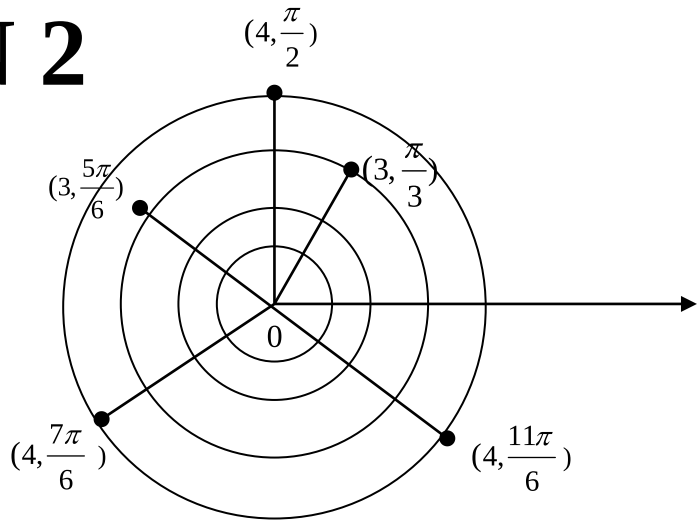
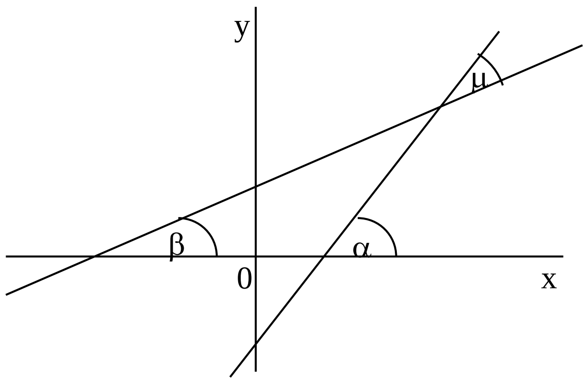
SERI GEOMETRI 1

GEOMETRI ANALIT BIDANG

Bagian 1 DAN 2



Oleh : Kukuh



FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN UNIVERSITAS MULAWARMAN

2021

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT, karena atas karunia-Nya penulis dapat menyempurnakan dan menyelesaikan Buku Geometri Analit Bidang dan Ruang bagian 1 dan 2.Buku ini disusun untuk membantu saudara yang mempelajari Geometri Analit, khususnya bagi mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika FKIP UNMUL. Namun demikian buku ini dapat pula digunakan oleh mahasiswa non kependidikan dan guru yang mengajar matematika di SMP dan SMA sebagai buku penunjang.

Buku ini terdiri dari dua bagian. Bagian 1 terdiri dari empat bab yaitu Sistem Koordinat, Persamaan garis lurus, Hubungan dua buah garis lurus, dan Koorninat Kutub.

Bagian 2 terdiri dari materi persamaan ellips dan persamaan lingkaran. Pada Lingkaran dibahas tentang persamaan lingkaran, persamaan garis singgung pada lingkaran dan ellips. Garis kutub, titik kuasa dan hubungan antara dua buah lingkaran. Untuk ellips dibahas pula garis arah (direktris), unsur-unsur yang berkaitan dengan ellips, garis tengah sekawan dan dalil Apollonius.

Harapan penulis buku ini dapat bermanfaat bagi saudara pembaca. Kritik dan saran dari pembaca sangat penulis harapkan dan kami terima dengan senang hati guna perbaikan dan penyempurnaan buku ini pada waktu yang akan datang.

Penulis sampaiakan terima kasih pada saudara yang telah membantu penyusunan buku ini dan terima kasih pula bagi saudara yang telah bersedia memberikan kritik dan saran.

