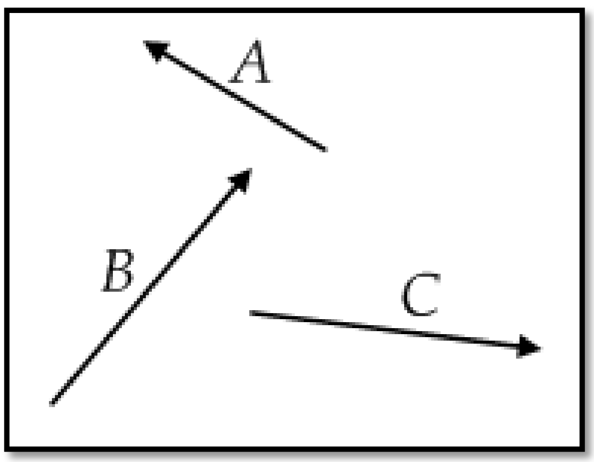
A. Vektor Bidang dengan Pendekatan Geometri

Modul ini membahas geometri bidang yang meliputi vektor pada bidang dengan pendekatan secara geometri. Banyak besaran yang dijumpai dalam ilmu pengetahuan misalnya panjang, *massa*, *volume*, dan muatan listrik. Besaran-besaran tersebut dinyatakan dalam satu bilangan yang dinamakan besaran skalar. Ada besaran lain seperti kecepatan, gaya, torka (*torque*) dan pergeserannya, serta untuk menggambarkannya memerlukan tidak hanya bilangan tetapi juga arah. Besaran yang demikian dinamakan vektor. Vektor digambarkan sebagai anak panah (Gambar 1). Panjang panah adalah besarnya vektor, dan arah panah adalah arah vektor. Anak panah mempunyai pangkal dan ujung. Dua vektor dikatakan sama apabila keduanya sama besarnya dan arahnya juga sama.



Gambar 1. Representasi vektor

Peserta Praktikum wajib untuk mempersiapkan Alat dan Bahan di setiap Contoh Soal yang diberikan, yakni:

1. Laptop yang telah ter-*install* aplikasi MatlabR2011a!
2. Menuliskan "*Coding*" seperti terlihat pada Gambar yang tersedia ke dalam menu "*New-Script*"!
3. Lakukan "*Debug*" atau "*Run*"!
4. "*Screenshot*" atau "*Capture*" hasilnya yang muncul pada menu "*Figure*"!

Contoh Soal 1.1: Vektor-vektor yang direpresentasikan dalam bentuk persamaan (1.1) dan (1.2) adalah sebagai berikut,

$$u = (1,2) \tag{1.1}$$

$$v = (-2,2) \tag{1.2}$$

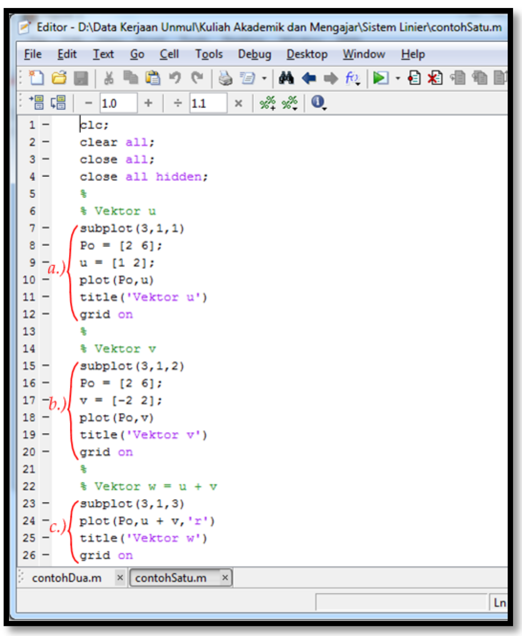
dengan menggunakan Matlab dan titik pangkal pada vektor $P_o = (2,6)$, gambarkan vektor-vektor berikut.

