dan $p \times q = q$ haruslah $p = 1$

c) Andaikan $p \in R$, diperoleh $p \times 0 = 0$

Teorema II

a) Andaikan $p, q \in R$ dimana $p, q \neq 0$ dan $p \times q = 1$ maka haruslah $p = \frac{1}{q}$ atau $q = \frac{1}{p}$

b) Andaikan $p, q \in R$ dimana $p \times q = 0$ maka haruslah $p = -q$ atau $q = -p$

c) Andaikan $p, q \in R$, dimana $p \times q = 0$ maka haruslah $p = 0$ atau $q = 0$

d) Andaikan $p, q, r \in R$, dimana $p \times q = p \times r$ dan $p, q \neq 0$ maka haruslah $q = r$

1.3 Trikotomi (Sifat Urutan)

Trikotomi merupakan sifat urutan terkait dengan ketaksamaan dalam himpunan bilangan real (R) dan sifat kepositifan (P) bilangan real. Adapun sifat – sifat kepositifan bilangan real adalah sebagai berikut.

1) $q + r \in P, \forall\, q, r \in P$

2) $q \times r \in P, \forall\, q, r \in P$

3) Untuk $q \in P$, salah satu sifat berikut akan terpenuhi:

a) $q > 0$

b) $q = 0$

c) $q < 0$

Contoh soal

Misalkan N adalah suatu bilangan bulat positif, dan j adalah suatu bilangan irasional. Buktikan bahwa terdapat bilangan rasional $\frac{a}{b}$ dengan $a \leq b \leq N$ memenuhi

$$\left|j - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b(N+1)}.$$

Pembahasan

Misalkan N adalah bilangan asli dan misalkan N+2 bilangan real

$$0, j-[j], 2j-[2j], \dots, (N+1)j-[(N+1)j]$$

Perhatikan bahwa berdasarkan sifat fungsi tangga, maka ke N+1 bilangan real tersebut terletak di interval $[0,1)$. Selain itu, kita juga punya bahwa

$$[0,1) = \bigcup_{k=0}^{N}\left[\frac{k}{N+1}, \frac{k+1}{N+1}\right)$$

Perhatikan bahwa karena N+2 bilangan real tersebut terletak di $[0,1)$ yang merupakan gabungan dari N+1 interval, maka paling sedikit ada dua bilangan yang terletak di interval yang sama. Misalkan bilangan tersebut adalah $k_1 j - [k_1 j]$ dan $k_2 j - [k_2 j]$ dengan $k_1 < k_2$. Maka,

$$(k_1 j - [k_1 j]) - (k_2 j - [k_2 j]) < \frac{1}{N+1}$$

Dari sini,

$$|(k_2 - k_1)j - ([k_2 j] - [k_1 j])| < \frac{1}{N+1}$$

Pilih $b = k_2 - k_1$ dan $a = [k_2 j] - [k_1 j]$

Perhatikan bahwa karena $0 < k_1 < k_2 < N+1$, $k_1\ dan\ k_2$ bilangan bulat, maka haruslah $N \geq b = k_2 - k_1 \geq 1$. Oleh karena itu,

$$|bj - a| < \frac{1}{N+1}$$

dan

$$\left|j - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b(N+1)}$$

Jadi, terdapat bilangan rasional $\frac{a}{b}$ dengan 1≤b≤N memenuhi

$$\left|j - \frac{1}{b}\right| < \frac{1}{b(N+1)}$$

1.4 Definisi dan Teorema Terkait Relasi

1.4.1 Definisi Relasi

Definisi I

1) Untuk bilangan real positif $(q \in P)$ dapat dinyatakan dalam bentuk $q > 0$
2) Untuk bilangan real tidak negatif $(q \in P \cup \{0\})$ dapat dinyatakan dalam bentuk $q \geq 0$

3) Untuk bilangan real negatif $(-q \in P)$ dapat dinyatakan dalam bentuk $q < 0$

4) Untuk bilangan real tidak positif $(-q \in P \cup \{0\})$ dapat dinyatakan dalam bentuk $q \leq 0$

Definisi II

1) $\forall\, q, r \in R,\ \ q - r \in P \to q > r$ atau $r < q$

2) $\forall\, q, r \in R,\ \ q - r \in P \cup \{0\} \to q \geq r$ atau $r \leq q$

1.4.2 Teorema Terkait Relasi

Teorema I

Untuk sembarang $p, q, r \in R$ maka berlaku sifat – sifat berikut:

1) Andaikan $p > q$ dan $q > r$ diperoleh $p > r$

2) Andaikan $p > q$ maka $p + r > q + r$

3) Andaikan $p > q$ dan $r > 0$ diperoleh $r \times p > r \times q$

4) Andaikan $p > q$ dan $r < 0$ diperoleh $r \times p < r \times q$

5) Andaikan $p > 0$ diperoleh $\frac{1}{p} > 0$ dan

6) Andaikan $p < 0$ diperoleh $\frac{1}{p} < 0$

Teorema II

1) Andaikan $p \in R$ dan $p \neq 0$ diperoleh $p^2 > 0$

2) Andaikan $p \in N$ diperoleh $p > 0$

3) Andaikan $p, q \in R$ dan $p < q$ diperoleh $p < \frac{p+q}{2} < q$

Teorema III

1) Andaikan $p \times q > 0$ diperoleh $p > 0$ dan $q > 0$ atau $p < 0$ dan $q < 0$

Akibatnya:

2) Andaikan $p \times q < 0$ diperoleh $p < 0$ dan $q > 0$ atau $p > 0$ dan $q < 0$.

1.5 Aksioma Lapangan

Untuk semua bilangan real x, y, dan z berlaku:

a) $x + y = y + x$

b) $(x + y) + z = x + (y + z)$

c) $\exists 0 \in \mathbb{R}$ sehingga $x + 0 = x$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$

d) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists!\, w \in \mathbb{R}$ sehingga $x + y = w$

e) $xy = yx$

f) $(xy)z = x(yz)$

g) $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$ sehingga $1 \neq 0$, dan $x.1 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

h) $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \exists w \in \mathbb{R}$ sehingga $x + y = w$

i) $x(y + z) = xy + xz)$

Himpunan yang memenuhi aksioma di atas disebut lapangan (terhadap operasi + dan .). Diperoleh dari poin c bahwa elemen 0 adalah tunggal. Elemen w pada poin d juga tunggal dan dinotasikan dengan '–x'. Elemen 1 pada poin g unik dan elemen w pada poin h juga unik dan dinotasikan dengan 'x^{-1}' Kemudian didefinisikan pengurangan dan pembagian sebagai berikut:

$$x - y = x + (-y) \text{ dan } \frac{x}{y} = xy^{-1}$$

1.6 Pertidaksamaan

1.6.1 Definisi Pertidaksamaan

Suatu kalimat terbuka yang mana ruas kanan dan ruas kirinya dihubungkan oleh tanda $\neq, <, >, \leq,$ dan $\geq$ disebut pertidaksamaan. Jika $p - q > 0$ artinya bahwa p nilainya lebih dari nilai q dan sebaliknya $p - q < 0$ artinya p nilainya kurang dari nilai q.

Jika diketahui $p \in R$ yang memenuhi suatu pertidaksamaan, maka p disebut solusi atau penyelesaian dari pertidaksamaan tersebut. Solusi dari suatu pertidaksamaan secara umum disajikan dalam bentuk interval atau selang baik selang terbuka maupun tertutup.

Kumpulan setiap bilangan x dimana nilainya lebih besar dari p dan lebih kecil dari q disebut selang (interval) terbuka dinotasikan dengan:

$$(p, q) = \{x | p < x < q\}$$

Kumpulan setiap bilangan x dimana nilainya lebih besar dan sama dengan p dan lebih kecil dan sama dengan q disebut selang (interval) tertutup dinotasikan dengan:

$$[p, q] = \{x | p \leq x \leq q\}$$

Tabel 1. Notasi interval dan garis bilangan

Notasi interval tertutup dan terbuka	Notasi himpunan Bilangan	Garis Bilangan
(p, q)	$\{x \mid p < x < q\}$	
$[p, q]$	$\{x \mid p \le x \le q\}$	
$[p, q)$	$\{x \mid p \le x < q\}$	
$(p, q]$	$\{x \mid p < x \le q\}$	
$(-\infty, q)$	$\{x \mid x < q\}$	
$(-\infty, q]$	$\{x \mid x \le q\}$	
(p, ∞)	$\{x \mid x > p\}$	
$[p, \infty)$	$\{x \mid x \ge p\}$	
$(-\infty, \infty)$	R	

1.6.2 Sifat-sifat Pertidaksamaan

1) $\forall\, p, q, r \in R,\ p > q \rightarrow p + r > q + r$

2) $\forall\, p, q, r \in R,\ p > q \rightarrow p - r > q - r$

3) $\forall\, p, q, r \in R,\ p + q > r \rightarrow p > r - q$

4) $\forall\, p, q, r \in R,\ p > q \text{ dan } r > 0 \rightarrow pr > qr$

5) $\forall\, p, q, r \in R,\ p > q \text{ dan } r < 0 \rightarrow pr < qr$

6) $\forall\, p, q, r \in R,\ p > q \text{ dan } r > 0 \rightarrow \frac{p}{r} > \frac{q}{r}$

7) $\forall\, p, q, r \in R,\ p > q \text{ dan } r < 0 \rightarrow \frac{p}{r} < \frac{q}{r}$

8) $\forall\, p, q, r \in R,\ p > q \text{ dan } p, q > 0 \rightarrow p^2 < q^2$

1.6.3 Jenis-jenis Pertidaksamaan

1.6.3.1 Pertidaksamaan Linier

Suatu pertidaksamaan yang mengandung variabel tertentu dimana variabelnya berpangkat 1 disebut dengan pertidaksamaan linear.

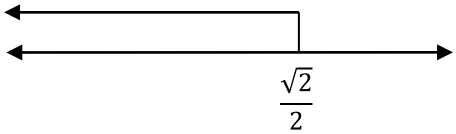
Contoh soal

Diketahui pertidaksamaan linear $\sqrt{2}x < 1$. Tentukan solusi dari pertidaksamaan tersebut!

Pembahasan

$\sqrt{2}x < 1$ maka $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ atau $x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Garis bilangannya:



Solusi atau himpunan penyelesainnya adalah : $x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Contoh soal

Diketahui pertidaksamaan linear $3 < 2x < 5$. Tentukan solusi dari pertidaksamaan tersebut!

Pembahasan

$3 < 2x < 5$

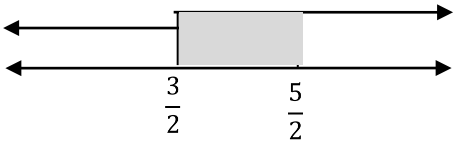
Pertidaksamaan tersebut terdiri dari:

$2x < 5$ maka $x < \frac{5}{2}$ i)

$2x > 3$ maka $x > \frac{3}{2}$ ii)

Berdasarkan i) dan ii) maka dibuat garis bilangan untuk memperoleh solusi dari pertidaksamaan tersebut.

Garis bilangannya:



Dari irisan i) dan ii) maka diperoleh solusi atau himpunan penyelesainnya adalah : $\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$

Contoh soal

Diketahui sistem pertidaksamaan linear berikut:

i) $3x < 12$

ii) $-2x < 8$

iii) $0 < x < 6$

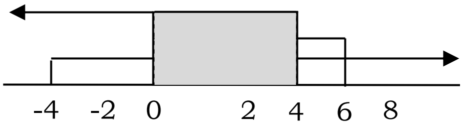
Pembahasan

i) $3x < 12$ maka $x < 4$

ii) $-2x < 8$ maka $x > -4$

iii) $0 < x < 6$

Berdasarkan i), ii) dan iii) digambarkan garis bilangannya:



Dari irisan i), ii) dan iii) maka diperoleh solusi sistem pertidaksamaan linear tersebut adalah: $0 < x < 4$.

1.6.3.2 Pertidaksamaan Kuadrat

Pertidaksamaan kuadrat adalah suatu pertidaksamaan yang mengandung suatu variabel yang mana variabelnya berderajat (berpangkat) dua dan kedua ruas dihubungkan oleh salah satu tanda pertidaksamaan.

Contoh soal

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan kuadrat $x^2 - x - 30 > 0$

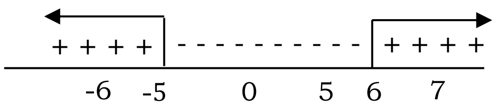
Pembahasan

$x^2 - x - 30 > 0$

$(x - 6)(x + 5) > 0$

Pembuat nol fungsi:

$(x - 6)(x + 5) = 0$ maka diperoleh $x - 6 = 0$ atau $x + 5 = 0$, sehingga $x_1 = 6$ atau $x_2 = -5$. Nilai x_1 dan x_2 tersebut disajikan dalam bentuk garis bilangannya:



Berdasarkan garis bilangan tersebut diperoleh solusi dari pertidaksamaan kuadrat tersebut adalah: $x < -5$ atau $x > 6$.

1.6.3.3 Pertidaksamaan di Bawah Tanda Akar

Suatu pertidaksamaan yang mana fungsinya memuat bentuk akar disebut dengan pertidaksamaan di bawah tanda akar. Jika diketahui $x \in R$, maka definisi dari pertidaksamaan di bawah tanda akar dapat ditulis :

$$\sqrt{x}, \text{ terdefinisi untuk } \forall x \in R \text{ dengan syarat } x > 0$$

Contoh soal

Diketahui pertidaksamaan dalam bentuk akar

$$x - 2 > \sqrt{x - 2}$$

Carilah solusi dari pertidaksamaan bentuk akar di atas.

Pembahasan

i) Syarat bilangan di bawah tanda akar:

$3 - x > 0$

$-x > -3$

$x < 3$

ii) Solusi pertidaksamaan:

$(x-3)^2 > \left(\sqrt{3-x}\right)^2$

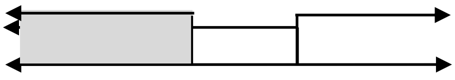
$x^2 - 6x + 9 > 3 - x$

$x^2 - 5x + 6 > 0$

Pembuat nol fungsi:

$(x-2)(x-3) = 0$

maka diperoleh $x - 2 = 0$ atau $x - 3 = 0$, sehingga $x_1 = 2$ atau $x_2 = 3$. Selanjutnya i) dan ii) disajikan dalam garis bilangan untuk memperoleh solusi dari pertidaksamaan tersebut.



Berdasarkan i) dan ii) diperoleh solusi dari pertidaksamaan kuadrat tersebut adalah: $x < 2$.

1.6.3.4 Pertidaksamaan Pecahan

Bentuk umum pecahan

$$x = \frac{P}{Q}, \text{syarat } Q \neq 0$$

1) $\frac{P}{Q} > 0 \rightarrow PQ > 0$

2) $\frac{P}{Q} < 0 \rightarrow PQ < 0$

Contoh soal

Diketahui pertidaksamaan pecahan pecahan berikut:

$$\frac{2x-3}{x-1} < 1, \text{ dengan syarat } x \neq 1$$

Tentukan solusi dari pertidaksamaan pecahan di atas.

Pembahasan

$\frac{2x-3}{x-1} \leq 1$, dengan syarat $x \neq 1$

$$\frac{2x-3}{x-1} - 1 < 0$$

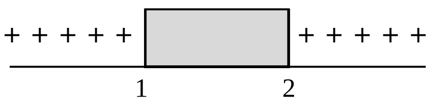
$$\frac{2x-3}{x-1} - \frac{(x-1)}{(x-1)} < 0$$

$$\frac{2x-3-x+1}{x-1} < 0$$

$$\frac{x-2}{x-1} \leq 0$$

Pembuat nol fungsi:

$\frac{x-2}{x-1} = 0$ atau $(x-2)(x-1) = 0$, diperoleh $x - 2 = 0$ atau $x - 1 = 0$, sehingga $x_1 = 2$ atau $x_2 = 1$. Adapun solusi pertidaksamaan tersebut digambarkan pada garis bilangan berikut:



Solusi dari pertidaksamaan pecahan di atas adalah: $1 < x < 2$

1.6.3.5 Pertidaksamaan Berderajat (Pangkat) Tinggi

Suatu pertidaksamaan disebut pertidaksamaan berderajat tinggi apabila pertidaksamaan tersebut mengandung variabel tertentu yang mana derajat dari variabelnya paling rendah adalah 2. Adapun untuk pertidaksamaan berderajat tinggi berlaku sifat sebagai berikut.

a) $(-1)^m = -1$ berlaku jika m bilangan ganjil

b) $(-1)^n = 1$ dan $1^n = 1$ berlaku jika m bilangan ganjil

Contoh soal

Diketahui pertidaksamaan berderajat tinggi sebagai berikut.

$$x^3 - x > 0$$

Carilah solusi dari pertidaksamaan tersebut.

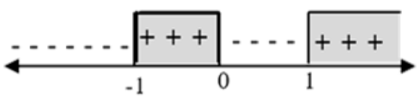
Pembahasan

$x^3 - x > 0$ maka $x(x^2 - 1) > 0$

$$x(x-1)(x+1) > 0$$

Pembuat no fungsi:

$x(x-1)(x+1) = 0$, maka diperoleh $x_1 = -1$ atau $x_2 = 0$ atau $x_3 = 1$. Nilai x tersebut digambarkan pada garis bilangan berikut.



Solusi dari pertidaksamaan pecahan di atas adalah : $-1 < x < 0$ atau $x > 1$.