Samarinda September 2021

Penyusun

DAFTAR ISI

Halaman

Bahan Ajar
Geometri Analit Datar dan Ruang

Setelah mengikuti kuliah ini, diharapkan mahasiswa dapat:

a. Menentukan letak titik pada koordinat: Cartesius dan Polar/kutub
b. Mjenentukan jarak antara dua titik yang diketahui koordinatnya
c. Menentukan koordinat titik yang terletak pada garis hubung dua titik yang diketahui koordinatnya.
d. Menentukan persamaan garis lurus yang melalui sebuah titik dan diketahui gradiennnya.
e. Menentukan persamaan garis lurus yang melalui dua buah titik.
f. Menentukan persamaan garis lurus yang sejajar garis lain.
g. Menentukan persamaan garis lurus yang tegak lurus garis lain.
h. Menentukan persamaan garis normal suatu garis lurus.
i. Menentukan persamaan parameter garis lurus.
j. Menentukan persamaan berkas garis.
k. Menentukan besar sudut antara dua garis berpotongan.
l. Menentukan persamaan garis berat, garis sumbu, garis bagi dan garis tinggi suatu segitiga yang diketahui persamaan sisi-sisinya.
m. Menentukan luas daerah segi banyak yang diketahui koordinat titik-titik sudutnya.
n. Menentukan persamaan lingkaran, persamaan garis singgung pada lingkaran, persamaan garis kutub, persamaan berkas dan jarring lingkaran.
o. Persamaan irisan kerucut (lingkaran, elips, parabola dan hiperbola), persamaan garis singgung pada irisan kerucut.
p. Menentukan koordinat dan persamaan garis lurus, persamaan bola, elepsoida, paraboloida, hiperboloida, bidang, persamaan parameter.

Buku Sumber

: Ayres F.J.R Theory and Problem of Fiirs year Cllege
Mathematics New York McGraw Hill
Book Company.

Conelly, J.F Fratangelo, R.A. Elementary Technical
Mathematics, New York:
Mac Millan Publishing Publishing Co.Inc.

Eccles, F.M,Vance, E.P & Mikula, T.M. Analitical and Vector Geometry: A Biridge to Calculus, Menlo Park: Addisson-Wesley Publishing Compay Co.

Fuller, G, & Tarwater D. Analityc Geometry. Massachussetts: Addison-Wesley Publishing Company.

Kindle, J.H Theory and Problem of Plane and Solid Analityc Geometry. New York:

Mc Graw Hill Book company.

Kukuh, Geometri Analit Bidang jilid 1 dan 2. FKIP UNMUL

Moeharti Hw Ilmu Ukur Analitik Bidang FPMIPA IKIP Yogyakarta

Moeharti Hw Ilmu Ukur Analitik Ruang FPMIPA IKIP Yogyakarta

Rawuh dkk Ilmu Ukur AnalitisTeori dan Soal-soal Bandung: Teratai.

Wexler, C. Analytic Geometry A Vector aproach. Massachusetts: Addison.Wesley Publishing Company Inc.

BAB I
KOORDINAT

Untuk menentukan posisi suatu titik pada suatu bidang datar diperlukan suatu patokan mula. Patokan mula ini dapat diambil dua garis lurus yang saling tegak lurus. Setiap titik pada bidang datar tertentu oleh jarak titik itu terhadap garis-garis tadi dan arahnya. Sistem seperti ini dinamakan sistem koordinat Kartesian tegak lurus.

Penggunaan sistem ini akan mempermudah dan menyederhanakan permasalahan/konsep-konsep dalam aljabar dan geometri. Oleh karena itu penguasaan pada sistem koordinat ini merupakan dasar untuk mempelajari materi-materi Geometri Analitik berikutnya. Dalam modul ini pula disajikan persamaan garis lurus yang mendasarkan pada sistem koordinat Kartesian tegak lurus.

Setelah mempelajari materi dalam modul ini diharapkan agar Anda memahami sistem koordinat Kartesian tegak lurus dan persamaan garis lurus pada sistem koordinat tersebut.