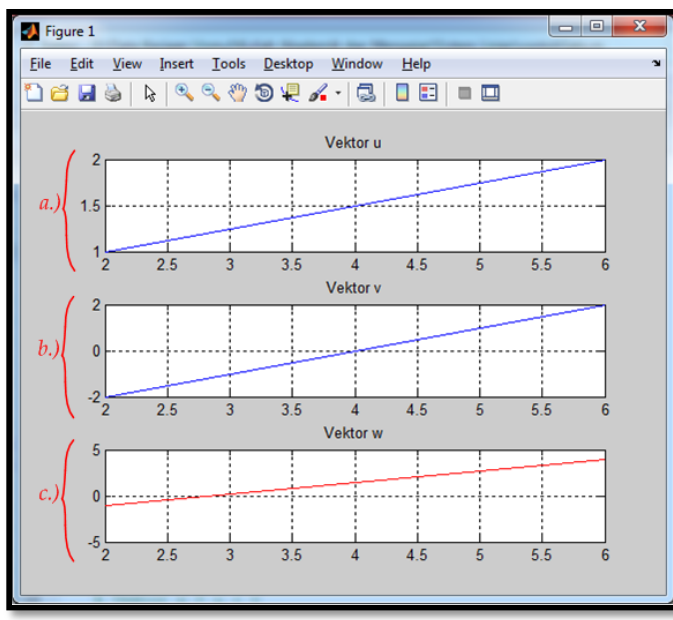
a) u

b) v

c) $u + v$

Jawab:





(a) (b)

Gambar 2. (a) *Coding* untuk membuat representasi vektor
(b) Hasil representasi vektor persamaan (1.1) dan (1.2)

Contoh Soal 1.2: Vektor-vektor yang direpresentasikan dalam bentuk persamaan (1.3) dan (1.4) adalah sebagai berikut,

$$u = (-1,2) \tag{1.3}$$

$$v = (4,-2) \tag{1.4}$$

dengan menggunakan Matlab, gambarkan vektor-vektor berikut.

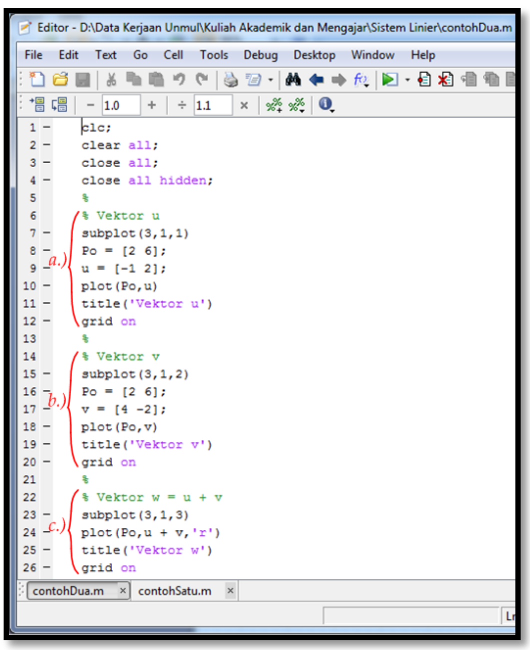
a) u

b) v

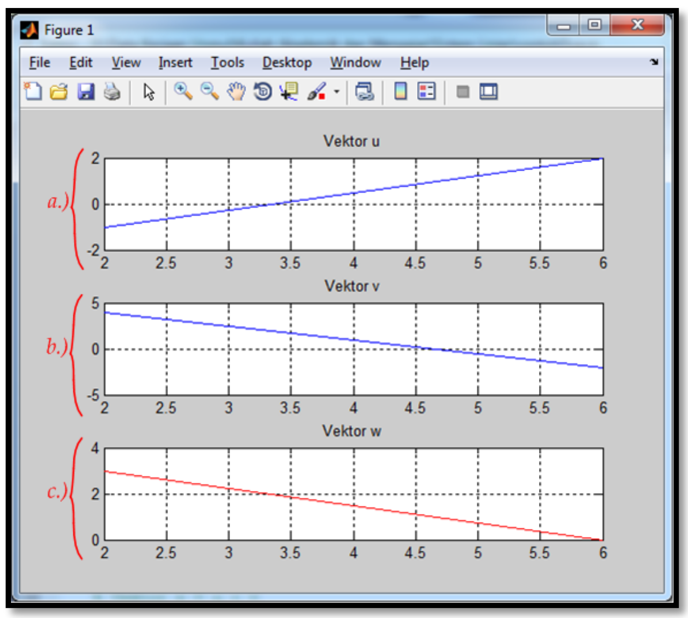
c) $u + v$

dimana, titik pangkal pada vektor $P_o = (2,6)$!