1.7 *Rataan Aritmatik* (RA), *Rataan Geometrik* (RG), dan *Rataan Harmonik* (RH)

Adapun rataan aritmatik (RA), rataan geometrik (RG), dan rataan harmonik (RH) diuraikan dalam rumus – rumus di bawah ini.

a) Rumus Rataan Aritmatik (RA)

$$RA = \frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n}, \text{ dengan } n = 1,2,3,\cdots$$

b) Rataan Geometrik (RG)

$$RG = \sqrt[n]{p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n}, \text{ dengan } n = 1,2,3,\cdots$$

c) Rataan Haromnik (RH)

$$RH = \frac{n}{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}}, \text{ dengan } n = 1,2,3,\cdots$$

Adapun hubungan dari RA, RG, dan RH adalah sebagai berikur.

$$RA \geq RG \geq RH$$

$$\frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n} \geq \sqrt[n]{p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}}$$

1.8 Ketaksamaan dan Jenis - jenisnya

Ketaksamaan sering digunakan untuk membandingkan dua hal atau lebih. Dalam matematika untuk membandingkan dua hal atau lebih digunakan tanda pertidaksamaan seperti yang dijelaskan pada materi sebelumnya di atas. Ketaksamaan paling mendasar adalah ketaksamaan yang berlaku dalam lingkup bilangan real. Sebagai contoh $p \geq 0$ dimana p adalah anggota bilangan real.

Teorema I

untuk $p \geq 0$ dan $q \geq 0$ maka berlaku sifat:

1) $p < q \Leftrightarrow p^2 < q^2 \Leftrightarrow \sqrt{p} < \sqrt{q}$

2) $p \leq q \Leftrightarrow p^2 \leq q^2 \Leftrightarrow \sqrt{p} \leq \sqrt{q}$

1.8.1 Ketaksamaan Bernoulli

Adapun ketaksamaan Bernoulli adalah sebagai berikut:

$$\forall\, m \in N \ dan\ y > -1 \text{ berlaku } (1+y)^m \geq 1+my$$

1.8.2 Ketaksamaan Cauchy

Jika $n \in N$ dan $a_1, a_2, \dots a_{n,}$ $b_1, b_2, \dots, b_n$maka:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

atau

$$(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} a_1^2)(\sum_{i=1}^{n} b_1^2).$$

1.8.3 Ketaksamaan Segitiga

Andaikan $\forall\, p, q \in \mathbb{R}$ diperoleh $|p+q| \leq |p| + |q|$

Akibatnya

1) Andaikan $\forall\, p, q \in \mathbb{R}$ diperoleh $\big||p| - |q|\big| \leq |p-q|$
2) Andaikan $\forall\, p, q \in \mathbb{R}$ diperoleh $|p-q| \leq |p| + |q|$.

1.9 Harga Mutlak

Harga mutlak berfungsi untuk mempositifkan setiap bilangan yang negatif. Adapun contoh penerapan harga mutlak adalah sebagai berikut:

a) $\left|\frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5}$

b) $\left|-\frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5}$

c) $|3| = 3$

d) $|-3| = 3$

e) $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$

f) $|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$

g) $|a| = a$, jika a bilangan positif

h) $|-a| = a$, jika a bilangan negatif

Secara umum definisi dari harga mutlak ditulis:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{jika } x \geq 0 \\ -x, \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Untuk pertidaksamaan harga mutlak berlaku sifat – sifat sebagai berikut.

1) Andaikan $|x| < p$ diperoleh $-p < x < p$
2) Andaikan $|x| > p$ diperoleh $x < -p$ atau $x > p$
3) Andaikan $|f(x)| \gtreqless |g(x)|$, cara menentukan solusinya kedua ruas dikuadratkan.

Teorema harga mutlak adalah:

Teorema I

1) $\forall\, p, q \in R \;\rightarrow |p \times q| = |p| \times |q|$

2) $\forall\, p \in R \rightarrow |p|^2 = p^2$

3) Jika $q \geq 0$ dan $|p| \leq q$ hanya jika $-q \leq p \leq q$, $\forall\, p, q \in R$,

4) $\forall\, p \in R, \;\rightarrow -|p| \leq p \leq |p|$

Contoh soal

Diketahui pertidaksamaan harga mutlak sebagai berikut.

a) $|2x - 1| < \; 5$

b) $|5x + 3| > 7$

Carilah solusi dari pertidaksamaan harga mutlak tersebut.

Pembahasan

a) Dengan menggunakan sifat pertidaksamaan harga mutlak diperoleh:

$|2x - 1| < \; 5 \rightarrow -5 < 2x - 1 < 5$ (setiap ruas ditambah 1)

$-4 < 2x < 6$ (setiap ruas dibagi 2)

$-2 < x < 3$ (setiap ruas dibagi 2)

Solusi pertidaksamaan di atas adalah: $-2 < x < 3$

b) $|5x + 3| < \; 7 \quad \rightarrow \quad 5x + 3 < -7$ atau $5x + 3 > 7$

$5x < -10$ atau $5x > 4$

$x < -2$ atau $x > \frac{4}{5}$

Solusi pertidaksamaan di atas adalah: $x < -2$ atau $x > \frac{4}{5}$.

1.10 Supremum dan Infimum

Contoh Soal (KNMIPA 2021 Tingkat Wilayah)

Diberikan himpunan $A \subset \mathbb{R}$ dengan $B = \left\{\frac{1}{x}\middle| x \in A\right\}$. Jika $\inf A > 0$, maka $\sup B = \cdots$ dan jika $\inf A = 0$, maka $sup\ (B) = \cdots$

Pembahasan

Asumsikan bahwa $\inf A > 0$, klaim bahwa

$$\sup B = \frac{1}{\inf A}$$

akan buktikan klaim tersebut. Misal $u = \inf A$. Karena $u = \inf A > 0$, maka $0 < u \leq x$ untuk setiap x di A. Dari sini, $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{u}$ untuk setiap $x \in A$. Oleh karena itu, $\frac{1}{u}$ adalah batas atas dari B dan B merupakan himpunan yang terbatas di atas.

Misalkan v adalah sebarang batas atas dari B. Maka, $0 < \frac{1}{x} \leq v$ untuk setiap $x \in A$. Oleh karena itu, untuk setiap $x \in A$. Sehingga, $\frac{1}{v}$ adalah batas bawah bagi A. Karena $u = \inf A$, maka $\frac{1}{v} \leq u$ dan $\frac{1}{u} \leq v$. Dari ini, dapat disimpulkan bahwa $\frac{1}{u}$ adalah batas atas terkecil bagi B dan $sup\ B = \frac{1}{u}$.

Kemudian, asumsikan bahwa $\inf A = 0$. Di sini, anggap bahwa $0 \notin A$. Karena jika 0 ada di A, maka B tidak akan terdefinisi, kecuali jika semesta pembicaraan adalah $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ yang kemudian berakibat bahwa $\sup B = \infty$.

Karena inf A = 0 dan $0 \notin A$, maka untuk setiap n ∈ N, terdapat x_n di A sedemikian sehingga

$$0 < x_n < \frac{1}{n}$$

untuk setiap n ∈ N. Sehingga,

$$n < \frac{1}{x_n}$$

untuk setiap bilangan asli n. Dengan kata lain, B tak terbatas yang berakibat bahwa $\sup B = \infty$.

Jadi, jika inf A > 0, maka $\sup B = \frac{1}{\sup A}$ dan jika inf (A) = 0, maka $\sup B = +\infty$

Contoh Soal (KNMIPA 2018)

Diketahui himpunan $A \subseteq R$ tak kosong. Jika $\sup A = \inf A$, maka himpunan A adalah

Pembahasan

Sebelumnya, Jika $A \subseteq R$ tak kosong, maka $\sup A$ menyatakan batas bawah terkecil dari A. Sehingga, $a \leq \sup A$ untuk setiap $a \in A$. Selain itu, $\inf A$ menyatakan batas bawah terbesar dari A. Sehingga $\inf A \leq a$ untuk setiap $a \in A$. Oleh karena itu, jika $x = \sup A = \inf A$, maka $x \leq a \leq x$ untuk setiap $a \in A$. Dari sini, $a = x$ untuk setiap $a \in A$ dan

$$A = \{x\}$$

Oleh karena itu, A merupakan himpunan singleton (himpunan yang hanya terdiri dari satu anggota)

Contoh Soal (KNMIPA 2020)

Jika himpunan $B \subseteq \mathbb{R}$ tidak kosong dan terbatas di bawah, serta himpunan $A = \{x | x \; adalah \; batas \; bawah \; dari \; B\}$, maka $\sup A$ sama dengan…

Pembahasan

Karena himpunan B terbatas, maka ada bilangan real x sedemikian sehingga untuk setiap $b \in B$, berlaku bahwa $x \leq b$ berdasarkan definisi "himpunan terbatas di bawah". Akibatnya, himpunan A tidak kosong karena $x \in A$. Selanjutnya, karena $B \subseteq \mathbb{R}$ tidak kosong dan terbatas di bawah, maka berdasarkan Aksioma Kelengkapan, himpunan B memiliki infimum dan misalka $b' = \inf B$.

Misalkan $a \in A$, maka a adalah batas bawah dari B sehingga $b \leq b'$. Dengan kata lain, A terbatas di atas oleh b'. Karena A tidak kosong dan terbatas di atas, maka dengan aksioma kelengkapan, himpunan tersebut memiliki supremum. Misalkan supremumnya adalah a', akan ditunjukkan bahwa $a' = b'$. Sebelumnya tinjau lemma berikut.

Jika $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a < b + \varepsilon$, maka $a \leq b$.

Anda dapat membuktikan sendiri lema tersebut dengan menggunakan kontradiksi. Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$. Oleh karena $a' = \sup A$, maka terdapat $a \in A$ sedemikian sehingga $a' - \varepsilon < a$. Dari sini $a' - \varepsilon < a \leq b'$ atau $a' < b' + \varepsilon$. Sehingga dari lema tersebut didapat $a' \leq b$. Selain itu perhatikan bahwa karena b' adalah batas bawah dari B, maka didapat $b' \in A$ yang berakibat bahwa $b' \leq a'$. Karena $a' \leq b'$ dan $b' \leq a'$, maka $a' = b'$. Jadi, didapat $\sup A = a' = b' = \inf B$.

Soal (KNMIPA)

Misalkan himpunan $A = \{\cos\frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ jika ada, *sup A* adalah…

Soal (KNMIPA 2015)

Jika $S = \left\{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{m} \mid n, m \in \mathbb{N}\right\}$, maka $\sup S$ adalah…

Soal (ONMIPA)

Infimum dari himpunan $\left\{\frac{7}{(\pi+n)!} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ adalah …

BAB 2
BARISAN DAN DERET

INDIKATOR KOMPETENSI

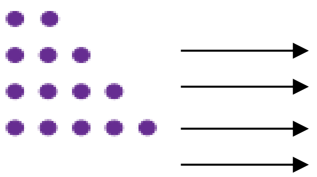
Setelah mempelajari materi dalam BAB 2 ini, mahasiswa mampu:

- ❖ Memahami Konsep Pola Bilangan
- ❖ Memahami Konsep Barisan
- ❖ Memahami dan Menjelaskan Kekonvergenan Barisan
- ❖ Memahami dan Menjelaskan Barisan dan Deret Aritmatika
- ❖ Memahami dan Menjelaskan Barisan dan Deret Geometri
- ❖ Memahami dan Menjelaskan Barisan Tak Hingga
- ❖ Memahami dan Menjelaskan Barisan Monoton dan Terbatas

2.1 Pola Bilangan

2.1.1 Pola Garis Lurus

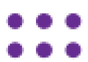
Penulisan bilangan yang mengikuti pola garis lurus merupakan pola bilangan yang paling sederhana. Suatu bilangan hanya digambarkan dengan noktah yang mengikuti pola garis lurus. Misalnya,



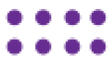
mewakili bilangan 2
mewakili bilangan 3
mewakili bilangan 4
mewakili bilangan 5

2.1.2 Pola Persegipanjang

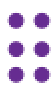
Pada umumnya, penulisan bilangan yang didasarkan pada pola persegipanjang hanya digunakan oleh bilangan bukan prima. Pada pola ini, noktah-noktah disusun menyerupai bentuk persegipanjang. Misalnya,



mewakili bilangan 6, yaitu 2 x 3



mewakili bilangan 8, yaitu 2 x 4

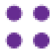


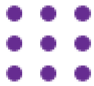
mewakili bilangan 6, yaitu 3 x 2

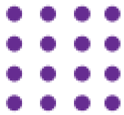
2.1.3 Pola Persegi

Persegi merupakan bangun datar yang semua sisinya memiliki ukuran yang sama panjang. Begitu pula dengan penulisan pola bilangan yang mengikuti pola persegi. Semua noktah digambarkan dengan jumlah yang sama. Perhatikan uraian berikut.


mewakili bilangan 1, yaitu 1 x 1 =


mewakili bilangan 4, yaitu 2 x 2 = 4


mewakili bilangan 9, yaitu 3 x 3 = 9

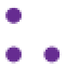

mewakili bilangan 16, yaitu 4 x 4 = 16

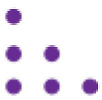
Jika dilanjutkan, bilangan-bilangan yang digambarkan mengikuti pola persegi adalah : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ...

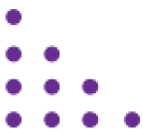
2.1.4 Pola Segitiga

Selain mengikuti pola persegipanjang dan persegi, bilangan pun dapat digambarkan melalui noktah yang mengikuti pola segitiga. Untuk lebih jelasnya, coba kamu perhatikan lima bilangan yang mengikuti pola segitiga berikut ini.

mewakili bilangan 1



mewakili bilangan 3


mewakili bilangan 6


mewakili bilangan 10

Jadi, bilangan yang mengikuti pola segitiga adalah: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45,...

2.2 Definisi Barisan

Barisan bilangan didefinisikan sebagai fungsi dengan daerah asal merupakan bilangan asli

$$f : N \to R$$

$$n \to f(n) = a_n$$

Fungsi tersebut dikenal sebagai barisan bilangan real $\{a_n\}$ dengan a_n adalah sukuk ke-n. Adapun bentuk-bentuk penulisan dari barisan adalah:

a) Bentuk eksplisit suku ke-n

$$a_n = \frac{1}{n}$$

b) Betuk rekursif

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n}$$

c) Ditulis barisannya sejumlah berhingga suku awalnya

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$$

2.3 Kekonvergenan Barisan

Barisan $\{a_n\}$ dikatakan konvergen menuju L atau berlimit L dan ditulis sebagai

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

Jika untuk setiap bilangan positif ε, ada bilangan positif N sehingga untuk

$$n \geq N \to |a_n - L| < \varepsilon$$

Sebaliknya barisan tidak konvergen ke suatu bilangan L yang terhingga disebut divergen.

2.4 Barisan dan Deret Aritmatika

2.4.1 Barisan Aritmetika (Barisan Hitung)

Barisan aritmetika adalah barisan bilangan yang mempunyai beda atau selisih yang tetap antara dua suku barisan yang berurutan. Perhatikan contoh berikut;

Diketahui barisan bilangan:

1 4 7 10 13 16 19 22

+3 +3 +3 +3 +3 +3 +3

Barisan bilangan tersebut memiliki beda atau selisih 3 antara dua suku barisan yang berurutan. Berarti, barisan bilangan tersebut merupakan barisan aritmetika.

Diketahui barisan bilangan:

8 4 0 −4 −8 −12 −16 −20

−4 −4 −4 −4 −4 −4 −4

Barisan bilangan tersebut memiliki beda atau selisih yang tetap antara dua suku barisan yang berurutan, yaitu –4. Berarti, barisan bilangan tersebut merupakan barisan aritmatika. Dari kedua contoh dapat disimpulkan bahwa barisan aritmetika memiliki beda (sering dilambangkan dengan b) yang tetap. Jika *b* bernilai positif maka barisan aritmetika itu dikatakan barisan aritmetika naik. Sebaliknya, Jika b bernilai negatif maka barisan aritmetika itu disebut barisan arimetika turun.

Contoh soal

Tentukan jenis barisan aritmetika berikut berdasarkan nilai bedanya.

a. 30, 32, 34, 36, 38, ...

b. 18, 15, 12, 9, 6, 3, ...

Pembahasan

a. 30, 32, 34, 36, 38, ...

30 32 34 36 38

+2 +2 +2 +2

merupakan barisan aritmetika naik karena bedanya 2.

b. 18, 15, 12, 9, 6, 3, ...

18 15 12 9 6 3

−3 −3 −3 −3 −3

merupakan barisan aritmetika turun karena bedanya -3

Diketahui barisan bilangan aritmetika sebagai berikut.

U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, ..., U_{n-1}, U_n

Dari barisan tersebut diperoleh

$U_1 = a$ (suku pertama dilambangkan dengan a)

$U_2 = U_1 + b = a + b$

$U_3 = U_2 + b = (a + b) + b = a + 2b$

$U_4 = U_3 + b = (a + 2b) + b = a + 3b$

$U_5 = U_4 + b = (a + 3b) + b = a + 4b$

$U_6 = U_5 + b = (a + 4b) + b = a + 5b$

.

.

.

$U_n = U\ n - 1 + b = (a + (n - 2)\ b\ ) + b = a + (n - 1)\ b$

Jadi, rumus ke-n barisan aritmetika dapat ditulis sebagai berikut $U_n = a + (n - 1)\ b$

Untuk mencari beda dalam suatu barisan aritmetika, coba kamu perhatikan uraian berikut.