Lebih khusus, setelah mempelejari modul ini Anda diharapkan dapat menentukan:

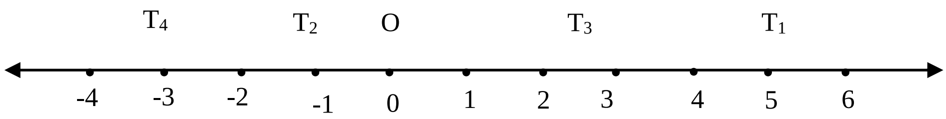
1. letak suatu titik pada bidang Kartesian;
2. unsur-unsur yang harus ada dalam sistem koordinat Kartesian tegak lurus;
3. jarak dua titik tertentu dalam bidang koordinat Kartesian;
4. koordinat-koordinat titik tengah suatu ruas garis yang koordinat-koordinat titik-titik ujungnya diketahui;
5. koordinat-koordinat suatu titik pada suatu ruas garis yang titik-titik ujungnya tertentu dan perbandingan jarak titik itu terhadap titik-titik ujungnya diketahui;
6. persamaan-persamaan garis lurus yang sejajar dengan sumbu koordinat dan melalui titik tertentu;
7. persamaan garis lurus yang melalui titik asal dan titik tertentu lainnya;
8. tanjakan suatu garis lurus;

9. persamaan garis lurus yang melalui dua titik yang diketahui;
10. persamaan garis lurus dengan tanjakan tertentu dan melalui suatu titik yang diketahui; dan
11. koordinat-koordinat titik potong dengan sumbu-sumbu koordinat dari suatu persamaan garis lurus yang diketahui.

1.1 Letak Titik pada Garis Lurus

Jika pada suatu garis g diambil suatu titik tertentu O, maka letak tiap titik T pada garis itu dapat diketahui dengan jalan menentukan jarak OT. Untuk membedakan apakah titik T terletak di sebelah kiri atau di sebelah kanan titik O, maka jarak dari T ke O di sebelah yang satu diberi tanda positif (+) dan disebelah yang lainnya diberi tanda negatif (-). Titik O disebut titik pangkal atau titik asal (titik awal). Pada umumnya di sebelah kanan O diberi tanda positif dan di sebelah kiri O diberi tanda negatif.

Jika titik asal O dinamakan titik nol dan digunakan satuan-satuan panjang (misalnya cm), maka setiap titik T pada garis g dapat ditunjukkan letaknya oleh suatu bilangan yang menyatakan jarak OT. Sebaliknya setiap bilangan nyata menunjukkan letak suatu titik T pada garis g tersebut. Bilangan nyata tersebut, disebut **koordinat** titik T, atau dalam hal ini disebut **absis** titik T.



Gambar 1.

Jika garis g disebut sumbu x , maka untuk menunjukkan letak suatu titik T dapat ditulis dengan simbol T(x), dan x ini yang disebut dengan absis titik T.

Contoh 1. Perhatikan gambar 1 di atas

a. O(0) berarti titik O berjarak 0 satuan dari titik asal
b. T_1 (+5) bertarti titik T_1 berjarak 5 satuan panjang dari titik asal O dan terletak di sebelah kanan O

c. T_2 (-1) bertarti titik T_2 berjarak 1 satuan panjang dari titik asal O dan terletak di sebelah kiri O

d. T_3 (2 1/2) bertarti titik T_3 berjarak 2 ½ satuan panjang dari titik asal O dan terletak di sebelah kanan O

e. T_4 (-3) bertarti titik T_4 berjarak 3 satuan panjang dari titik asal O dan terletak di sebelah kiri O.

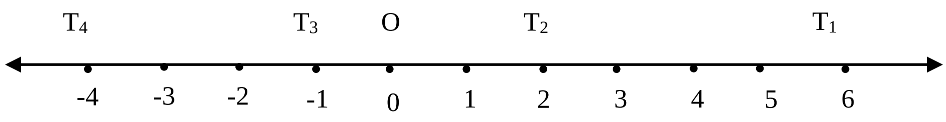
Jadi suatu titik pada suatu garis lurus mempunyai satu koordinat yang disebut absis titik tersebut. Tampak bahwa setiap titik pada garis menentukan suatu bilangan nyata yaitu absisnya, sebaliknya setiap bilangan nyata menunjukkan letak suatu titik. Sehingga terdapat korespondensi satu-satu antara titik-titik pada garis dan himpunan bilangan nyata.