Jawab:



(a)



(b)

Gambar 3. (a) *Coding* untuk membuat representasi vektor
(b) Hasil representasi vektor persamaan (1.3) dan (1.4)

B. Kurva Bidang: Penyajian secara Parameter

Sebuah kurva bidang ditentukan oleh pasangan persamaan parametrik berikut,

$$x = f(t) \tag{1.5}$$

$$y = g(t) \tag{1.6}$$

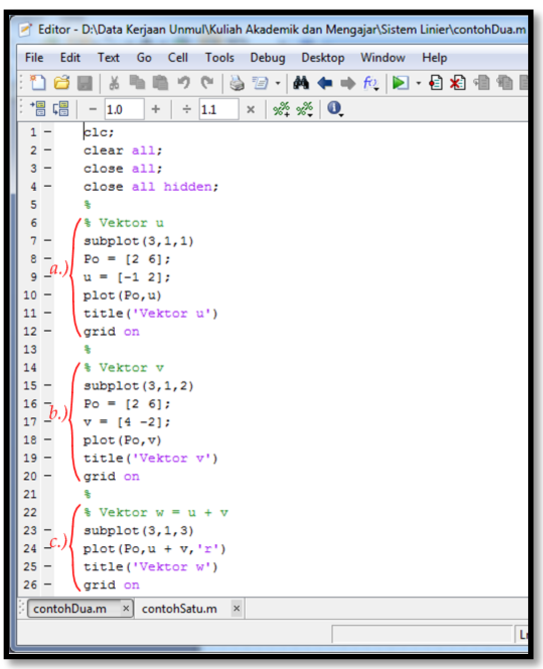
dimana t direpresentasikan dalam bentuk I. Biasanya I adalah sebuah selang tertutup $[a, b]$.

Contoh Soal 1.3: Dengan menggunakan Matlab, dimana interval t yakni $-10 \leq t \leq 10$, Gambarkan grafik untuk persamaan (1.7) dan (1.8) berikut,

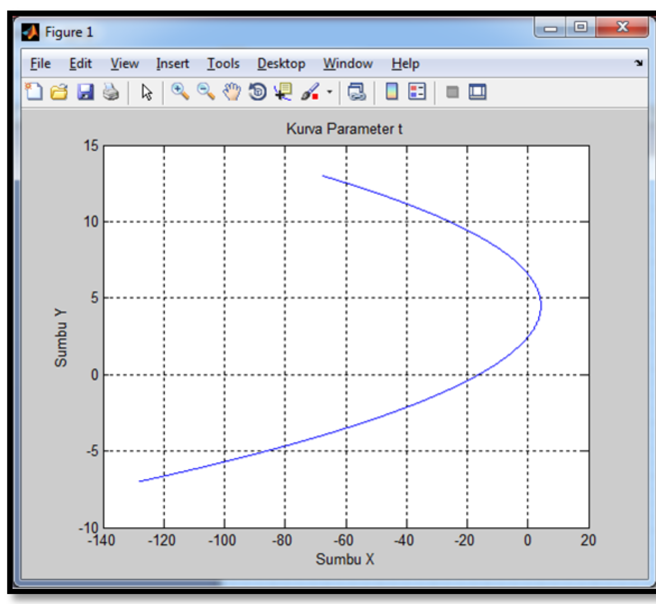
$$x(t) = -t^2 + 3t + 2 \tag{1.7}$$

$$y(t) = t + 3 \tag{1.8}$$

Jawab:



(a)



(b)