$U_2 = U_1 + b$ maka $b = U_2 – U_1$

$U_3 = U_2 + b$ maka $b = U_3 – U_2$

$U_4 = U_3 + b$ maka $b = U_4 – U_3$

$U_5 = U_4 + b$ maka $b = U_5 – U_4$

.

.

.

$U_n = U_{n-1} + b$ maka $b = U_n – U_{n-1}$

Jadi, beda suatu barisan aritmetika dinyatakan sebagai berikut $b = U_n – U_{n-1}$

Contoh soal

Diketahui barisan aritmetika sebagai berikut: 10, 13, 16, 19, 22, 25, ...

Tentukan:

a. Jenis barisan aritmetikanya,

b. Suku kedua belas barisan tersebut

Pembahasan

a. Untuk menentukan jenis barisan aritmetika, tentukan nilai beda pada barisan tersebut.

$b = U_2 - U_1$

$= 13 - 10 = 3$

Oleh karena $b > 0$, barisan aritmetika tersebut merupakan barisan aritmetika naik.

b. Untuk mencari suku kedua belas (U_{12}), dilakukan cara sebagai berikut.

$$U_n = a + (n - 1)\,b \text{ maka } U_{12} = 10 + (12 - 1)\,3$$
$$= 10 + 11 \cdot 3$$
$$= 10 + 33 = 43$$

Jadi, suku kedua belas barisan tersebut adalah 43.

2.4.2 Deret Aritmatika (Deret Hitung)

Deret aritmatika adalah jumlah suku-suku suatu barisan aritmatika dengan beda antara suku berurutan sama.

Misalnya, diketahui barisan bilangan sebagai berikut.

$$2, 5, 8, 11, 14, 17, \ldots, U_n$$

arisan bilangan tersebut jika dijumlahkan akan menjadi

$$2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + \ldots + U_n$$

Contoh soal

Suatu barisan aritmetika memiliki suku pertama 5 dan beda 3. Tuliskan barisan dan deret aritmetika dari barisan tersebut.

Pembahasan

a. Barisan aritmetikanya adalah 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, ..., Un

b. Deret aritmetikanya adalah 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + ... + Un

2.4.2.1 Menentukan Jumlah *n* Suku Pertama Deret Aritmatika (S_n)

Misalkan, jumlah n suku pertama deret tersebut dilambangkan dengan S_n maka:

$$\begin{array}{rl} S_n = & a + (a + b) + \ldots + (a + (n - 2)b) + (a + (n - 1)b) \\ S_n = & (a + (n - 1)b) + (a + (n - 2)b) + \ldots + (a + b) + a \quad + \\ \hline 2S_n = & \underbrace{(2a + (n - 1)b) + (2a + (n - 1)b) + \ldots + (2a + (n - 1)b)}_{n \text{ faktor sama}} \end{array}$$

$$2S_n = n(2a + (n - 1)b) \text{ maka } S_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)b)$$

Jadi, jumlah n suku pertama deret aritmetika adalah

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)b)$$

Oleh karena $U_n = a + (n - 1)b$, rumus S_n dapat dituliskan sebagai berikut.

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n) \text{ atau } S_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$$

Contoh soal

Diketahui deret aritmetika : 3 + 7 + 11 + 15 + 19 + ... + U_{10}. Tentukan:

a. Suku kesepuluh (U_{10}) deret tersebut

b. Jumlah sepuluh suku pertama (S_{10})

Pembahasan

a. dari deret aritmatika diperoleh nilai a = 3, b = 7 – 3 = 4, sehingga:

$U_n = a + (n - 1)b$

$U_{10} = 3 + (10 - 1)4$

$= 3 + (9)4$

$= 3 + 36$

$= 39$

b. $S_n = \frac{n}{2}(a + U_n) = S_{10} = \frac{10}{2}(3 + 39) = 210$

Jadi, jumlahnya adalah 210

Contoh soal

Sebuah perusahaan permen memproduksi 2.000 permen pada tahun pertama. Oleh karena permintaan konsumen setiap tahunnya, perusahaan tersebut memutuskan untuk meningkatkan produksi permen sebanyak 5% dari produksi awal setiap tahunnya.

a. Nyatakan jumlah permen yang diproduksi perusahaan tersebut pada 5 tahun pertama dalam barisan bilangan

b. Tentukan jumlah permen yang diproduksi pada tahun ke-7 (U_7)

c. Tentukan jumlah permen yang telah diproduksi sampai tahun ke-7 (S_7)

Pembahasan

Diketahui: a = 2.000

$b = \frac{5}{100} x 2000 = 100$

a. Barisan bilangannya adalah sebagai berikut: 2.000, 2.100, 2.200, 2.300, 2.400

b. Untuk mencari suku kedua belas (U_7), dilakukan cara sebagai berikut.

$U_n = a + (n - 1)\ b$ maka $U_7 = 2000 + (7 - 1)\ 100$

$= 2000 + 6 \cdot 100$

$= 2000 + 600$

$= 2600$

c. $S_n = \frac{n}{2}(a + U_n) = S_7 = \frac{7}{2}(2000 + 2600)$

$= \frac{7}{2}(4600)$

$= 16100$

Jadi, jumlahnya adalah 16100.

2.5 Barisan dan Deret Geometri

2.5.1 Barisan Geometri (Barisan Ukur)

Barisan geometri adalah barisan bilangan yang tiap sukunya diperoleh dari suku sebelumnya dengan mengalikan atau membagi dengan suatu bilangan tetap. Bilangan tetap itu yang disebut pembanding atau rasio yang dilambangkan dengan huruf *r.*

Contoh soal

2, 4, 8, 16, 32.... rasionya $r = 2$

2, -6, 18, -54....rasionya $r = -3$

Suatu barisan $U_I, U_2, U_3 ...... U_n$ disebut barisan geometri, jika untuk tiap nilai n bilangan asli berlaku,

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_4}{U_3} = \cdots = \frac{U_n}{U_{n-1}} = r$$

Jika $|r| > 1$ artinya $r < -1$ atau $r > 1$ maka barisan suku-suku geometri itu semakin besar. Barisan tersebut dinamakan barisan geometri naik. Jika Jika $|r| < 1$ artinya $-1 < r < 1$, maka dinamakan barisan deometri turun.

2.5.2 Menentukan Rumus Suku Ke-*n* Barisan Geometri

Jika suku pertama U_I, dinyatakan dengan a dan perbandingan dua suku berurutan adalah rasio r = dan suku ke- n dinyatakan dengan U_n , maka kita dapat

$$\frac{U_2}{U_1} = r \longrightarrow U_2 = rU_1 = ar$$

$$\frac{U_3}{U_2} = r \longrightarrow U_3 = rU_2 = ar^2$$

Dari bentuk diatas, kita peroleh suatu barisan geometri, pada umumnya sebagai berikut

$$\frac{U_n}{U_{n-1}} = r \longrightarrow U_n = rU_{n-1} = ar^{n-1}$$

Contoh soal

Suku pertama suatu barisan geometri sama dengan 16, sedangkan suku ke empat sama dengan 1024.

Tentukan

a) Rasio barisan geometri tersebut

b) Rumus suku ke-n

Pembahasan

a) a =16 dan U_4 = 128

$ar^{n-1} = ar^{n-1}$

$128 = 16\ r^{4-1}$

$r^3 = 8 = 2$

b) $U_n = ar^{n-1}$

$= 16\ (\ 2\ )^{n-1}$

$= 16 \times 2^{n-1}$

2.5.3 Deret Geometri (Deret Ukur)

Deret geometri adalah penjumlahan suku-suku dari barisan geometri. Jika a, ar, ar^2, ar^3,..ar^{n-1} adalah barisan geometri, maka a + ar + ar^2 + ar^3 +...+ar^{n-1} disebut deret geometri. Kalau jumlah n suku deret geometri kita lambangkan dengan S_n, maka dapat ditulis

$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1}$

Kita kalikan persamaan di atas dengan r, diperoleh

$r\ S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n$

$S_n - r\ S_n = a - ar^n$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)}$$

Dengan demikian, jumlah suku n suku pertama deret geometri dapat ditentukan dengan rumus:

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)} \text{ untuk } |r| < 1$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)} \text{ untuk } |r| > 1$$

2.6 Barisan Tak Hingga

Suatu barisan

$$1, \quad 4, \quad 7, \quad 11, \quad 13, \quad \cdots$$

Dikatakan sebagai barisan tak hingga, karena bisan tersebut tidak mempunyai suku terakhir. Secara eksplisit suku terakhir barisan bilangan tersebut dapat dirumuskan:

$$a_n = 3n - 2, \quad \text{untuk } n \geq 1$$

2.7 Barisan Monoton dan Terbatas

Barisan $\{a_n\}$ dikatakan:

a) Monoton naik apabila $a_n \leq a_{n+1}$ untuk semua n dan bilangan D dikatakan sebagai batas atas barisan $\{a_n\}$ apabila $a_n \leq D$ untuk semua bilangan bulat positif n

b) Monoton turun apabila $a_n \geq a_{n+1}$ untuk semua n dan bilangan D dikatakan sebagai batas bawah barisan $\{a_n\}$ apabila $C \leq a_n$ untuk semua bilangan bulat positif n

Contoh soal

Diberikan barisan bilangan real a_n, dengan

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k! + 4^{k+1}}{k!\, 4^k}$$

Maka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \cdots$

Pembahasan

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k! + 4^{k+1}}{k!\, 4^k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4^k} + \frac{4}{k!}\right)$$

$$= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k!}$$

Dari sini,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k!}$$

$$= \frac{1}{3} + 4(e - 1)$$

$$= 4e - \frac{11}{3}$$

Dengan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k}$ adalah deret geometri tak hingga yang relatif mudah untuk ditentukan dan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ adalah representasi deret tak hingga dari $e - 1$.

BAB 3
LIMIT FUNGSI

INDIKATOR KOMPETENSI

Setelah mempelajari materi dalam BAB 3 ini, mahasiswa mampu:
- ❖ Memahami Konsep Limit dan Sifat - sifatnya
- ❖ Menjelaskan Limit Satu Arah
- ❖ Menjelaskan Limit Tak Hingga
- ❖ Menjelaskan Limit Menuju Tak Hingga
- ❖ Menjelaskan Limit Fungsi Trigonometri

3.1 Konsep Limit dan Sifat - sifatnya

Limit merupakan salah satu materi yang diajarkan dalam bidang ilmu matematika. Limit dapat diartikan bahwa jika nilai suatu fungsi $f(x)$ mendekati L saat x mendekati a baik dari kiri maupun dari kanan. secara matematika dapat ditulis:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Nilai limit dari suatu fungsi dapat dilakukan dengan beberapa cara antara lain cara subtitusi, faktorisasi, dan mengalikan dengan akar sekawan. Selain cara tersebut, limit dapat juga diselesaikan dengan menggunakan dalil L'Hospital yang akan dibahas pada Bab berikutnya.

Dalam menentukan nilai limit suatu fungsi, sering sekali dijumpai kendala – kendala yang menyebabkan nilai limit dari fungsi tersebut tidak dapat ditentukan baik dengan menggunakan cara subtitusi, faktorisasi, maupun mengalikan dengan akar sekawan. Kendala- kendala tersebut sering dijumpai pada fungsi – fungsi bentuk tak tentu. Ciri – ciri fungsi bentuk tak tentu itu dapat dilihat setelah nilai x disubtitusikan ke dalam fungsi. Nilai fungsi setelah subtitusi yaitu $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty, \text{dan} \pm \infty$. Beberapa sifat – sifat limit dapat dilihat di bawah ini.

a. $\lim_{x \to a} k = k$, dengan a dan k adalah konstanta

b. $\lim_{x \to a} x^n = c^n$, dengan n adalah bilangan asli

c. Jika diketahui $\lim_{x \to a} f(x)$ dan $\lim_{x \to a} g(x)$ dan k adalah konstanta:

1) $\lim\limits_{x \to a} (kf)(x) = k \lim\limits_{x \to a} f(x)$

2) $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = \lim\limits_{x \to a} p(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$

3) $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

4) $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, dengan syarat $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

5) $\lim\limits_{x \to a} f^n(x) = \left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)^n$, dimana $n \in N$

6) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$, dimana $n \in N$ dan $\lim\limits_{x \to a} f(x) > 0$.

3.2 Limit Satu Arah

Suatu fungsi $f(x)$ disebut memiliki limit untuk nilai x mendekati a, jika dan hanya jika nilai dari limit kanan sama dengan nilai dari limit kiri dari fungsi $f(x)$ tersebut, sehingga dapat dinyatakan:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \to \lim_{x \to a^+} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Bentuk limit kanan dan limit kiri dinyatakan sebagai berikut.

a) Jika $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$, artinya nilai $y = f(x)$ mendekati L jika nilai x mendekati a dari arah kanan, dan disebut limit kanan dari $f(x)$.

b) Jika $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$, artinya nilai $y = f(x)$ mendekati L jika nilai x mendekati a dari arah kiri, dan disebut limit kiri dari $f(x)$.

c) Jika $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$, maka dikatakan $f(x)$ mempunyai limit pada $x = a$.

d) Jika $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L \neq \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$, maka dikatakan $f(x)$ tidak mempunyai limit pada $x = a$.

3.3 Limit Tak Hingga

Limit tak hingga merupakan berfungsi untuk mengetahui kecenderungan suatu fungsi jika nilai variabelnya dibuat semakin besar. Jika x menuju tak hingga dapat ditulis $x \to \infty$ yang bermakna bahwa nilai x semakin besar atau tanpa batas. Didefinisikan suatu fungsi :

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

Fungsi $f(x)$ akan diselidiki untuk x mendekati 1 dari arah kanan.

Tabel 2. Nilai Fungsi $f(x)$ saat x Mendekati 1 dari Arah Kanan

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}}$
2	1
1,5	4
1,25	16
1,10	100
1,01	10.000
1,001	1.000.000
1,0001	100.000.000

Dari nilai – nilai pada Tabel 2 tersebut dapat diperhatikan bahwa jika x semakin kecil mendekati 1, maka nilai $f(x)$ semakin besar atau dapat ditulis:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

Berikutnya fungsi $f(x)$ akan diselidiki untuk x mendekati 1 dari arah kiri. Nilai fungsi $f(x)$ jika x mendekati 1 dari arah kiri seperti pada Tabel 3.

Tabel 3. Nilai Fungsi $f(x)$ saat x Mendekati 1 dari Arah Kiri

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}}$
0	1
0,5	4
0,75	16
0,9	100
0,99	10.000
0,999	1.000.000
0,9999	100.000.000

Hasil Tabel 3 dapat diperhatikan bahwa untuk nilai x yang mendekati 1 dari kiri menyebabkan nilai nilai fungsi $f(x)$ semakin besar atau dapat ditulis:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

Berdasarkan analisis yang dilakukan dengan menggunakan limit kanan dan limit kiri, maka diperoleh nilai limit fungsi $f(x)$ adalah sebagai berikut.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$$

3.4 Limit Menuju Tak Hingga

Berikut akan diselidiki limit fungsi jika peubah bebas x naik atau turun tak terbatas. Limit fungsi tersebut dapat digunakan untuk menentukan nilai-nilai ekstrim dari suatu fungsi pada selang terbuka. Didefinisikan suatu fungsi

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

Berikut akan diselidiki nilai fungsi $f(x)$ jika $x\neq 0$ dan $x\in R$. Perhatikan nilai fungsi $f(x)$ untuk $x\neq 0$ dan $x\in R$ seperti pada Tabel 4.

Tabel 4. Nilai Fungsi $f(x)$ untuk $x\neq 0$ dan $x\in R$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{x}}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{x}}$
1	1	-1	-1
10	0,1	-10	-0,1
100	0,01	-100	-0,01
1000	0,001	-1000	-0,001
10.000	0,0001	-10.000	-0,0001
100.000	0,00001	-100.000	-0,00001
1.000.000	0,000001	-1.000.000	-0,000001

Berdasarkan Tabel 4 dan grafik di atas dapat disimpulkan bahwa semakin besar nilai x (arah positif), maka nilai fungsi $f(x)$ semakin kecil mendekati nol.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

Selain itu, jika x semakin besar arah negatif, maka nilai fungsi $f(x)$ semakin kecil mendekati nol.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

Hasil penyelidikan limit fungsi dari $f(x)=\frac{1}{x}$, dapat didefinisikan limit menuju tak hingga sebagai berikut.

a) Misalkan $f(x)$ suatu fungsi yang terdefinisi pada sembarang interval $(a,+\infty)$, ditulis dengan

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$$

Jika untuk nilai x semakin besar tidak terbatas (arah positif) maka nilai $f(x)$ mendekati L.

b) Misalkan $f(x)$ suatu fungsi yang terdefinisi pada sembarang interval $(-\infty, b)$, ditulis dengan

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Jika untuk nilai x semakin besar tidak terbatas (arah negatif) maka nilai $f(x)$ mendekati L

Untuk menentukan nilai limit fungsi menuju tak hingga dapat digunakan cara seperti menentukan limit fungsi alajabar. Selain itu, nilai limit fungsi menuju tak hingga dapat ditentukan dengan menggunakan metode membagi dengan pangkat tertinggi dari penyebut.