1.2. Jarak Antara Dua Buah Titik

Jarak dua buah titik dapat dihitung apabila kedua titik tersebut di ketahui kordinat-koordinatnya. Jarak dua buah titik tersebut tidak diberi tanda positif atau negatif tetapi diambil harga mutlaknya.

$| x | = x$ bila $x > 0$

$| x | = - x$ bila $x < 0$



Gambar 2.

Contoh: Diketahui $T_1(6)$, $T_2(2)$, $T_3(-1)$ dan $T_4(-4)$

Tentukan jarak T_1T_2, T_3T_1, dan T_3T_4

Penyelesaian:

Jarak $T_1T_2 = (+2) – (+6) = -4$, harga mutlaknya 4

Jarak T_3T_1 = (+6) – (-1) = 7 , harga mutlaknya 7

Jarak T_3T_4 = (-4) – (-1) = -3 , harga mutlaknya = 3

Secara umum untuk menentukan jarak dua buah titik yang diketahui koordinatnya dapat digunakan rumus sebagai berikut:

Andaikan $T_1(x_1)$ dan $T_2(x_2)$, maka jarak $T_1T_2 = |\, x_2 - x_1 \,| = |\, x_1 - x_2 \,|$

Catatan : Hal berikut ini sebaiknya tidak diperkenalkan di sekolah lanjutan

Jarak 2 buah titik dapat pula diberi tanda positif atau negatif, jika yang dimaksud dengan T_1T_2 adalah jarak dari T_1 ke T_2, dan yang dimaksud dengan T_2T_1 ialah jarak dari T_2 ke T_1.

Dengan cara ini sekaligus dapat dilihat apakah titik T_1 terletak disebelah kanan atau sebelah kiri dari titik T_2, sesuai dengan arah positif dan arah negatif dari sumbu x.

Untuk cara ini berlaku :

$$\overrightarrow{T_1T_2} = x_2 - x_1 \qquad \text{dan} \qquad \overrightarrow{T_2T_1} = x_1 - x_2$$

Dapat diperiksa gambar di atas

$\overrightarrow{T_1T_2}$ = (+2) – (+5) = - 3, berarti T_2 disebelah kiri T_1

Jarak T_3T_1 = (+6) – (-1) = 7 , berarti titik T_1 terletak di sebelah kanan titik T_3

Jarak T_3T_4 = (-4) – (-1) = -3 , berarti titik T_4 terletak di sebelah kiri titik T_1

1.3. Letak Suatu Titik pada Suatu Bidang Datar

Untuk menentukan letak suatu titik pada suatu bidang datar dapat digunakan beberapa cara. Dua diantaranya adalah

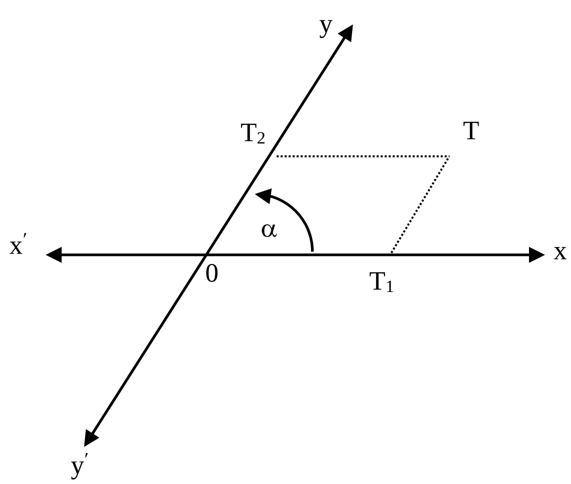
1) Koordinat Kartesius
   a) Koordinat siku-siku atau koordinat orthogonal
   b) Koordinat miring atau koordinat condong
2) Koordinat Kutub