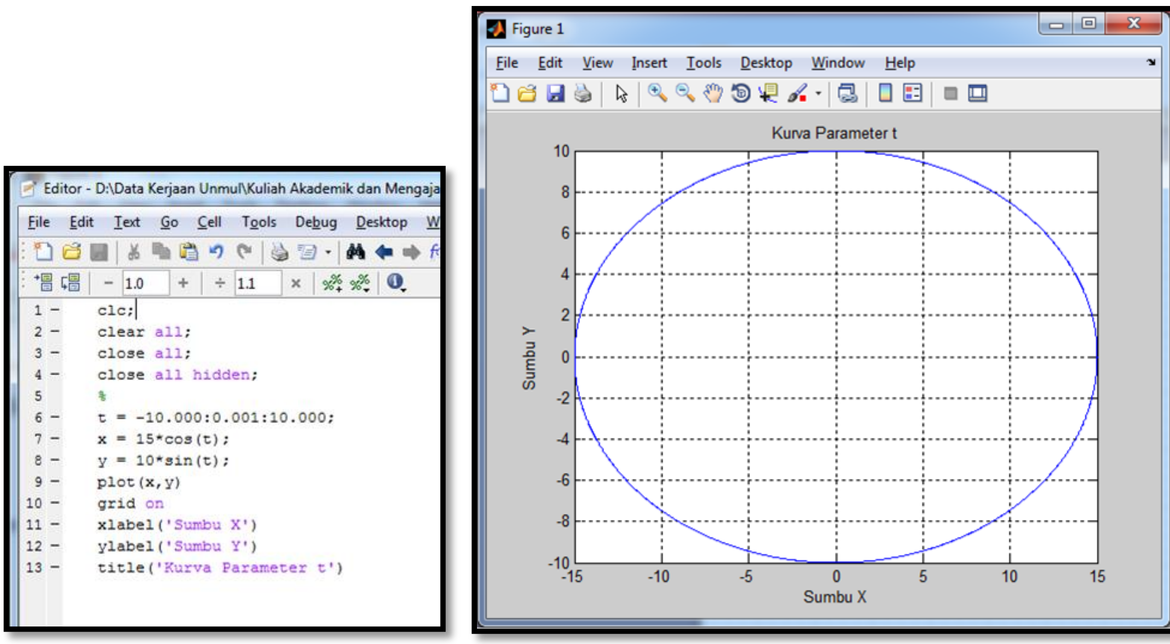
Gambar 4. (a) *Coding* kurva perubahan x dan y terhadap t
(b) Hasil representasi kurva perubahan x dan y terhadap t

Contoh Soal 1.4: Dengan menggunakan Matlab, dimana interval pada variabel t: $-10 \leq t \leq 10$ adalah sebuah Persamaan *Elips*. Maka gambarkan grafik untuk persamaan (1.9) dan (1.10) berikut,

$$x(t) = 15\cos(t) \tag{1.9}$$

$$y(t) = 10\sin(t) \tag{1.10}$$

Jawab:



(a) (b)