3.5 Limit Fungsi Trigonometri

Limit fungsi trigonometri merupakan nilai terdekat suatu sudut dalam fungsi trigonometri. Untuk menyelesaikan limit fungsi trigonometri dapat digunakan teknik subtitusi seperti limit fungsi aljabar atau memodifikasi bentuk fungsi yang dikaitkan dengan konsep trigonometri. Rumus-rumus dasar limit fungsi trigonometri adalah sebagai berikut. Untuk menentukan nilai limit fungsi trigonometri dapat digunakan cara dalam menentukan limit fungsi alajabar.

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b}$ dan $\lim\limits_{x\to0}\frac{bx}{\sin ax}=\frac{b}{a}$

b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan ax}{bx}=\frac{a}{b}$ dan $\lim\limits_{x\to0}\frac{bx}{\tan ax}=\frac{b}{a}$

c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{\tan bx}=\frac{a}{b}$ dan $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan bx}{\sin ax}=\frac{b}{a}$

Contoh soal (KNMIPA 2018)

Jika

$$\lim_{x\to c}\frac{a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+\cdots+a_n(x-c)^n}{(x-c)^n}=0,$$

maka

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n=\cdots$$

Pembahasan

Misalkan

$$f(x)=a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+\cdots+a_n(x-c)^n$$

dan

$$g(x) = (x - c)^n$$

Karena $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ dan $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, maka haruslah $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ (jika bukan nol, maka $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ tidak real atau tidak ada, sehingga kontradiksi dengan asumsi). Karena $\lim_{x\to c} f(x) = 0$, maka

$$\lim_{x\to c} a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n = 0$$

$$a_0 = 0$$

Kemudian dengan aturan L'Hopital, maka $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$,

$$\lim_{x\to c} \frac{a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \cdots + na_n(x-c)^{n-1}}{n(x-c)^{n-1}} = 0$$

Dengan argumen yang sama seperti sebelumnya, maka haruslah $a_1 = 0$, Selanjutnya, dengan aturan L'Hopital yang diterapkan secara berulang hingga tahap tertentu serta dengan argumen seperti sebelumnya, maka akan diperoleh bahwa

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1}$$

Dengan melakukan subtitusi ke $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, maka diperoleh juga bahwa $a_n = 0$. Akibatnya,

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$$

Contoh soal (KNMIPA 2018)

Diketahui a∈R dan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ memenuhi $|xf(x) + a| < \sin^2(x - a)$ untuk setiap x∈R. Nilai dari $\lim_{x\to a} f(x)$ adalah …

Pembahasan

Terlebih dahulu asumsikan bahwa $a \neq 0$. Berdasarkan teorema apit, karena $\lim_{x\to a} \sin^2(x-a) = 0$, maka haruslah

$$\lim_{x\to a} (xf(x) + a) = 0$$

Selain itu, juga diperoleh

$$\lim_{x\to a} (xf(x)) + a = 0$$

Sehingga

$$\lim_{x\to a} (xf(x)) = -a$$

Kemudian, karena untuk $x \neq 0$ berlaku

$$f(x) = \big(xf(x)\big).\frac{1}{x}$$

Karena $a \neq 0$, maka dengan sifat limit fungsi, diperoleh bahwa

$$\lim_{x\to a} f(x) = \Big(\lim_{x\to a} xf(x)\Big) \lim_{x\to a}\left(\frac{1}{x}\right) = -a.\frac{1}{a} = -1$$

Selanjutnya, misalkan bahwa $a = 0$, maka $|xf(x)| < \sin^2(x)$ untuk setiap x∈R. Sehingga, untuk x bukan nol berlaku bahwa

$$|f(x)| < \frac{\sin^2(x)}{|x|} = \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|.|\sin(x)|$$

Karena

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2(x)}{|x|}.\sin(x)\right) = 0$$

maka dengan teorema apit, diperoleh bahwa $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

Jadi

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} -1, & a \neq 0 \\ 0, & a = 0. \end{cases}$$

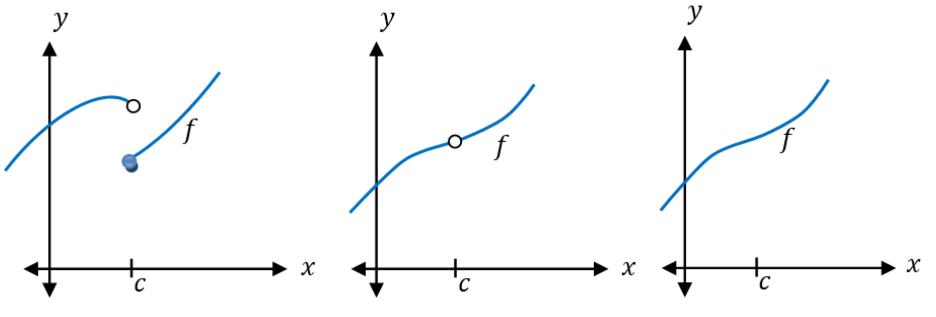
BAB 4
FUNGSI KONTINU

INDIKATOR KOMPETENSI

Setelah mempelajari materi dalam BAB 4 ini, mahasiswa mampu:
- ❖ Memahami Konsep Fungsi Kontinu
- ❖ Menjelaskan Kontinuitas pada Sebuah Titik
- ❖ Menjelaskan Kekontinuitas Fungsi-fungsi Umum
- ❖ Menjelaskan Kekontinuitas pada Interval
- ❖ Memahami dan Menjelaskan Sifat-sifat Fungsi Kontinu

4.1 Definisi Fungsi Kontinu

Kontinu artinya mempunyai nilai di setiap titik atau dalam interval titik yang ditentukan, sedangkan diskontinu artinya tidak kontinu di setiap titik atau dalam interval titik yang dutentukan atau secara ringkas dapat diartikan mempunyai titik dimana nilainya tidak ada ketika titik tersebut disubtitusikan ke dalam fungsinya. Dalam matematika kata kontinu digunakan untuk mendeskripsikan suatu proses yang terus menerus tanpa perubahan secara tiba-tiba. Sebuah fungsi $f(x)$ dapat dikatakan kontinu di suatu titik setelah diketahui limitnya ada atau tidak ada. Untuk lebih jelas perhatikan Gambar 2.



(a) $\lim_{x\to c} f(x)$tidak ada (b) $\lim_{x\to c} f(x)$ ada, tetapi (c) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

Gambar 2. (a) dan (b) Grafik Fungsi diskontinu dan (c) Grafik Fungsi kontinu

4.2 Kontinuitas pada Sebuah Titik

Fungsi f dikatakan tidak kontinu (diskontinu) di suatu titik c jika memenuhi salah satu dari 3 (tiga) kondisi berikut:

a) Nilai fungsi f tidak terdefinisi di titik c atau $f(c)$ tidak ada

b) Limit fungsi ketika nilai x mendekati c tidak ada atau $\lim_{x \to c} f(x)$ tidak ada

c) Nilai dari fungsi tidak sama dengan limit fungsi di titik c atau $f(c) \neq \lim_{x \to c} f(x)$

Contoh soal

Misalkan $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ dengan $x \neq 3$, bagaimana seharusnya f didefinisi pada $x = 3$ agar kontinu.

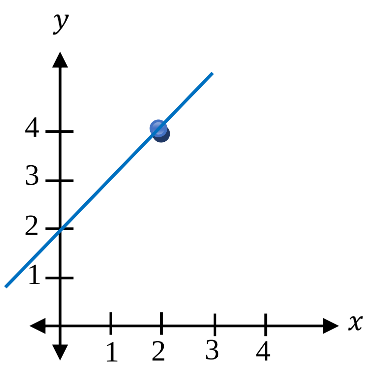
Pembahasan

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = \lim_{x \to 3} (x+3) = 6$$

Fungsi $f(x)$ tidak kontinu karena $f(2)$ tidak terdefinisi, supaya $f(x)$ menjadi kontinu maka $f(2) = 4$ sehingga fungsinya

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & : x \neq 2 \\ 2 & : \ x = 2 \end{cases}$$

Sehingga grafiknya



4.3 Kekontinuitas Fungsi-fungsi Umum

Adapun teorema - teorema terkait dengan kekontinuitas fungsi – fungsi umum adalah sebagai berikut.

Teorema A

Jika fungsi polinomial kontinu di setiap c dengan c adalah bilangan real, maka fungsi rasional kontinu di setiap c dalam domainnya dengan syarat penyebutnya tidak bernilai nol.

Teorema B

Jika fungsi harga mutlak kontinu di setiap c dengan c bilangan real. Jika n ganjil, fungsi akar pangkat n kontinu di setiap c. Jika n genap, fungsi akar pangkat n kontinu pada setiap c positif

Teorema C

Jika f dan g kontinu di c dengan c bilangan real maka kf , $f+g$, $f-g$, fg akan kontinu di c, $\frac{f}{g}$ kontinu jika $g(c) \neq 0$, dan jika n genap maka $\sqrt[n]{f}$ kontinu jika $f(c) > 0$.

Teorema D

Jika fungsi sinus dan cosinus kontinu di setiap c dengan c adalah bilangan real, maka fungsi $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ dan $\csc x$ kontinu di setiap c dalam domainnya.

Teorema E

Jika $\lim\limits_{x \to c} g(x) = L$ dan f kontinu di L maka

$$\lim_{x \to c} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right) = f(L)$$

khususnya jika g kontinu pada c dan f kontinu di $g(c)$ maka fog kontinu di c.

Contoh soal

1) Selidiki dimana kekontinuan fungsi $f(x) = \frac{3|x|-x^2}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

2) Tentukan semua titik diskontinu dari fungsi $f(x) = \frac{\sin x}{x(1-x)}$

3) Tunjukkan $h(x) = |x^2 - 3x + 6|$ kontinu untuk setiap bilangan real.

Pembahasan

1) Bilangan non positif dapat diabaikan, karena f tidak terdefinisi untuk bilangan non positif. Berdasarkan teorema A dan B, untuk setiap bilangan positif, fungsi $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $|x|$, dan x^2 kontinu. Selanjutnya berdasarkan teorema C diperoleh $3|x|$, $3|x| - x^2$ dan $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ mengakibatkan:

$$\frac{3|x| - x^2}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

Kontinu untuk setiap bilangan positif.

2) Menurut teorema D, pembilang kontinu untuk setiap bilangan real. Penyebutnya juga kontinu di setiap bilangan real, tetapi saat x = 0 atau x = 1 penyebut adalah 0, sehingga menurut teorema C, f kontinu untuk setiap bilangan real kecuali saat x = 0 dan x = 1.

3) Misalkan $f(x) = |x|$ dan $g(x) = x^2 - 3x + 6$ dimana kedua fungsi tersebut kontinu untuk setiap bilangan real. Sehingga komposisi kedua fungsi tersebut juga kontinu, dengan komposisi yang dapat ditulis $h(x) = f\big(g(x)\big) = |x^2 - 3x + 6|$.

4.4 Kekontinuitas pada Interval

Adapun definisi kekontinuan pada interval yaitu:

Suatu fungsi f kontinu dari kanan di a jika $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ dan f kontinu dari kiri di b jika $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Kita katakan f kontinu pada interval terbuka jika f kontinu di setiap titik pada interval. Kita katakan f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$, jika f kontinu pada (a, b) kontinu kanan di a, dan kontinu kiri di b.

Teorema F

Teorema F dikenal dengan teorema nilai tengah yaitu:

Andaikan f fungsi yang terdefinisi di $[a, b]$ dan w bilangan diantara $f(a)$ dan $f(b)$. Jika f kontinu di $[a, b]$ maka ada sedikitnya satu bilangan c diantara a dan b sedemikian sehingga $f(c) = w$.

4.5 Sifat-sifat Fungsi Kontinu

Adapun sifat-sifat fungsi kontinu adalah sebagai berikut: Jika $f(x)$ dan $g(x)$ kontinu pada $x \in I$,maka

a) $f(x) + g(x)$ kontinu di titik x pada selang I.

b) $f(x) - g(x)$ kontinu di titik x pada selang I.

c) $f(x) \cdot g(x)$ kontinu di titik x pada selang I.

d) $\frac{f(x)}{g(x)}$ kontinu di titik x pada selang I dengan syarat $g(x) \neq 0$.

e) $|f(x)|$ kontinu di titik x pada selang I.

Contoh soal

Diberikan fungsi kontinu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Jika setiap himpunan terbuka G diperoleh f(G) terbuka, buktikan bahwa fungsi f monoton

Pembahasan

Asumsikan bahwa fungsi f kontinu dan setiap himpunan terbuka G berlaku bahwa f(G) terbuka. Akan ditunjukkan bahwa f monoton dengan menggunakan kontradiksi.

Andaikan bahwa f tidak monoton, f tidak monoton naik maupun tidak monoton turun. Ini berakibat bahwa f mempunyai maksimum lokal ataupun minimum lokal. Tanpa mengurangi keumuman, asumsikan bahwa f mempunyai maksimum lokal, yaitu terdapat a dan δ>0 sedemikian sehingga $f(x) \leq f(a)$ untuk setiap x ∈ $V_\delta(a)$ dengan $V_\delta(a)$ adalah persekitaran a sejauh δ.

Perhatikan bahwa $f\big(V_\delta(a)\big)$ adalah interval karena f kontinu dan $V_\delta(a)$ adalah interval. Selain itu, dari kontruksi a, maka ujung kanan interval tersebut adalah f(a) dengan $f(a) \in f\big(V_\delta(a)\big)$. Sehingga, $f\big(V_\delta(a)\big)$ bukan interval buka yang berakibat bahwa himpunan tersebut adalah bukan himpunan terbuka. Kontradiksi dengan asumsi bahwa untuk setiap himpunan terbuka G berlaku bahwa f(G) terbuka. Sehingga, pengandaian salah dan haruslah f merupakan fungsi monoton.

Contoh soal

Diketahui fungsi $f: [-5,4] \to \mathbb{R}$ kontinu. Jika

$$E = \{x \in [-5,4]: f(x) = x\}$$

Maka *Closur* dari E adalah …

Pembahasan

Dalam bidang analisis himpunan tersebut dikenal sebagai himpunan titik tetap (fixed point), lebih tepatnya himpunan titik tetap f pada [−5,4]. Himpunan tersebut merupakan himpunan tutup yang berakibat bahwa klosur dari E himpunan E itu sendiri. Kita akan membuktikan klaim tersebut, yaitu E adalah himpunan tutup.

Kita asumsikan bahwa fungsi tersebut adalah fungsi kontinu pada domainnya. Jika E=∅, maka E adalah himpunan tutup. Misalkan E bukan himpunan kosong, maka dapat dibuat barisan (a_k) di E yang konvergen.

Maka, titik kekonvergenan a juga berada di $[-5,4]$. Berdasarkan hubungan kekontinuan dan kekonvergenan barisan, maka haruslah $f(a_k) \to f(a)$ untuk k→∞.

Karena a_n di E, maka:

$f(a_k) = a_k$. Oleh karena tu,

$\lim_{x \to c} f(a_k) = f(a)$

$\lim_{x \to c} a_k = f(a)$

$a = f(a)$

Sehingga, $a \in E$. Oleh karena itu, sebarang barisan yang konvergen di E konvergen ke suatu titik di E itu sendiri. Akibatnya, E merupakan himpunan tutup yang juga mengimplikasikan bahwa klosur dari E adalah E itu sendiri. Jadi, klosur dari E adalah E.