1.3.1. Koordinat Kartesius

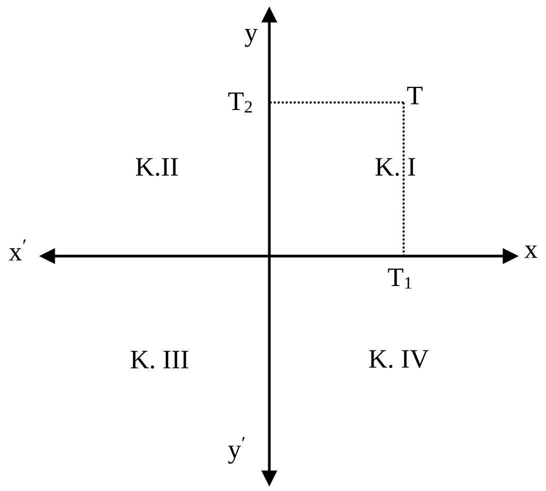
Untuk menentukan sebuah titik pada bidang datar cara (dalam gambar 1) dapat diperluas untuk menentukan letaknya. Untuk ini dipilih dalam bidang datar

2 garis lurus yang berpotongan. Titik potongnya disebut *titik asal atau titik pangkal,* kedua garis itu disebut *sumbu-sumbu koordinat* dan sudut antara kedua garis itu disebut *sudut koordinat.*

Sumbu-sumbu koordinat diberi nama sumbu-sumbu x dan y, yaitu $x'x$ dan $y'y$ (gambar 3a dan 3b). Mengingat tokoh geometri Analitik Rene Descartes dari Prancis, maka susunan sumbu ini disebut susunan sumbu *Cartesius.*



Gambar 3a



Gambar 3b

Jika sudut koordinat lancip atau tumpul, maka terdapat susunan sumbu miring (gambar 3a) dan jika siku-siku terdapat susunan sumbu siku-siku atau susunan sumbu orthogonal (gambar 3b).

Letak suatu titik pada suatu bidang datar akan tertentu apabila diketahui jarak-jarak titik itu dari sumbu-sumbu koordinat. Jarak-jarak ini diambil sejajar dengan sumbu-sumbu koordinat. Misalkan T suatu titik pada bidang datar tersebut. Dari T ditarik garis-garis sejajar sumbu–sumbu $x'x$ dan $y'y$. Titik-titik potong garis-garis ini dengan sumbu-sumbu ialah berturut-turut T_1 dan T_2 (gambar 3a dan 3b). Maka letak titik T tertentu oleh jarak-jarak OT_1 dan OT_2.

Bilangan yang menunjukkan jarak OT_1 disebut **koordinat x titik T** atau **absis titik T**

Bilangan yang menunjukkan jarak OT_2 disebut **koordinat y titik T** atau **ordinat titik T.**

Absis dan ordinat titik T ini disebut koordinat-koordinat titik T pada susunan sumbu miring koordinat-koordinat ini disebut koordinat-koordinat miring dan pada susunan sumbu siku-siku koordinat-koordinat ini disebut koordinat-koordinat siku-siku. Untuk menunjukkan letak suatu titik T ditulis T (x, y), x disebut absisnya dan y dinamakan ordinatnya.

Sumbu koordinat membagi bidang datar dalam 4 daerah atau 4 kuadaran, yaitu kuadaran pertama, kedua, ketiga dan keempat (KI, K II, KIII, dan K IV) seperti terlihat dalam gambar 3. Sesuai dengan poin 1 di atas, jarak-jarak yang diukur pada sumbu x yang di sebelah kanan O diberi tanda positif dan disebelah kiri O diberi tanda negatif. Jarak-jarak yang diukur pada sumbu y yang ada di atas 0 diberi tanda positif dan yang di bawah 0 negatif. Dengan demikian tanda positif dan negatifnya sbb:

Tabel tanda koefisien dari absis dan ordinat suatu titik

	Kuadaran I	Kuadran II	Kuadran III	Kuadran IV
x	+	-	-	+
y	+	+	-	-

(x, y) berupa pasangan bilangan berurutan

x menunjukkan absis suatu titik

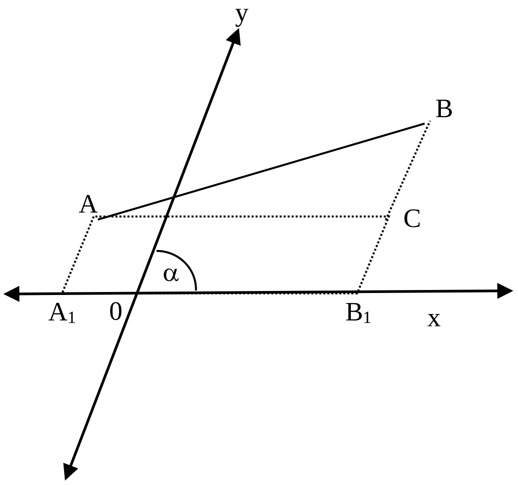
y menunjukkan ordinat suatu titik

Tampak bahwa setiap titik dalam bidang menunjukkan sepasang bilangan nyata berurutan dan sebalikknya setiap pasang bilangan nyata berurutan menentukan satu titik pada bidang.

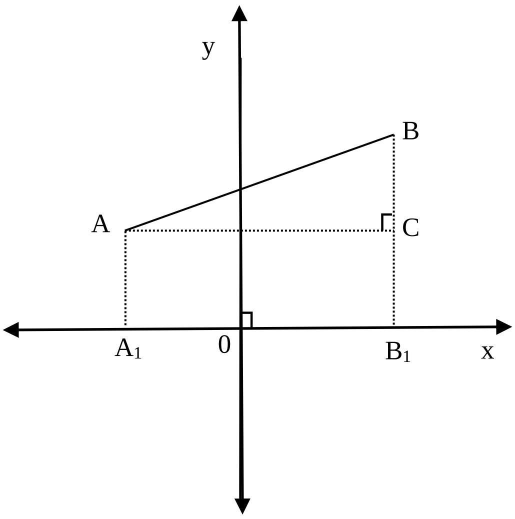
Jadi terdapat korespondensi satu-satu antara titik-titik dalam bidang dan himpunan pasangan bilangan nyata berurutan.

Pada umunya digunakan sumbu orthogonal, sedang susunan sumbu miring hanya dipakai untuk menyelesaikan soal-soal tertentu.

1.3.2. Jarak 2 Buah Titik yang Diketahui Koordinatnya



Gambar 4



Gambar 5

Untuk menentukan jarak dua buah titik yang diketahui A (x_1, y_1) dan B (x_2, y_2) (gambar 4 dan gambar 5) dapat ditarik garis-garis pertolongan sebagai berikut :

AA_1 dan BB_1 yang sejajar sumbu y dan memotong sumbu x di A_1 dan B_1

AC yang sejajar sumbu x dan memotong BB_1 di C

Sehingga terbentuklah Δ ABC yang titik-titik sudutnya A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) dan C (x_c, y_c).

Jika susunan sumbu miring (gambar 4), maka $\angle$ ACB = 180 ^{o} - α

$\overline{AC} = |x_C - x_A| = |x_B - x_A| = |x_2 - x_1|$

$\overline{CB} = |y_B - y_C| = |y_B - y_A| = |y_2 - y_1|$

Jadi dalam Δ ABC berlaku menurut aturan cosinus :

$AB^2 = AC^2 + CB^2$ - 2. AC.CB Cos (180^0 - α)

$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2.\ (x_2 - x_1).(y_2 - y_1)\ \text{Cos}\ \alpha$

jadi $\quad AB = \sqrt{\{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2.(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\text{Cos}\alpha}$

dengan α sudut antara sumbu x dan sumbu y

Jika susunan sumbunya orthogonal, maka $\alpha = 90^0$, sehingga cos $90^o = 0$

Rumus jarak AB di atas menjadi

$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2.\ (x_2 - x_1).(y_2 - y_1)\ \text{Cos}\ 90^o$

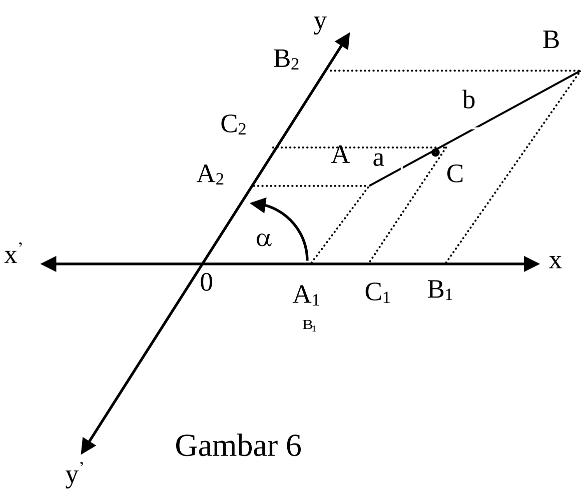
$\quad = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2.\ (x_2 - x_1).(y_2 - y_1)\ .0$