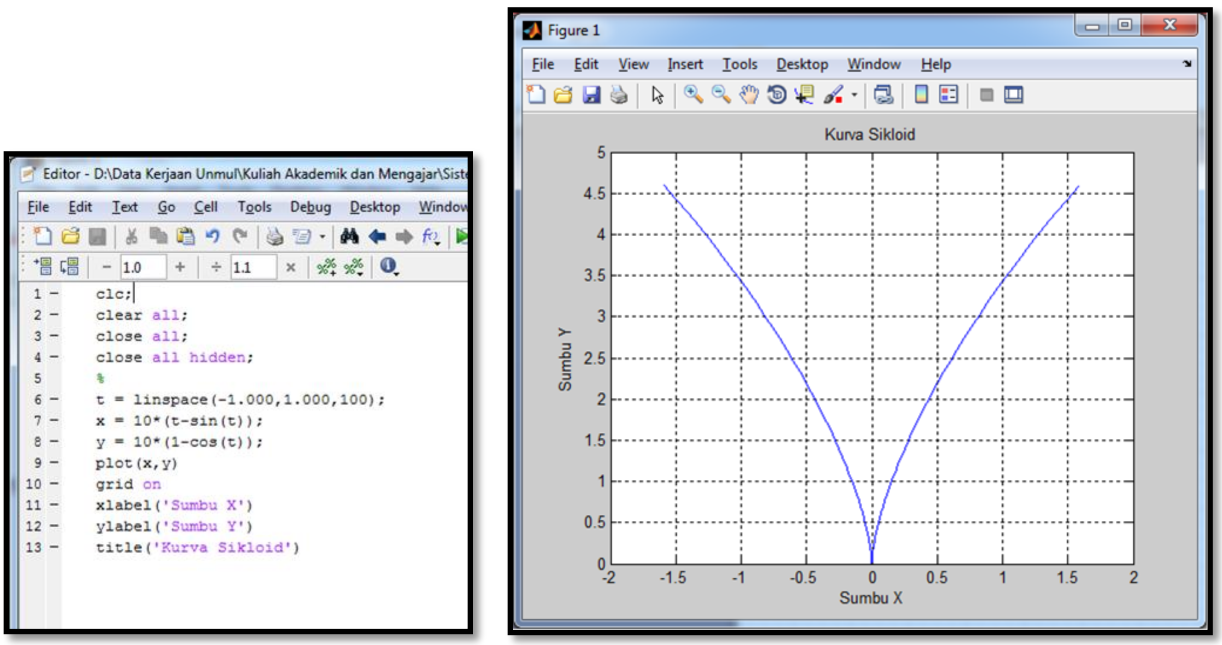
Gambar 5. (a) *Coding* kurva *elips* persamaan (1.9) dan (1.10)
(b) Hasil representasi kurva *elips* persamaan (1.9) dan (1.10)

Contoh Soal 1.5: Dengan menggunakan Matlab, Gambarkan kurva *sikloid* yang dinyatakan oleh untuk persamaan (1.11) dan (1.12) berikut,

$$x(t) = 10(t - \sin(t)) \tag{1.11}$$

$$y(t) = 10(1 - \cos(t)) \tag{1.12}$$

Jawab:



(a) (b)

Gambar 6. (a) *Coding* kurva *sikloid* persamaan (1.11) dan (1.12)
(b) Hasil representasi kurva *sikloid* persamaan (1.11) dan (1.12)

C. Vektor Bidang dengan Pendekatan Aljabar

Representasi vektor secaar aljabar dinyatakan dalam bentuk persamaan (1.13) dan (1.14) berikut,

$$u = (u_1, u_2) \tag{1.13}$$

$$v = (v_1, v_2) \tag{1.14}$$

dimana, u_1 dan u_2 adalah komponen-komponen vektor u, serta v_1 dan v_2 adalah komponen-komponen vektor v. Vektor u dan v dikatakan sama jika dan hanya jika $u_1 = v_1$ dan $u_2 = v_2$. Selain itu, ada beberapa operasi pada vektor yang berlaku, yakni,

1. Operasi penjumlahan. Operasi ini direpresentasikan dalam bentuk persamaan (1.15) berikut,

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \tag{1.15}$$

2. Operasi perkalian skalar dengan vektor. Operasi ini direpresentasikan dalam bentuk persamaan (1.16) berikut,

$$cu = uc = c(u_1, u_2) = (cu_1, cu_2) \tag{1.16}$$

Selain itu, dengan menggunakan sifat-sifat aljabar dan vektor u, v dan b, serta skalar a dan b berlaku sifat aljabar yang direpresentasikan dalam bentuk persamaan (1.17) sampai dengan (1.24) berikut,

3. $u + v = v + u$ (1.17)
4. $(u + v) + w = u + (v + w)$ (1.18)
5. $\mathrm{u} + 0 = 0 + \mathrm{u}$ (1.19)
6. $\mathrm{u} + (-\mathrm{u}) = 0$ (1.20)
7. $\mathrm{a(bu) = (ab)u = u(ab)}$ (1.21)
8. $\mathrm{a(u + v) = au + av}$ (1.22)
9. $\mathrm{(u + b)u = au + bu}$ (1.23)
10. $\mathrm{1u = u}$ (1.24)