Soal ONMIPA 2015

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^n x^n$, $\forall x \in (-1,1)$. Jika fungsi $f: (-1,1) \to \mathbb{R}$ dengan $f = \lim_{n \to \infty} f_n$, pada $(-1,1)$, maka nilai $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx = \cdots$

Soal ONMIPA 2016

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = nx(1-x^2)^n, \forall x \in [-1,1]$ dan $a_n = \int_0^1 f_n(x)dx$. Jika $S_n = \sin(\pi a_n)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $\lim_{n \to \infty} S_n$ adalah…

BAB 5
TURUNAN FUNGSI

INDIKATOR KOMPETENSI

Setelah mempelajari materi dalam BAB 5 ini, mahasiswa mampu:
- Memahami Konsep Turunan
- Memahami dan Menjelaskan Rumus-Rumus Dasar Turunan
- Memahami dan Menjelaskan Sifat-Sifat Turunan
- Memahami dan Menjelaskan Jenis – jenis Turunan

5.1 Konsep Turunan

Jika $y = f(x)$ suatu fungsi, Δx adalah perubahan nilai x dan Δy adalah perubahan nilai y akibat adanya perubahan nilai x, maka

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

adalah ratio dari perubahan variabel y terhadap x. Turunan dari y terhadap x didefinisikan dengan :

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

5.2 Rumus-Rumus Dasar Turunan

a) $y = a \rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 0$

b) $y = ax \rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = a$

c) $y = ax^n \rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = anx^{n-1}$

d) $y = af(x) \rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = af'(x)$

5.3 Sifat-Sifat Turunan

a) $y = \left(f(x)\right)^n \rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = n\left(f(x)\right)^{n-1} f'(x)$

b) $y = f(x) + g(x) \rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) + g'(x)$

c) $y = f(x) - g(x) \rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) - g'(x)$

d) $y = f(x)g(x) \rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

e) $y = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

5.4 Jenis – jenis Turunan

5.4.1 Turunan Fungsi Komposisi (Aturan Rantai)

Turunan fungsi bersusun atau berantai dirumuskan:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{du}$$

Contoh soal

Tentukan y' dari $y = \sqrt[3]{(2x^2 - 3x + 5)^7}$

Misalkan

$$u = 2x^2 - 3x + 5$$

$$\frac{du}{dx} = 4x - 3$$

sehingga soal menjadi

$$y = \sqrt[3]{u^7}$$

$$y = u^{\frac{7}{3}}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{7}{3} u^{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{7}{3} \sqrt[3]{u^4}$$

pakai rumus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{du}$$

$$\frac{dy}{dx} = (4x - 3)\left(\frac{7}{3}\sqrt[3]{u^4}\right)$$

$$= \frac{7}{3}(4x - 3)\sqrt[3]{(2x^2 - 3x + 5)^4}$$

5.4.2 Turunan Fungsi Trigonometri

Jika diketahui $f(x) = y$, maka turunan dari fungsi trigonometri adalah :.

a) $f(x) = y = \sin x, \rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx} = \cos x$

b) $f(x) = y = \cos x, \rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx} = -\sin x$

c) $f(x) = y = \tan x, \rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx} = sec^2 x$

5.4.3 Turunan Invers Fungsi Trigonometri

Adapun rumus turunan invers fungsi trigonometri adalah sebagai berikut.

a) $y = arc \sin u \rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

b) $y = arc\cos u \rightarrow \frac{dy}{du} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

c) $y = arc\tan u \rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1}{u^2+1}$

5.4.4 Turunan Fungsi Eksponensial dan Logaritma

Rumus-rumus dasar turunan fungsi eksponensial dan logaritma adalah sebagai berikut:

a) $y = e^x \rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x$

b) $y = e^{f(x)} \rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)e^{f(x)}$

c) $y = \log_c x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\log_c e$

d) $y = \log_c f(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}\log_c e$

e) $y = a^x \rightarrow \frac{dy}{dx} = a^x \ln a$

f) $y = \ln x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

g) $y = \ln[f(x)] \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x)}f'(x)$

h) $y = \ln[f(x)] \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x)}f'(x)$

5.4.5 Rumus Fungsi Hiperbolik

a) $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

b) $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

c) $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

d) $\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$

e) $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$

f) $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$

5.4.6 Rumus Invers Fungsi Hiperbolik

a) $\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

b) $\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right),$ $\quad |x| \geq 1$

c) $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$ $\quad |x| < 1$

d) $\operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right),$ $\quad |x| > 1$

e) $\operatorname{arsech}(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right),$ $\quad 0 < x \leq 1$

f) $\operatorname{arcsch}(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}\right) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right),$ $\quad x \neq 1$

5.4.7 Turunan Fungsi Hiperbolik

a) $y = \sinh x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \cosh x$

b) $y = \cosh x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \sinh x$

c) $y = \tanh x \rightarrow \frac{dy}{dx} = sech^2 x$

d) $y = \coth x \rightarrow \frac{dy}{dx} = -csch^2 x,$ $\quad x \neq 0$

e) $y = \operatorname{sech} x \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\tanh x \operatorname{sech} x$

f) $y = \operatorname{csch} x \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\coth x \operatorname{csch} x,$ $\quad x \neq 0$

5.4.8 Turunan Invers Fungsi Hiperbolik

a) $y = \operatorname{arsinh} x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

b) $y = \operatorname{arcosh} x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$ $\quad 1 < x$

c) $y = \operatorname{artanh} x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2},$ $\quad |x| < 1$

d) $y = \operatorname{arcoth} x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^2},$ $\quad 1 < |x|$

e) $y = \operatorname{arsech} x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}},$ $\quad 0 < x < 1$

f) $y = \operatorname{arcsch} x \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}},$ $\quad x \neq 0$

5.4.9 Turunan Fungsi Implisit

Fungsi implisit adalah suatu fungsi yang memuat lebih dari satu variable dengan variable bebas dan variable terikat berada dalam satu rumus sedemikian sehingga tidak bisa dipisahkan pada ruas yang berbeda. Contoh Fungsi Implisit:

Contoh soal

Tentukan $\frac{dy}{dx}$, jika $x^3y^2 - 4xy^3 + 6x^3 - 7y^4 - 8 = 0$

Pembahasan

$$3x^2dx.y^2 + 2ydy.x^3 - (4dx.y^3 + 3y^2dy.4x) + 18x^2dx - 28y^3dy = 0$$

$$3x^2y^2dx + 2x^3ydy - 4y^3dx - 12xy^2dy + 18x^2dx - 28y^3dy = 0$$

$$(2x^3y - 12xy^2 - 28y^3)dy = (4y^3 3x^2y^2 - 18x^2)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y^3 - 3x^2y^2 - 18x^2}{2x^3 - 12xy^2 - 28y^3}$$

5.4.10 Turunan Tingkat Tinggi

Turunan tingkat tinggi dari suatu fungsi adalah turunan fungsi yang tidak hanya cukup sampai menentukan turunan pertama, namun bisa turunan kedua, turunan ketiga, dan seterusnya sampai turunan ke-n. Turunan pertama, kedua, ketiga, dan seterusnya juga merupakan fungsi yang dinotasikan dengan $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}$ atau $f(x), f'(x), f''(x), \cdots, f^n(x)$ atau $y', y'', y''', \cdots, y^n$.

Contoh soal

Jika $y = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + \frac{1}{4}x - 12$, tentukan $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}$ dan $\frac{d^5y}{dx^5}$

Pembahasan

$$y = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + \frac{1}{4}x - 12$$

$$\frac{dy}{dx} = 8x^3 - 9x^2 - 10x + \frac{1}{4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 24x^2 - 18x - 10$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 48x - 18$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 48$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = 0$$

Contoh soal KNMIPA

Diketahui fungsi f mempunyai turunan hingga tingkat ke-2 pada $[0,1]$ dan fungsi g didefinisikan sebagai

$$g(x) = f(x) + f(1-x).$$

Jika $f''(x) > 0$, untuk setiap $x \in [0,1]$, buktikan bahwa g turun pada $[0, 0.5]$.

Pembahasan

Ingat kembali bahwa suatu fungsi turun pada suatu interval kompak jika turunan keduanya pada interval tersebut tak positif. Kita akan menggunakan sifat ini untuk membuktikan bahwa fungsi g yang didefinisikan tersebut adalah fungsi turun pada interval $[0,1]$.

Perhatikan bahwa

$$g'(x) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}f(1-x)$$

$$= f'^{(x)} + \left[\frac{d}{d(1-x)} f(1-x)\right]\left[\frac{d}{dx}(1-x)\right]$$

$$= f'(x) + f'(1-x)$$

Karena $f''(x) > 0$ untuk setiap $x \in [0,1]$, maka $f'(x)$ adalah fungsi naik pada interval tersebut. Perhatikan bahwa untuk $0 \leq x \leq 0.5$, berlaku bahwa

$$0.5 \leq 1 - x \leq 1,$$

sehingga $f'(x) \leq f'(1-x)$ dan

$$g'(x) = f'(x) - f'(1-x) \leq 0$$

untuk tiap $x \in [0, 0.5]$

Oleh karena itu, $g'(x) < 0$ untuk setiap $x \in [0, 0.5]$. Akibatnya, g turun pada interval [0,0.5]

Contoh soal KNMIPA

Diketahui fungsi $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ terdiferensial dan tidak ada x sehingga

$$f(x) = f'(x) = 0$$

Tunjukkan bahwa himpunan

$$G = \{x \in [0,1]: f(x) = 0\}$$

berhingga.

Pembahasan

Akan ditunjukkan dengan menggunakan kontradiksi bahwa himpunan tersebut berhingga. Misalkan bahwa

$$G = \{x \in [0,1]: f(x) = 0\}$$

Andaikan himpunann tersebut tak berhingga. Maka, kita dapat mengkonstruksi barisan (x_n) di himpuna tersebut sehingga semua suku-sukunya berbeda. Dari sini, barisan tersebut terbaras karena himpunan G terbatas. Dari sini, dengan teorema Bolzano Weiestrass, terdapat subbarisan (x_{n_k}) dari (x_n) yang konvergen. Katakanlah konvergen ke x. Jelas bahwa $x \in (0,1]$. Karena f terdiferensialkan yang berakibat bahwa fungsi tersebut kontinu, maka haruslah $f(x_{n_k})$ konvergen ke $f(x)$. Karena $f(x_{n_k}) = 0$ untuk setiap k, maka haruslah $f(x) = 0$. Dari sini, berdasarkan keterdiferensialan dari f di x diperoleh bahwa

$$f'(x) = \frac{f(x_{n_k}) - f(x)}{x_{n_k} - x} = \frac{0 - 0}{x_{n_k} - x} = 0 = f(x).$$

Kontradiksi dengan asumsi bahwa tidak ada x sehingga

$$f(x) = f'(x) = 0$$

Oleh karena itu, pengandaian salah. Jadi, himpunan G berhingga.

Contoh soal

Diketahui fungsi $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ mempunyai turunan hingga tingkat ke-2 pada $(0,1)$. Jika $f(0) = f(1) = 0$ dan $f'' + 2f' + f \geq 0$ pada $(0,1)$, buktikan bahwa $f(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in [0,1]$.

Pembahasan

Didefinisikan fungsi $g: [0,1] - \mathbb{R}$ dengan $g(x) = e^x f(x)$. Sehingga $g(0) = g(1) = 0$. Selain itu untuks etiap $x \in (0,1)$ berlaku

$$g'(x) = e^x\big(f'(x) + f(x)\big)$$

dan

$$g"(x) = e^x\big(f''(x) + 2f'(x) + f(x)\big)$$

Karena $f'' + 2f' + f \geq 0$ pada $(0,1)$ maka $g"(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in (0,1)$. Oleh karena itu, berdasarkan hubungan keterdiferensialan fungsi dan fungsi konveks, maka g adalah fungsi konveks pada interval tersebut. Dari sini $g(x)$ akan selalu berada di bawah garis yang menghubungkan kedua titik tersebut adalah $f(x) = 0$, maka didapat bahwa $g(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in (0,1)$. Dari sini, untuk tiap $x \in (0,1)$ berlaku

$$e^x f(x) = g(x) \leq 0$$

yang berlaku bahwa $f(x) \leq 0$. Karena $f(0) = f(1) = 0$ dan $f(x) \leq 0$ untuk tiap $x \in (0,1)$, maka $f(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in [0,1]$.

Soal ONMIPA 2019

Misalkan interval $I \subseteq \mathbb{R}$ dan $c \in I$. Fungsi-fungsi f dan g terdefinisi pada I. Turunan kedelapan dari f dan g yaitu f^8 dan g^8, ada dan kontinu pada I. Jika $f^k(c) = 0$ dan $g^k(c) = 0$, untuk $k = 0,1,2,3,\dots,7$ tetapi $g^8(c) \neq 0$, maka $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ adalah…

Soal OSN PERTAMINA 2014

Jika $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 4x^2 - 4x$, maka koordinat titik minimum dan titik maksimum secara berturut-turut adalah…

BAB 6
APLIKASI TURUNAN FUNGSI

INDIKATOR KOMPETENSI

Setelah mempelajari materi dalam BAB 6 ini, mahasiswa mampu:

- ❖ Memahami dan Menjelaskan Konsep Nilai Maksimum dan Minimum
- ❖ Menjelaskan Teorema Rolle, Teorema Nilai Rata-rata, dan Teorema Nilai Rata-rata Cauchy
- ❖ Memahami dan Menjelaskan Konsep Dalil L'Hospital
- ❖ Memahami dan Menjelaskan Konsep Fungsi Monoton
- ❖ Memahami dan Menjelaskan Konsep Uji Turunan Pertama dan Kedua
- ❖ Memahami dan Menjelaskan Konsep Fungsi Cekung
- ❖ Memahami dan Menjelaskan Konsep Titik Belok
- ❖ Menggambar Grafik Fungsi dengan Memanfaatkan Turunan
- ❖ Memahami dan Menjelaskan Konsep Aplikasi Turunan Fungsi Terkait Garis Singgung

6.1 Nilai Maksimum dan Minimum

Nilai maksimum dan minimum adalah nilai terbesar dan terkecil dari suatu fungsi, baik dalam kisaran tertentu (ekstrim lokal atau relatif) atau di seluruh daearh asal dari fungsi (ekstrim global atau absolut). Dalam kehidupan sehari-hari sering muncul permasalahan mengenai nilai maksimum dan nilai minimum. Misalnya:

a) Bagaimana menentukan harga penjualan dari suatu barang sehingga mendapatkan keuntungan yang maksimal

b) Bagaimana menentukan lintasan terpendek atau jarak terdekat dari daerah asal menuju daerah tujuan

c) Bagaimana menentukan pengeluaran minimum dalam memproduksi suatu barang yang ingin diproduksikan.

Permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan aplikasi turunan yang berkenaan dengan permasalahan nilai maksimum dan nilai minimum. Nilai maksimum dan minimum didefinisikan sebagai berikut:

Misalkan S domain dari f yang memuat titik c, maka

a) $f(c)$ adalah nilai terbesar f pada S jika $f(c) \geq f(x), \forall x \in S$
b) $f(c)$ adalah nilai terkecil f pada S jika $f(c) \leq f(x), \forall x \in S$
c) $f(c)$ adalah nilai ekstrim f pada S jika $f(c)$ merupakan nilai maksimum dan nilai minimum
d) Fungsi yang ingin dimaksimumkan atau diminimumkan adalah fungsi objektif.

Adapun beberapa terema tentang maksimum dan minimum yaitu jika f kontinu pada selang tertutup $[a, b]$, maka mencapai nilai maksimum dan nilai minimum di selang tersebut.

Titik stasioner atau titik kritis dari suatu fungsi adalah suatu titik di dalam grafik dengan turunan pertama dari fungsi tersebut sama dengan nol. Titik stasioner merupakan titik dimana fungsi berhenti naik atau turun. Suatu fungsi yang akan dimaksimumkan atau diminimumkan mempunyai suatu selang I sebagai domainnya. Selang atau interval tersebut berupa selang sembarang seperti selang yang terdapat pada materi sistem bilangan real. Beberapa selang tersebut mempunyai titik-titik ujung dan beberapa selang tidak terdapat titik-titik ujung. Titik-titik ujung selang tertutup merupakan batas dari daerah domain suatu fungsi. Sebagai contoh selang $[a, b]$ memuat kedua titik ujung, $[a, b)$ hanya memuat titik ujung kiri, $(a, b]$ hanya memuat titik ujung kanan, dan (a, b) tidak memuat titik ujung baik kanan maupun kiri. Nilai maksimum dan minimum (nilai ekstrim) dari suatu fungsi yang didefinisikan pada selang tertutup biasanya terdapat pada titik-titik ujung interval tersebut. Adapun teorema titik kritis adalah sebagai berikut.

Jika f terdefinisi pada selang I yang memuat titik c. Jika $f(c)$ adalah nilai ekstrim, maka c haruslah suatu titik kritis dengan c merupakan salah satu dari:

a) Titik ujung dari I
b) Titik stasioner f, yaitu titik dimana $f'(c) = 0$
c) Titik singular f, yaitu titik dimana $f'(c)$ tidak ada.

Titik singular adalah sebuah titik yang membuat turunan pertama dari suatu fungsi tidak ada nilainya. Langkah-langkah untuk menentukan nilai maksimum dan minimum suatu fungsi $y = f(x)$ adalah sebagai berikut.

a) Tentukan syarat stasioner $f'(x) = 0$

b) Tentukan jenis stasionernya (maksimum, belok, minimum) menggunakan turunan kedua

c) Menghitung nilai maksimum atau minimum dengan mensubtitusi nilai variabelnya ke fungsi awal.

Contoh soal

Tentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5$ pada selang $[-2,1]$!

Pembahasan

$f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 12x^2 + 6x - 6$

Syarat stasioner:

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 12x^2 + 6x - 6 = 0$$

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

$$(2x - 1)(x + 1) = 0$$

$$2x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{atau} \quad x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$$

Titik stasioner: $-2, -1, \frac{1}{2}, 1$

Menentukan nilai maksimum dan minimum

$$\begin{aligned} f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5 \;&\rightarrow\; f(-2) = -13 && \text{(minimum)} \\ &\rightarrow\; f(-1) = 0 && \text{(maksimum)} \\ &\rightarrow\; f\left(\tfrac{1}{2}\right) = -6\tfrac{3}{4} \\ &\rightarrow\; f(1) = -4 \end{aligned}$$

6.2 Teorema Rolle, Teorema Nilai Rata-rata, dan Teorema Nilai Rata-rata Cauchy

6.2.1 Teorema Rolle

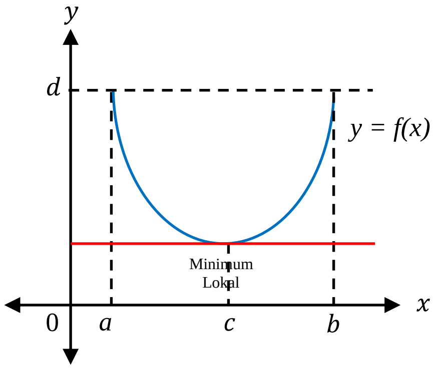
Teorema nilai ekstrim menyatakan bahwa suatu fungsi kontinu pada selang tertutup $[a, b]$ harus memiliki nilai maksimum dan minimum pada selang tersebut. Kedua nilai tersebut dapat terjadi pada ujung sealng. Teorema Rolle memberikan kondisi yang menjamin keberadaan nilai ekstrim dalam interior dalam suatu selang tertutup. Adapun teorema Rolle, misalkan f adalah fungsi yang memenuhi kondisi berikut.

a) f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$

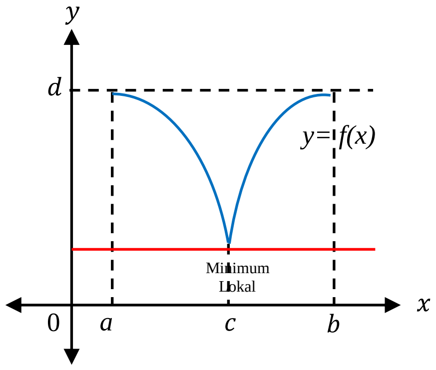
b) f terdiferensialkan pada interval terbuka (a, b)

c) $f(a) = f(b)$

maka terdapat $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga $f'(0) = 0$. Sebagai ilustrasi perhatikan Gambar 3.



f(x) kontinu pada $[a, b]$ dan terdiferensialkan pada (a, b)



f(x) kontinu pada $[a, b]$

Gambar 3. Fungsi kontinu dan tidak kontinu

Pada gambar (a) dapat dilihat bahwa, beradasrkan teorema Rolle jika suatu fungsi $f(x)$ kontinu pada $[a, b]$ dan terdiferensialkan pada (a, b), dan jika $f(a) = f(b)$ maka terdapat minimal satu nilai x yang terletak diantara a dan b sedemikian sehingga grafik $f(x)$ memiliki garis singgung horizontal. Selanjutnya pada Gambar (b) ketika dalam teorema Rolle sifat keterdiferensial tidak terpenuhi, maka $f(x)$ masih memiliki nilai kritis dalam (a, b), tetapi tidak menghasilkan suatu garis singgung horizontal. Teorema Rolle dapat digunakan untuk membuktikan teorema yaitu teorema nilai rata-rata.

Contoh soal

Diketahui fungsi $f(x) = x^4 - 2x^2$. Tentukan nilai c dalam interval $(-2,2)$ sedemikian sehingga $f'(0) = 0$.

Pembahasan

Fungsi $f(x)$ kontinu pada interval $[-2,2]$ dan dapat didiferensialkan pada interval $(-2,2)$ dan $f(-2) = f(2) = 8$. Berdasarkan sifat kekontinuan pada interval tertutup dan terdiferensial pada interval maka teorema Rolle dapat digunakan dan terjamin terdapat c dalam interval $(-2{,}2)$ sedemikian sehingga $f'(0) = 0$.

Jika $f(x) = x^4 - 2x^2 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 4x^3 - 4x$

Syarat stasioner:

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 4x^3 - 4x = 0$

$x^3 - x = 0 \quad \rightarrow \quad x(x^2 - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad x(x + 1)(x - 1) = 0$

$x = 0 \quad \text{atau} \quad x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1 \quad \text{atau} \quad x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1$

Nilai c dalam interval $(-2{,}2)$ sehingga $f'(0) = 0$ antara lain -1, 0, dan 1 atau dapat ditulis $c = \{-1{,}0{,}1\}$.

6.2.2 Teorema Nilai Rata-rata

Teorema nilai rata-rata atau dikenal dengan teorema nilai purata menyatakan bahwa pada sembarang bagian kurva mulus, terdapat paling tidak satu titik dimana turunan (gradien) kurva tersebut sama dengan atau sejajar terhadap rata-rata turunan dari bagian kurva tersebut. Adapun Teorema Nilai Rata-rata adalah sebagai berikut.

Misalkan f adalah fungsi yang memenuhi kondisi berikut.

a) f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$

b) f terdiferensialkan pada interval terbuka (a, b)

maka terdapat $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga

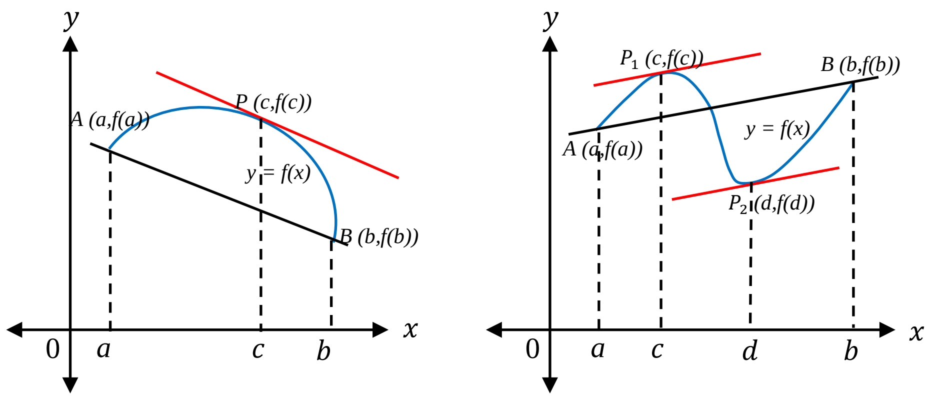
$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ yang ekivalen dengan $(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$

Teorema

Jika $f'(c) = 0, \forall x \in (a, b)$ maka f adalah fungsi konstan pada (a, b).

Akibat

Jika $f'(x) = g'(x), \forall x \in (a, b)$ maka $f - g$ adalah fungsi konstan pada (a, b). Oleh karena itu, $f(x) = g(x) + c$ dengan c adalah suatu konstanta.



Gambar 4. Ilustrasi Teorema Nilai Rata-rata

Untuk memperdalam pemahaman tentang teorema nilai rata-rata perhatikan Gambar 4 di atas. Pada grafik tersebut terlihat bahwa nilai rata-rata menunjukkan jaminan eksistensi garis singgung kurva yang sejajar dengan garis potong kurva yang melalui titik $A\big(a, f(a)\big)$ dan $B\big(b, f(b)\big)$.

Contoh soal

Diketahui fungsi $f(x) = 4 - \frac{3}{x}$, tentukan semua nilai c di dalam interval terbuka (1,4) sedemikian sehingga $f'(c) = \frac{f(4)-f(1)}{4-1}$

Pembahasan

Gradien garis potong yang melalui titik $\big(1, f(1)\big)$ dan $\big(4, f(4)\big)$ adalah

$$m = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{\frac{13}{4} - 1}{4 - 1} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Karena fungsi $f(x)$ kontinu pada interval [1,4] dan dapat didiferensialkan pada interval (1,4), maka berdasarkan teorema nilai rata-rata dijamin terdapat c di (1,4) sedemikian sehingga $f'(c) = \frac{3}{4}$. Oleh karena itu,

$f(x) = 4 - \frac{3}{x} \quad \to \quad f'(x) = \frac{3}{x^2}$

$\frac{3}{4} = \frac{3}{x^2} \quad \to \quad x^2 - 4 = 0$

$(x + 2)(x - 2) = 0$

$x + 2 = 0 \quad \to \quad x = -2 \quad$ atau $\quad x - 2 = 0 \quad \to \quad x = 2$

Sehingga doperoleh nilai $c = 2$ dalam interval (1,4).

6.2.3 Teorema Nilai Rata-rata Cauchy

Adapun teorema nilai rata-rata Cauchy adalah sebagai berikut. Misalkan f dan g kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ dan terdiferensialkan pada interval terbuka (a, b). Jika $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$, maka terdapat $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Contoh soal

Dengan menggunakan Teorema Nilai Rata-rata Cauchy, tunjukkan bahwa $1 - \frac{x^2}{2!} < \cos x$ untuk $x \neq 0$.

Pembahasan

$f(x) = 1 - \cos x$ dan $g(x) = \frac{x^2}{2!} = \frac{x^2}{2}$

$\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \frac{\sin c}{c} < 1$ untuk beberapa $c \in (0, x)$.

6.3 Dalil L'Hospital

Dalil L'Hospital merupakan suatu metode turunan yang berguna untuk menentukan nilai limit yang melibatkan bentuk tak tentu. Dalil L'Hospital digunakan untuk mengubah bentuk limit dari bentuk tak tentu menjadi bentuk tentu sehingga nilai limit dapat dengan mudah ditentukan. Untuk menghitung nilai limit fungsi bentuk tak tentu dapat digunakan turunan yang dikenal dengan dikenal sebagai Teorema L'Hopital. Adapun aturan L'Hospital adalah:

Misalkan f dan g didiferensialkan dan $g'(x) \neq 0$ pada interval terbuka I yang memuat a. Jika

$\lim_{x \to a} f(x) = 0$ atau $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

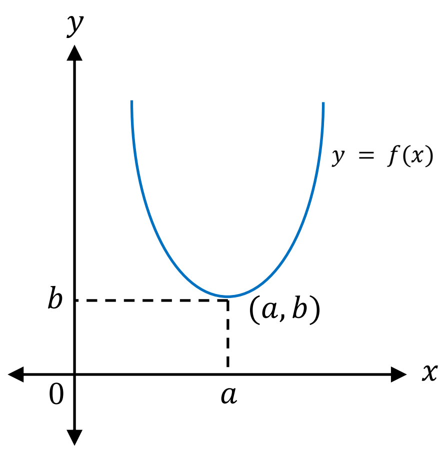
atau

$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ atau $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$

maka $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Dalam hal ini diasumsikan bahwa $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ada.

6.4 Fungsi Monoton

Suatu fungsi dikatakan monoton jika nilai fungsi tersebut semakin besar (fungsi naik terus) atau nilai fungsi semakin kecil (fungsi turun terus) pada suatu selang atau interval. Sebagai ilustrasi perhatikan Gambar 5.



Gambar 5. Ilustrasi grafik fungsi monoton

Berdasarkan Gambar 5 tersebut dapat dilihat bahwa nilai $y = f(x)$ turun untuk nilai sebelah kiri a dan naik untuk nilai sebelah kanan a. Adapun definisi dari fungsi monoton adalah:

Andaikan $f(x)$ terdefinisi pada selang I (terbuka, tertutup, atau tidak satupun), dikatakan bahwa:

a) $f(x)$ monoton naik pada interval I jika untuk setiap pasangan bilangan x_1 dan x_2 pada I,

$$x_1 < x_2 \quad \rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

b) $f(x)$ monoton turun pada interval I jika untuk setiap pasangan bilangan x_1 dan x_2 pada I,

$$x_1 < x_2 \quad \rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

c) $f(x)$ monoton murni pada interval I jika $f(x)$ naik pada I atau turun pada I.

Turunan pertama $f'(x)$ pada kemonotonan menghasilkan kemiringan dari suatu garis singgung. Jika $f'(x) > 0$ maka garis singgung naik ke kanan, sedangkan jika $f'(x) < 0$ maka garis singgung turun (jatuh) ke kanan. Teorema kemonotonan yaitu:

Andaikan $f(x)$ kontinu pada selang I dan dapat dideferensialkan pada setiap titik dalam I,

a) Jika $f'(x) > 0$ untuk semua x dari I, maka $f(x)$ naik pada I

b) Jika $f'(x) < 0$ untuk semua x dari I, maka $f(x)$ turun pada I

Contoh soal

Tentukan selang fungsi naik dan fungsi turun dari fungsi $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 2$.

Pembahasan

$f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 2 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2x$

Syarat stasioner:

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 4x^3 + 6x^2 + 2x = 0$$

$$2x^3 + 3x^2 + x = 0$$

$$x\left(x + \frac{1}{2}\right)(x + 1) = 0$$

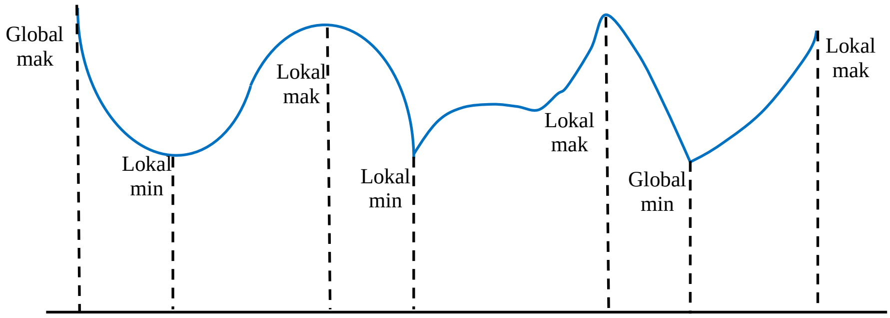
$$x = 0 \quad \text{atau} \quad x + \tfrac{1}{2} = 0 \rightarrow x = -\tfrac{1}{2} \quad \text{atau} \quad x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$$

Untuk $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2x > 0$, maka fungsi naik pada interval $-1 < x < -\frac{1}{2}$ atau $x > 0$ dan fungsi turun pada interval $x < -1$ atau $-\frac{1}{2} < x < 0$.

6.5 Uji Turunan Pertama dan Kedua

6.5.1 Uji Turunan Pertama

Perhatikan gambar 6.



Gambar 6. Ilustrasi grafik uji turunan pertama

Adapun definisi uji turunan pertama adalah sebagai berikut.

Misalkan S adalah domain dari fungsi f dan $c \in S$, maka:

a) $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal pada (a, b) jika $f(c)$ merupakan nilai maksimum pada $(a, b) \cap S$.

b) $f(c)$ adalah nilai minimum lokal pada (a, b) jika $f(c)$ merupakan nilai minimum pada $(a, b) \cap S$.

c) $f(c)$ adalah nilai ekstrim lokal pada f jika merupakan nilai maksimum lokal atau nilai minimum lokal.

Teorema uji turunan pertama adalah:

Misalkan f kontinu pada interval terbuka (a, b) dan $c \in (a, b)$ merupakan titik kritis.

a) Jika $f'(x) > 0, \forall x \in (a, c)$ dan $f'(x) < 0, \forall x \in (c, b)$, maka $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal dari f.

b) Jika $f'(x) < 0, \forall x \in (a, c)$ dan $f'(x) > 0, \forall x \in (c, b)$, maka $f(c)$ adalah nilai minimum lokal dari f.

c) Jika $f'(x)$ memiliki tanda yang sama (sama-sama positif atau sama-sama negative) untuk kedua sisi c, maka $f(c)$ bukan nilai ekstrim dari f.

6.5.2 Uji Turunan Kedua

Adapun definisi uji turunan kedua adalah sebagai berikut:
Misalkan f' dan f'' ada di setiap titik dalam interval terbuka (a, b) yang memuat c, misalkan $f'(c) = 0$ maka

a) Jika $f''(c) < 0$, maka $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal dari f.

b) Jika $f''(c) > 0$, maka $f(c)$ adalah nilai minimum lokal dari f.

6.6 Fungsi Cekung

Suatu fungsi dikatakan cekung ke atas jika turunan pertama dari fungsi tersebut naik, sedangkan cekung ke bawah jika turunan pertama dari fungsi tersebut turun pada suatu interval terbuka $I = (a, b)$. Secara matematika kecekungan didefinisikan, andaikan $f(x)$ terdiferensial dua kali pada interval terbuka $I = (a, b)$, maka

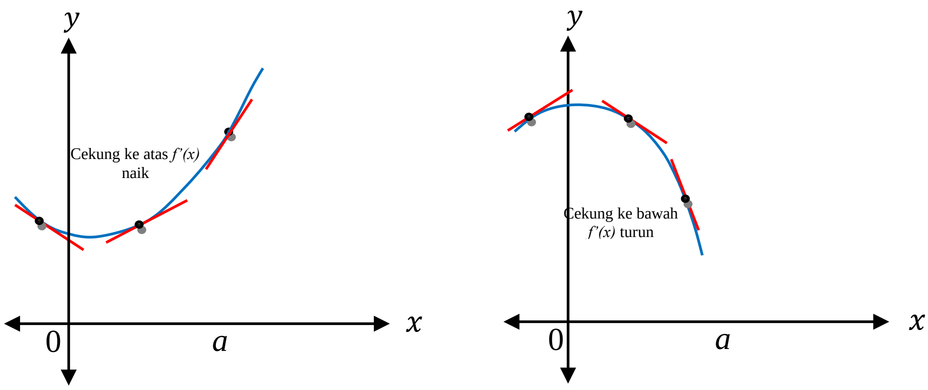
a) Fungsi $f(x)$ dikatakan cekung ke atas pada selang I, jika $f'(x)$ monoton naik pada selang I

b) Fungsi $f(x)$ dikatakan cekung ke bawah pada selang I, jika $f'(x)$ monoton turun pada selang I.

Adapun teorema kecekungan adalah sebagai berikut:
Andaikan $f(x)$ terdiferensial dua kali pada interval terbuka $I = (a, b)$,

a) Jika $f''(x) > 0$ untuk semua x dari $I = (a, b)$, maka $f(x)$ cekung ke atas pada $I = (a, b)$.

b) Jika $f''(x) < 0$ untuk semua x dari $I = (a, b)$, maka $f(x)$ cekung ke bawah pada $I = (a, b)$.



Gambar 7. Grafik Fungsi Cekung

Contoh soal

Tentukan selang kecekungan dari fungsi $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$.

Pembahasan

$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} \quad \rightarrow \quad f''(x) = \frac{4}{(x+1)^3}$

Cekung ke atas jika $f''(x) > 0$ atau $\frac{4}{(x+1)^3} > 0$, yaitu pada selang $x > -1$ dan

Cekung ke bawah jika $f''(x) < 0$ atau $\frac{4}{(x+1)^3} < 0$, yaitu pada selang $x < -1$.

6.7 Titik Belok

Titik belok adalah titik pada kurva dimana kurva berubah tanda dari positif menjadi negative atau sebaliknya dari negatif menjadi positif.

Contoh soal

Tentukan semua titik balik dari fungsi $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + 1$!