Selain sifat-sifat alajabar vektor, ada lagi sifat-sifat yang berlaku pada vektor yaitu panjang dan hasil kali titik. Untuk panjang dari vektor u dan vektor v direpresentasikan dengan menggunakan persamaan (1.25) dan (1.26) berikut,

$$|u| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2} \tag{1.25}$$

$$|v| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2} \tag{1.26}$$

Untuk hasil kali titik (dot) dari vektor u dan vektor v direpresentasikan dengan menggunakan persamaan (1.27) berikut,

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 \tag{1.27}$$

Berdasarkan persamaan (1.27), dapat dikembangkan beberapa sifat hasil kali titik (dot) yang diperlihatkan pada persamaan (1.28) sampai dengan (1.32) berikut,

a. $u \cdot v = v \cdot u$ (1.28)

b. $u \cdot (v + w) = u \cdot v = u \cdot w$ (1.29)

c. $\mathrm{c(u \cdot v) = (cu \cdot v) = (u \cdot cv)}$ (1.30)

d. $0 \cdot \mathrm{u} = 0$ (1.31)

e. $\mathrm{u \cdot u = |u|^2}$ (1.32)

Jika u dan v adalah vektor yang tidak nol, maka hasil kali dari kedua vektor tersebut dinyatakan dalam bentuk persamaan (1.33) berikut,

$$u \cdot v = |u||v| cos\theta \tag{1.33}$$

dimana, θ adalah sudut antara u dan v dengan interval $0 \leq \theta \leq \pi$.

Contoh Soal 1.6: Vektor-vektor yang direpresentasikan dalam bentuk persamaan (1.34) dan (1.35) adalah sebagai berikut,

$$u = (1,4) \tag{1.34}$$

$$v = (3,6) \tag{1.35}$$

dengan menggunakan Matlab, tentukan:

a) $u + v$

b) $u - v$

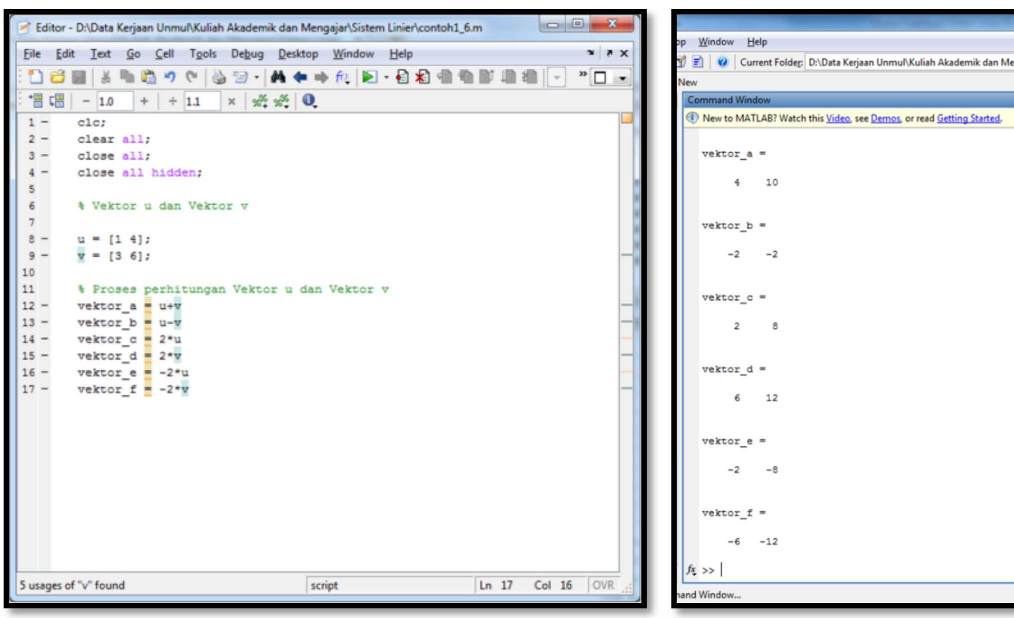
c) $2u$

d) $2v$

e) $-2u$

f) $-2v$

Jawab:



Gambar 7. Hasil representasi persamaan (1.34) dan (1.35)

Contoh Soal 1.7: Vektor-vektor yang direpresentasikan dalam bentuk persamaan (1.34) dan (1.35) adalah sebagai berikut,

$$u = (1,4) \tag{1.34}$$

$$v = (3,6) \tag{1.35}$$

dengan menggunakan Matlab, tentukan:

g) $|u|$

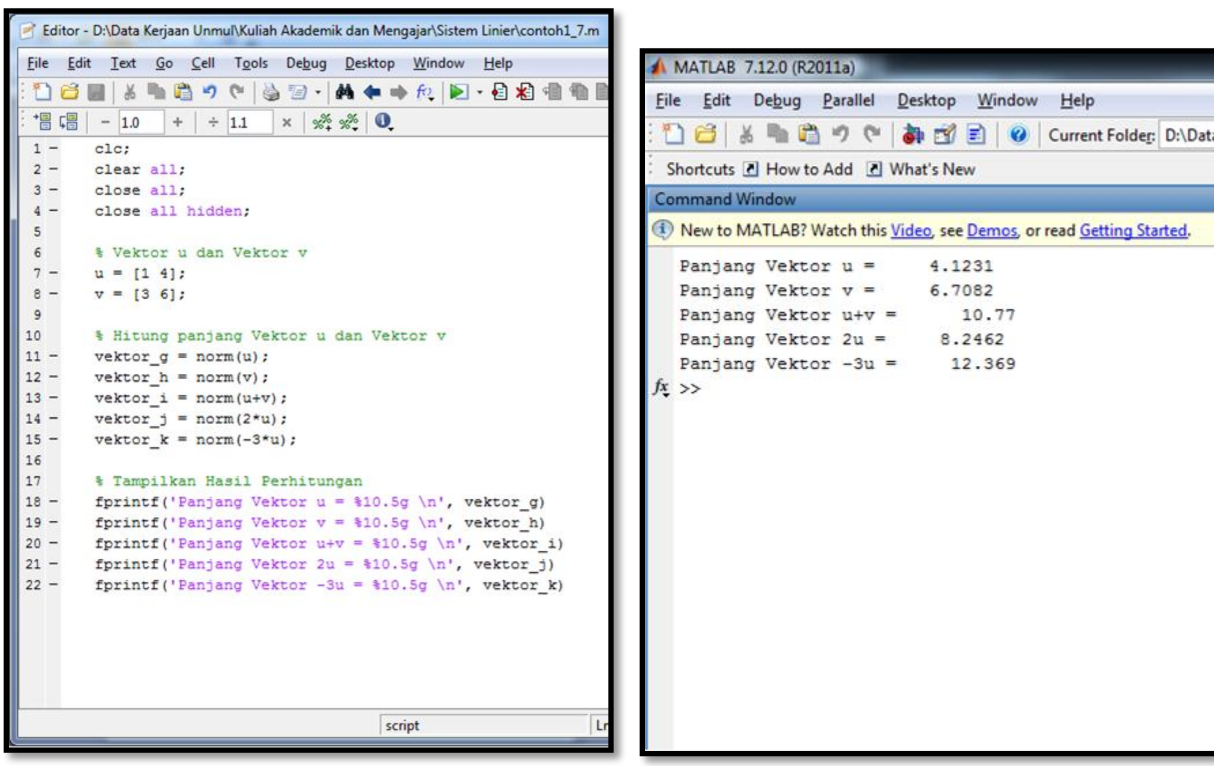
h) $|v|$

i) $|u + v|$

j) $|2u|$

k) $|-3u|$

Jawab:



Gambar 8. Hasil representasi persamaan (1.34) dan (1.35)

TUGAS Soal 1.8: Vektor-vektor yang direpresentasikan dalam bentuk persamaan (1.36) dan (1.37) adalah sebagai berikut,

$$u = (8,6) \tag{1.36}$$

$$v = (5,12) \tag{1.37}$$

dengan menggunakan Matlab, tentukan sudut antara vektor u dan vektor v!