Pembahasan

$f(x) = x^{\frac{1}{3}} + 1 \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \rightarrow \quad f''(x) = -\frac{2}{9x^{\frac{5}{3}}}$ dengan syarat $x \neq 0$

Oleh karena itu diperoleh bahwa $f''(x) > 0$ untuk $x > 0$ dan $f''(x) < 0$ untuk $x < 0$. Dengan mensubtitusikan $x = 0$ ke dalam $f(x)$ maka diperoleh $f(0) = 1$. Jadi titik belok fungsi $f(x)$ adalah $(0,1)$.

6.8 Menggambar Grafik Fungsi dengan Memanfaatkan Turunan

Aplikasi dari turunan dapat diterapkan untuk menggambar grafik dari suatu fungsi. Adapun Langkah-langkah menggambar grafik fungsi dengan memanfaatkan turunan adalah sebagai berikut.

a) Menentukan titik potong dengan sumbu-sumbu koordinat baik dengan sumbu-x maupun sumbu-y.

   Titik potong sumbu-x, maka nilai $y = 0$

   Titik potong sumbu-y, maka nilai $x = 0$

b) Menentukan titik-titik stasioner dan jenis-jenis titik stasionernya (titik balik maksimum, titik balik minimum, dan titik balik (titik belok).

c) Menentukan titik bantu lain untuk mempermudah menggambar grafik.

Contoh soal

Gambarkan grafik fungsi dengan memanfaatkan turunan $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Pembahasan

a) Menentukan titik potong dengan dengan sumbu-x maupun sumbu-y.

Titik potong sumbu-x, maka nilai $y = 0$, sehingga

$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad (x+1)(x-3) = 0$

$x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1 \quad \text{atau} \quad x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 3$

Jadi titik potong grafik terhadap sumbu-x adalah $(-1{,}0)$ dan $(3{,}0)$.

Titik potong sumbu-y, maka nilai $x = 0$, sehingga

$f(x) = y = (0)^2 - 2(0) - 3 = -3$

Jadi titik potong grafik terhadap sumbu-y adalah $(0, -3)$.

b) Menentukan titik-titik stasioner dan jenis-jenis titik stasionernya

$f(x) = x^2 - 2x - 3 \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2x - 2$

Syarat stasioner:

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2x - 2 = 0$

$x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1$

Nilai stasioner: 1, kemudian subtitusi ke fungsi awal untuk menentukan titik stasionernya

$$f(1) = (1)^2 - 2(1) - 3 = -4$$

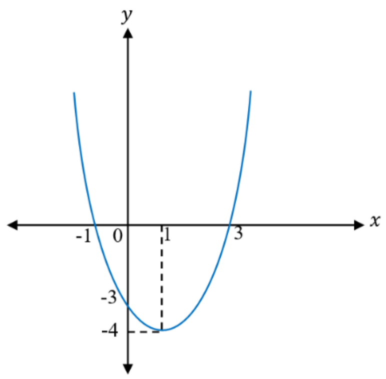
Jadi titik stasionernya $(1, -4)$.

c) Menentukan jenis titik stasionernya

$f'(x) = 2x - 2 \quad \rightarrow \quad f''(x) = 2 \quad \rightarrow \quad f''(1) = 2$, (positif) artinya memiliki nilai minimum.

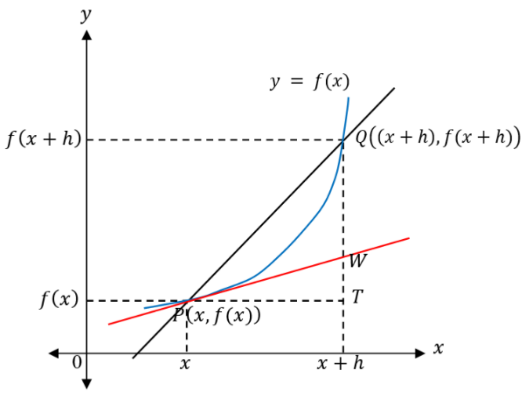
d) Menentukan titik bantu lain untuk mempermudah menggambar grafik.

Untuk nilai x semakin besar $(x > 1)$, nilai y semakin besar positif (ke atas) dan untuk x semakin kecil, $(x < 1)$, maka nilai y semakin besar positif (ke atas).



6.8 Aplikasi Turunan Fungsi Terkait Garis Singgung

Garis singgung kurva adalah suatu garis yang hanya mempunyai satu titik (titik singgung) dengan kurva. Untuk menentukan garis singgung terlebih dahulu ditentukan nilai kemiringan (gradien) dengan cara menggunakan pendekatan dengan garis lain (garis secan) yang gradiennya dapat ditentukan secara langsung. Untuk menambah pemahaman terkait nilai gradien perhatikan Gambar 8 berikut.



Gambar 8. Ilustrasi grafik terkait gradien

Titik $P(x, y)$ adalah sembarang titik pada kurva $y = f(x)$, sehingga koordinat titip P dapat ditulis dalam bentuk $\left(x, f(x)\right)$. Absis titik Q adalah $(x + h)$ sehingga koordinat titik Q dapat ditulis dalam bentuk $\left((x + h), f(x + h)\right)$. Jika $h \to 0$, maka W menjadi garis singgung pada kurva di titik P yaitu garis PW. Oleh karena itu, gradien garis singgung pada kurva di titik P adalah m dengan:

$$
\begin{aligned}
m &= \tan QPT \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \\
&= f'(x)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan hasil tersebut dapat diartikan bahwa gradien garis singgung di suatu titik $A\left(a, f(a)\right)$ adalah $m = f'(a)$.

Adapun Langkah-langkah menentukan gradien di titik $A\left(a, f(a)\right)$ pada kurva $y = f(x)$ adalah sebagai berikut.

a) Menentukan turunan pertama dari fungsi yang diketahui $f'(x)$

b) Subtitusikan nilai $x = a$ ke dalam fungsi yang diketahui atau $\left(a, f(a)\right)$

c) Tentukan gradiennya m dimana $m = f'(a)$.

Contoh soal

Tentukan gradien dari fungsi berikut di titik (1,2).

a) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + x + 2$

b) $f(x) = (2x+1)^2$

Pembahasan

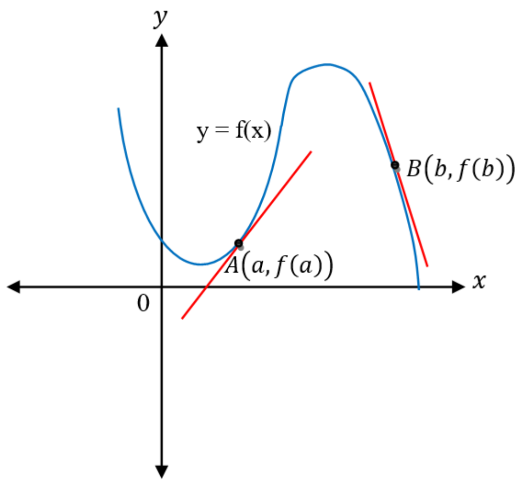
a) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + x + 2 \quad \rightarrow \quad m = f'(x) = 9x^2 - 8x + 1$

$m = f'(1) = 9(1)^2 - 8(1) + 1 = 2$

b) $f(x) = (2x+1)^2 \quad \rightarrow \quad m = f'(x) = 4(2x+1)$

$m = f'(1) = 4(2(1)+1) = 12$

Setelah memahami terkait bagaimana menentukan gradien daris suatu garis, berikutnya akan dipelajari mengenai bagaimana cara menentukan persamaan garis singgung. Untuk mempermudah memahami persamaan garis singgung perhatikan Gambar 9.



Gambar 9. Grafik terkait garis singgung

Berdasarkan Gambar 9 tersebut dapat diperhatikan beberapa garis singgung (garis berwarna merah) yang terdapat pada kurva $y = f(x)$. Titik singgung kurva $y = f(x)$ dengan garis singgung adalah masing-masing adalah $A\big(a, f(a)\big)$ dan $B\big(b, f(b)\big)$.

Secara umum persamaan garis singgung di titik $A\big(a, f(a)\big)$ pada kurva $y = f(x)$ dapat ditentukan dengan rumus:

$$y - f(a) = m(x - a)$$

dengan $m = f'(a)$. Hal ini juga berlaku untuk menentukan persamaan garis singgung di titik $B\big(b, f(b)\big)$ pada kurva $y = f(x)$ dimana persamaan garis singgungnya:

$$y - f(b) = m(x - b)$$

dengan $m = f'(b)$.

Contoh soal

Tentukan persamaan gari singgung dari fungsi $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 2$ di titik yang berabsis 1.

Pembahasan

a) Untuk menyelesaikan soal tersebut Langkah pertama yang dilakukan adalah menentukan nilai ordinat dengan cara mensubtitusikan nilai absis ke dalam fungsi yang diketahui.

$f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 2$

$y = f(x) = (1)^3 + 4(1)^2 - 2(1) - 2 = 1$

Jadi koordinat titik singgungnya adalah $(x_1, y_1) = (1,1)$.

b) Selanjutnya tentukan gradien garis singgung dengan cara menentukan turunan pertama dari fungsi yang diketahui.

$f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 2 \quad \rightarrow \quad m = f'(x) = 3x^2 + 8x + 1$

$m = f'(1) = 3(1)^2 + 8(1) + 1 = 12$

Maka persamaan garis singgungnya adalah:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = 12(x - 1)$

$y - 1 = 12x - 12$

$y = 12x - 11.$

BAB 7
INTEGRAL *RIEMANN*

INDIKATOR KOMPETENSI

Setelah mempelajari materi dalam BAB 7 ini, mahasiswa mampu:
- Memahami dan Menjelaskan Konsep Notasi Sigma dan Sifat-sifatnya
- Memahami dan Menjelaskan Konsep Jumlah Riemann
- Memahami dan Menjelaskan Konsep Integral Riemann

7.1 Notasi Sigma dan Sifat-sifatnya

7.1.1 Notasi Sigma

Dengan menggunakan huruf Yunani Σ (sigma kapital) untuk menyatakan "penjumlahan", kita dapat menuliskan jumlah n sembarang bilangan:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

kita baca "penjumlahan x_i, i dari 1 sampai n". Bilangan 1 dan n masing-masing disebut *batas bawah* dan *batas atas penjumlahan*. Sehingga:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$$

Contoh soal

Misalkan dari sebuah percobaan yang mengamati turunya bobot badan selama periode 6 bulan. Data yang tercatat adalah 15, 10, 18, dan 6 kilogram. Jika nilai pertama kita lambangkan dengan x_1 yang kedua x_2, dan demikian seterusnya, maka kita dapat menuliskan $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, $x_3 = 18$, dan $x_4 = 6$, kita dapat menuliskan jumlah empat perubahan bobot tersebut sebagai:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad \sum_{i=1}^{4} x_i = 15 + 10 + 18 + 6$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 49$$

Batas bawah penjumlahan tidak harus dimulai dari angka 1 dan begitu pula batas atas penjumlahan tidak harus sampai angka terbesar (n). Sebagai contoh:

$$\sum_{i=2}^{3} x_i = x_2 + x_3 = 10 + 18 = 28$$

Subscrip i pada batas bawah penjumlahan dapat pula digantikan dengan huruf lain asalkan konsisten dalam hal penggunaannya. Sebagai contoh

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \text{ atau } \sum_{k=1}^{n} x_k \text{ atau } \sum_{l=1}^{n} x_l$$

Batas bawah penjumlahan tidak harus berupa subskrip. Misalnya, jumlah sembilan bilangan asli pertama dapat dituliskan sebagai:

$$\sum_{x=1}^{9} x = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

Jika *batas bawah* dan *batas atas* penjumlahan tidak dituliskan, hal tersebut berarti menjumlah seluruh bilangan. Sehingga:

7.1.2 Sifat – sifat Notasi Sigma

a) $\sum_{k=1}^{n} c$ = nc dengan c konstanta, Bentuk lebih umumnya:

$$\sum_{k=m}^{n} c = (n - m + 1)c$$

b) $\sum_{k=m}^{n} ca_k$ = c$\sum_{k=m}^{n} a_k$

c) $\sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k)$ = $\sum_{k=m}^{n} a_k$+ $\sum_{k=m}^{n} b_k$

d) $\sum_{k=m}^{n}(a_k - b_k)$ = $\sum_{k=m}^{n} a_k$- $\sum_{k=m}^{n} b_k$

e) $\sum_{k=n}^{n} a_k$ = 0

f) $\sum_{k=m}^{n} a_k$ = $\sum_{k=m}^{p-1} a_k$+ $\sum_{k=p}^{n} a_k$

g) $\sum_{k=m}^{n} a_k$ = $\sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p}$ = $\sum_{k=m-p}^{n-p} a_{k+p}$ dengan $m < p < n$

Beberapa Rumus Notasi Sigma

a) $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$

b) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$

c) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n + 1)\right)^2$

Contoh soal

Tentukan hasil dari $\sum_{\mathrm{k}=1001}^{1005}(5\mathrm{k} + 3) = \cdots$

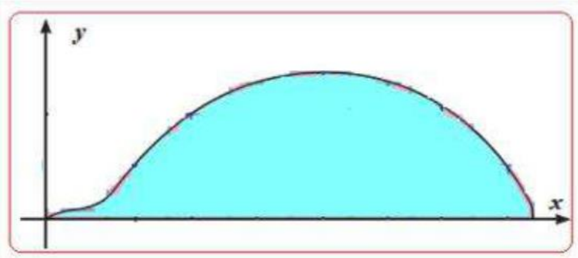
Pembahasan

Berdasarkan Sifat 7:$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m-p}^{n-p} a_{k+p}$

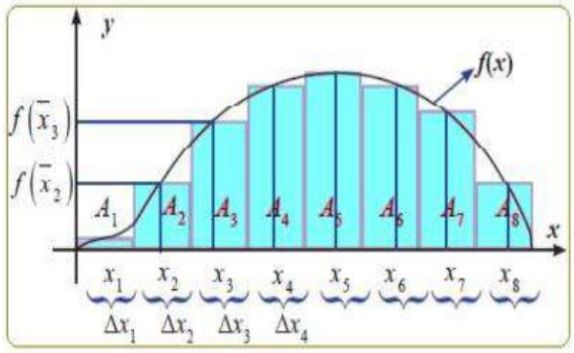
$$\sum_{k=1001}^{1005}(5k+3) = \sum_{k=1001-1000}^{1005-1000}(5(k+1000)+3)$$
$$= \sum_{k=1}^{5}(5k+5003)$$
$$= (5008+5013+5018+5023+5028)$$
$$= 25090$$

7.2 Jumlah Riemann

Riemann adalah seorang ilmuan berkebangsaan Jerman yang memperkenalkan Jumlah Riemann atau Integral Riemann. Jumlah Riemann pada integral yang terkait langsung dengan luasan suatu daerah dan bentuk integral tertentu. Perhatikan Gambar di bawah kemudian hitung luas daerahnya.



Untuk menghitung luas daerah bidang di atas, maka Riemann melakukan pendekatan dengan membagi daerah arsiran tersebut menjadi beberapa persegi panjang, lalu semua luas persegi panjang tersebut dijumlahkan



Dengan notasi sigma, jumlah seluruh persegi panjangnya dapat dihitung:

a) Luas Persegi Panjang 1 (A_1) dengan Panjang Δx_1 dan lebar $f(x_1)$

$$A_1 = pl = f(x_1)\Delta x_1$$

b) Luas Persegi Panjang 2 (A_2) dengan Panjang Δx_2 dan lebar $f(x_2)$

$$A_2 = pl = f(x_2)\Delta x_2$$

c) Luas Persegi Panjang 3 (A_3) dengan Panjang Δx_3 dan lebar $f(x_3)$

$$A_3 = pl = f(x_3)\Delta x_3$$

dan seterusnya, sehingga:

d) Luas total persegi Panjang adalah:

$$A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_8 = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + f(x_3)\Delta x_3 + \cdots + f(x_8)\Delta x_8$$
$$= \textstyle\sum_{i=1}^{8} f(x_i)\Delta x_i$$

Nilai dari $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ disebut jumlah Riemann $f(x)$ dengan x_i adalah titik wakil pada interval ke-i dan Δx_i lebar interval ke-i dan n banyak subinterval (banyaknya persegi panjang yang terbentuk) dari $[a, b]$. Titik wakil x_i dapat ditentukan dengan 3 cara yaitu

a) itik ujung kiri subinterval

b) Titik tengah subinterval

c) Titik ujung kanan subinterval

dimana setiap jenis titik wakil memberikan hasil yang berbeda.

Contoh soal

Misalkan diketahui suatu fungsi $f(x) = x$ pada interval [0,3], tentukan jumlah Riemann dengan menggunakan 6 subinterval sama panjang dan titik wakilnya adalah titik ujung kanan subinterval.

Pembahasan

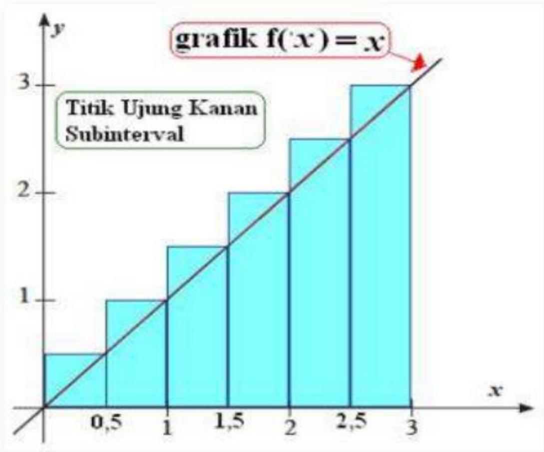
Ambil titik Ujung Kanan Subinterval

a) Menentukan Panjang subinterval (Δx)

Panjang interval [0,3] dibagi menjadi 6 subinterval sama panjang sehingga:

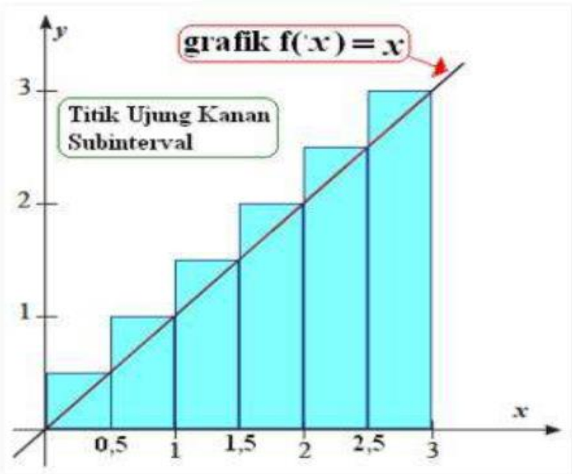
$$\Delta x = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

b) Menggambar grafik jumlah Riemann fungsi $f(x) = x$ Untuk dapat menetukan jumlah Riemann fungsi $f(x) = x$ dengan 6 subinterval pada selang [0,3] perhatikan grafik $f(x) = x$ pada selang [0,3] dan titik ujung kanan subinterval di bawah.



c) Menentukan titik wakil (x_i)

Karena yang diminta adalah titik ujung kanan subinterval, maka nilai x_i yang digunakan adalah sebelah kanan setiap subintervalnya.



d) Menentukan lebar (tinggi) masing-masing subinterval fungsi $f(x) = x$

Subinterval 1 : 0 – 0,5 dengan $x_1 = 0{,}5 \rightarrow f(0{,}5) = 0{,}5$

Subinterval 2 : 0,5 – 1 dengan $x_2 = 1 \rightarrow f(1) = 1$

Subinterval 3 : 1 – 1,5 dengan $x_3 = 1{,}5 \rightarrow f(1{,}5) = 1{,}5$

Subinterval 4 : 1,5 – 2 dengan $x_4 = 2 \rightarrow f(2) = 2$

Subinterval 5 : 2 – 2,5 dengan $x_5 = 2{,}5 \rightarrow f(2{,}5) = 2{,}5$

Subinterval 6 : 2,5 – 3 dengan $x_6 = 3 \rightarrow f(3) = 3$

e) Menentukan Jumlah Riemann

$$Jumlah\ Riemann = \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\,\Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + f(x_4)\Delta x + f(x_5)\Delta x + f(x_6)\Delta x$$
$$= (0{,}5)(0{,}5) + (1)(0{,}5) + (1{,}5)(0{,}5) + (2)(0{,}5) + (2{,}5)(0{,}5) + (3)(0{,}5)$$
$$= 5{,}25$$

7.3 Integral Riemann

Integral Riemann adalah limit dari jumlah Riemann dari suatu fungsi ketika partisi menjadi halus. Apabila limitnya ada, maka fungsi tersebut dikatakan terintegrasi (atau lebih spesifik terintegrasi-Riemann). Jumlah Riemann dapat dibuat sedekat yang diinginkan dengan integral Riemann dengan membuat partisi halus.

Suatu fungsi f dikatakan integral Riemann pada selang $[a, b]$ jika:

$$\int_{\bar{a}}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx$$

Dengan

- $\int_{\bar{a}}^{b} f(x)dx$ adalah integral Riemann bawah fungsi f pada selang $[a, b]$ atau dapat ditulis $\underset{P\epsilon p[a,b]}{sup} L(P, f)$
- $\int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx$ adalah integral Riemann atas fungsi f pada selang $[a, b]$ atau dapat ditulis $\underset{P\epsilon p[a,b]}{inf} L(P, f)$

Dalam hal fungsi f terintegral Riemann pada selang $[a, b]$, integral Riemann atas yang sama dengan integral Riemann bawah dinamakan integral Riemann fungsi f pada selang $[a, b]$, dan dinyatakan dengan notasi:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \quad atau \quad \int_{a}^{b} f$$

Contoh soal (KNMIPA 2018)

Nilai dari

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 \frac{2x^n}{x + x^{2n+1}} dx$$

adalah…

Pembahasan

Perhatikan bahwa untuk tiap n∈N, berlaku bahwa

$$n\int_0^1 \frac{2x^n}{x+x^{2n+1}}dx = 2\int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x^{2n}}dx$$

Kemudian, dengan pemisalan variabel $u = x^n$, maka $du = nx^{n-1}dx$ dan

$$\begin{aligned} n\int_0^1 \frac{2x^n}{x+x^{2n+1}}dx &= 2\int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x^{2n}}dx \\ &= 2\int_0^1 \frac{du}{1+u^2} \\ &= \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Jadi,

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 \frac{2x^n}{x+x^{2n+1}}dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

BAB 8
TOPOLOGI R

INDIKATOR KOMPETENSI

Setelah mempelajari materi dalam BAB 7 ini, mahasiswa mampu:
- ❖ Memahami dan Menjelaskan Konsep Ruang Metrik
- ❖ Memahami dan Menjelaskan Konsep Bola Terbuka dan Kedudukan Titik
- ❖ Memahami dan Menjelaskan Konsep Liput Terbuka
- ❖ Memahami dan Menjelaskan Konsep Himpunan Kompak
- ❖ Memahami dan Menjelaskan Konsep Deret Taylor dan McLaurin

8.1 Ruang Metrik

Diberikan himpunan tak kosong X. Fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut metrik pada X jika memenuhi aksioma berikut:

a) $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$

b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

c) $d(x, y) = d(y, x)$ untuk setiap $x, y \in X$

d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ untuk setiap $x, y, z \in X$

X yang dilengkapi dnegan metrik d disebut metrik dan ditulis dengan (X, d) atau cukup ditulis X apabila tidak menimbulkan kerancuan tentang metrik d yang digunakan pada X. Anggota ruang metrik disebut titik. Sebagai contoh:

Diberikan $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $d(x, y) = |x - y|$. Fungsi d metrik pada $\mathbb{R}$ sebab

a) $d(x, y) = |x - y| \geq 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

b) $d(x, y) = |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

c) $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$

d) $d(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y|$

$\qquad = d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

d di sini dinamakan metrik biasa dan $(\mathbb{R}, d)$ disebut ruang metrik biasa.

8.2 Bola Terbuka dan Kedudukan Titik

Konsep fundamental tentang topologi pada ruang metrik adalah bola terbuka. Diberikan ruang metrik (X,d), $a \in X$, dan $r > 0$. Himpunan $B_d(a,r) = \{x \in X : d(a,x) < r\}$ disebut bola terbuka dengan pusat a dan jari-jari r(sering disebut dengan persekitaran a dan jari-jari r). Untuk menyingkat penulisan $B_d(a,r)$ cukup ditulis $B(a,r)$ asal tidak menimbulkan kerancuan tentang metrik yang digunakan untuk membentuk bola tersebut. Sebagai contoh:

Bola terbuka di ruang metrik biasa $\mathbb{R}$ tidak lain adalah interval terbuka

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}: |x-a| < r\} = \{x \in \mathbb{R}: -r < x-a < r\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}: a-r < x < r+a\}$$

Definisi I

Diberikan ruang metrik (X,d) dan $A \subseteq X$. Titik $x \in X$ disebut titik interior (titik dalam) himpunan A jika terdapat $r > 0$ sehingga $B(x,r) \subseteq A$. Himpunan semua titik interior A disebut interior A dan ditulis $Int(A) = A^o$. Sebagai contoh:

Diberikan $\mathbb{R}$ ruang metrik biasa dan $A \coloneqq (1,3] \cup \{4\}$. Interitor A adalah $A^o = (1,3)$.

Definisi II

Diberikan ruang metrik (X,d) himpunan $A \subseteq X$ dikatakan terbuka jika untuk setiap $a \in A$ terdapat $r > 0$ sehingga $B(a,r) \subseteq A$. Sebagai contoh:

Diberikan $\mathbb{R}$ ruang metrik biasa dan $A \coloneqq (1,3] \cup \{4\}$. Himpunan A tidak terbuka karena persekitaran 3 tidak masuk A atau $B(3,r) \nsubseteq A$ (tidak ada $r > 0$ yang memenuhi).

Definisi III

Titik $x \in X$ disebut titik klosur himpunan A apabila untuk setiap $r > 0$ berlaku $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. Himpunan semua titik klosur A disebut klosur A dan ditulis $\bar{A}$ atau $Cl(A)$. Sebagai contoh:

Diberikan $\mathbb{R}$ ruang metrik biasa dan $A \coloneqq (1,3] \cup \{4\}$. Selanjutnya didapat $\forall r > 0$, berlaku $4 \in B(4,r) \cap A$ atau titik 4 adalah titik klosur A. Kemudian juga didapat bahwa $\bar{A} = [0,3] \cup \{4\}$

Definisi IV

Titik $x \in X$ disebut titik limit himpunan A apabila untuk setiap $r > 0$ berlaku $B(x,r) \cap A - \{x\} \neq \emptyset$. Himpuan semua titik limit A ditulis A'. Titik $x \in A$ yang bukan titik limit A disebut titik terasing A atau x titik terasing A jika terdapay $r > 0$ sehingga berlaku $B(x,r) \cap A - \{x\} = \emptyset$.

Dalam bahasa metrik (X,d) ruang metrik $A \subseteq X, x \in X$.

a) Titik klosur: $x \in \bar{A}$ jika $\forall r > 0$ terdapat $y \in A$ sehingga $d(x,y) < r$

b) Titik limit: $x \in A'$ jika $\forall r > 0$ terdapat $y \in A$ dengan $y \neq x$ sehingga $d(y,x) < r$

Contoh soal

$x = 4 \rightarrow B\left(4,\frac{1}{2}\right) \cap A = \{4\} \rightarrow$klosur. Ada $r = \frac{1}{2} > 0$ sehingga $B\left(4,\frac{1}{2}\right) \cap A - \{4\} = \{4\} - \{4\} = \emptyset$. Jadi, 4 bukan titik limit A. Sedangkan $A' = [0,3]$. Jadi, 4 titik terasing A.

Definisi V

Diberikan ruang metrik (X,d). Himpunan $A \subseteq X$ dikatakan tertutup jika $\bar{A} = A$. Contoh: Di dalam ruang metrik biasa $\mathbb{R}$ himpunan $A = [2,6] \cup \{0\}$ adalah himpunan tertutup. Selanjutnya, himpunan kompak di sini akan didefinisikan dengan liput terbuka.

8.3 Definisi Liput Terbuka

Diberikan himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$. Liput terbuka dari A adalah koleksi $\mathcal{G} = \{G_\alpha : G_\alpha \; terbuka \; di \; \mathbb{R} \;\; dan \; \alpha \in I\}$ sehingga $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$.

Jika $\mathcal{G}'$ subkoleksi dari $\mathcal{G}$ sehingga sehingga gabungan dari himpunan-himpunan di $\mathcal{G}'$ juga memuat A, maka $\mathcal{G}'$ disebut liput bagian dari $\mathcal{G}$. Lebih lanjut, jika anggota himpunan-himpunan dari $\mathcal{G}'$ berhingga maa $\mathcal{G}'$ disebut liput bagian berhingga.

8.4 Definisi Himpunan Kompak

Himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ dikatakan kompak jika untuk setiap liput terbuka dari mempunyai liput bagian berhingga yang berhingga. Dengan kata lain, untuk setiap liput terbuka $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha \in I\}$ dari A terdapat $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sehingga $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{k} G_{\alpha_n}$.

Contoh Soal KNMIPA

Diketahui fungsi f terintegral pada [a,b],dengan fungsi Primitif $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Jika $E = \{x \in [a, b]: F'(x) \neq f(x)\}$, maka *closure* dari $[a, b] - E$ sama dengan …

Pembahasan

Karena f terintegral pada [a,b], maka berdasarkan kriteria Lebesgue, f kontinu pada hampir semua pada [a,b]. Dengan kata lain,$\{x \in [a, b]: f\ \textit{tidak kontinu di}\ x\}$ adalah himpunan Null. Selain itu, berdasarkan teorema Dasar Kalkulus, yaitu jika f kontinu di x, maka $F'(x) = f(x)$. Dari sini,

$\{x \in [a, b]: f\ \textit{kontinu di}\ x\} \subseteq \{x \in [a, b]: F'(x) = f(x)\} = [a, b] - E$.

Oleh karena itu,

$$E = \{x \in [a, b]: F'(x) \neq f(x)\} \subseteq \{x \in [a, b]: f \text{ tidak kontinu di } x\}$$

Karena $\{ x \in [a, b]: f\ \textit{tidak kontinu di}\ x\}$ adalah himpunan Null, maka E juga merupakan himpunan Null. Sehingga, $[a, b] - E$ padat di $[a, b]$ yang berakibat bahwa closure dari $[a, b] - E$ adalah $[a, b]$. Jadi, closure dari $[a, b] - E$ adalah $[a, b]$

Contoh Soal KNMIPA

Diketahui fungsi $f: [-5,4] \to \mathbb{R}$ kontinu. Jika

$$E = \{x \in [-5,4]: f(x) = x\}$$

Maka klosur E adalah…

Pembahasan

Dalam bidang analisis himpunan tersebut dikenal sebagai himpunan titik tetap (*fixed point*), lebih tepatnya himpunan titik tetap f pada $[-5,4]$. Himpunan tersebut merupakan himpunan tertutup yang berakibat bahwa klosur dari E adalah himpuna E itu sendiri. Akan dibuktikna klaim tersebut yaitu E adalah himpunan tutup.

Kita asumsikan bahwa fungsi tersebut adalah fungsi kontinu pada domainnya. Jika $E = \emptyset$, maka E adalah himpunan tutup. Misalkan E bukan himpunan kosong, maka dapat dibuat barisan (a_k) di E yang konvergen. Maka titik konvergen a juga berada di $[-5,4]$. Berdasarkan hubungan kekontinuan dan kekonvergenan barisan, maka haruslah $f(a_k) \to f(a)$ untuk $k \to \infty$. Karena (a_n) di E, maka $f(a_k) = a_k$. Oleh karena itu,

$$\lim_{k\to\infty} f(a_k) = f(a)$$

$$\lim_{k\to\infty} a_k = f(a)$$

$$a = f(a)$$

Sehingga, $a \in E$. Oleh karena itu, sebarang barisan yang konvergen di E konvergen ke suatu titik di E itu sendiri. Akibatnya, E merupakan himpunan tutup yang juga mengimplikasikan bahwa klosur dari E adalah itu sendiri. Jadi, klosur dari E adalah E.

Soal KNMIPA

Diketahui fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinu dan $A \subseteq \mathbb{R}$. Hubungan $f(\bar{A})$ dan $\overline{f(A)}$ adalah … (Catatan $\bar{A} = closure\ (A)$).

Soal KNMIPA

Jika fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinu dan $A = \{x \in \mathbb{R}: f^2(x) \leq 1\}$, maka klosur dari A yaitun $\bar{A} = \cdots$

Soal ONMIPA 2009

Diketahui fungsi $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinu. Untuk sebarang himpunan $S \subseteq \mathbb{R}$, $\bar{S}$ menyatakan $closure$ dari S, yaitu irisan dari semua himpunan tertutup yang memuat S. Jika $S = \{x \in \mathbb{R}: f(x) \geq g(x)\}$, maka $S = \cdots$

Soal KNMIPA

Diberikan ruang metrik $(\mathbb{R}^2, d)$ dengan $d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \forall x = (x_1, x_2), y \coloneqq (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Tunjukkan bahwa $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 \geq 1, x_2 > 0, x_1 + x_2 < 5\}$ tidak terbuka.

8.5 Deret Taylor dan McLaurin

8.5.1 Deret Taylor

Andaikan f, $f', f'', f''', \ldots$ kontinu dalam $[a, b]$ dan $x_0 \in [a, b]$, maka nilai-nilai x disekitar x_0 dapat diekspansi (diperluas) ke dalam deret Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{h}{1!}f'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \cdots + \frac{h^m}{m!}f^m(x_0)$$

dimana

$$h = (x - x_0)$$

8.5.2 Deret McLaurin

Adalah kasus khusus dari Deret Taylor, jika nilai $x_0 = 0$ (pendekatan disekitar titik $x_0 = 0$) :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots + \frac{x^m}{m!}f^m(0)$$

Perbedaan Deret Taylor dan McLaurin adalah jika deret taylor nilai x_0 nya bisa berubah ubah, sedangkan deret mclaurin nilai $x_0 = 0$.

DAFTAR PUSTAKA

Bak, Joseph. 2007. *Complex Analysis*. New York: Springer

Bartle, Robert G. 2000. *Introduction to Real Analysis*. Ypsilanti: Eastern Michigan University

G S N Murti dan K P R Sasty. 2012. *Mathematics for JEE (Main and Advanced) Calculus*. Wiley India Pvt. Ltd, Volume 3. Andhra University

Nuharini, Dewi. 2008. *Matematika Konsep dan Aplikasinya 2* . Jakarta : Erlangga

Soedyarto, Nugroho. 2008. *Matematika untuk SMA dan MA Kelas XI Program IPA*. Jakarta: Erlangga

Wibisono, Samuel. 2008. *Matematika Diskrit Jilid 2*. Jakarta: Graha Ilmu