$\quad = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

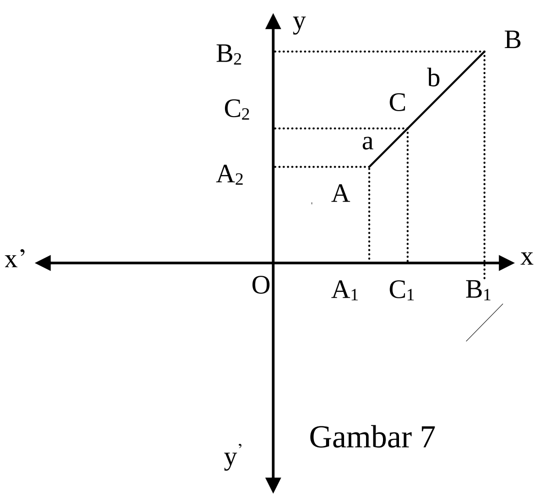
jadi $AB = \sqrt{\{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\}}$

Untuk menentukan jarak titik A dan B pada susunan sumbu orthogonal dapat dipergunakan theorema pythagoras. (coba buktikan sendiri)

1.3.3. Koordinat-Koordinat Titik pada Garis Penghubung Dua Ttitik yang Diketahui



Gambar 6



Gambar 7

Diketahui $A(x_1,y_1)$ dan $B(x_2,y_2)$ dan titik $C(x_C,y_C)$ terletak pada garis penghubung titik A dan B dengan perbandingan AC : CB = a : b. Tentukan koordinat titik C

$A_1C_1 = |x_C - x_A| = |x_C - x_1|$

$C_1B_1 = |x_B - x_C| = |x_2 - x_C|$

Dengan mengingat arah ruas garis-ruas garis di atas, maka berlakulah:

$A_1C_1 : C_1B_1 = AC : CB = a : b$

$(x_C - x_1) : (x_2 - x_C) = a : b$

$b.(x_C - x_1) = a.(x_2 - x_C)$

$bx_C - bx_1 = ax_2 - ax_C$

$bx_C + ax_C = bx_1 + ax_2$

$x_C(a + b) = bx_1 + ax_2$

$$x_c = \frac{bx_1 + ax_2}{a + b}$$

Dengan jalan yang sama (analog) dapat diperoleh

$A_2C_2 : C_2B_2 = AC : CB = a : b$

$(y_C - y_1) : (y_2 - y_C) = a : b$

$b.(y_C - y_1) = a.(y_2 - y_C)$

$by_C - by_1 = ay_2 - ay_C$

$by_C + ay_C = by_1 + ay_2$

$y_C(a + b) = by_1 + ay_2$

$$y_c = \frac{by_1 + ay_2}{a + b}$$

Jika $\frac{a}{b} = \lambda$, maka rumus-rumus di atas menjadi:

$$x_c = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

$$y_c = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

Kemungkinan-kemungkinannya:

Jika titik C berimpit dengan titik A, maka $\lambda = 0$

Jika titik C berimpit dengan titik tengah AB, maka $\lambda = 1$

Sehingga diperoleh rumus untuk koordinat-koordinat titik tengah AB misalnya diberi nama titik T

$$x_T = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

$$y_T = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

3. Jika titik C berimpit dengan titik B, maka $\lambda = \infty$

   Mengingat bahwa koordinat-koordinat titik C menjadi

   $y_C = x_2$ dan $y_c = y_2$ sehingga diperoleh rumus

   $$x_C = \frac{(1/\lambda)\, x_1 + x_2}{(1/\lambda) + 1}$$

   $$y_C = \frac{(1/\lambda)\, y_1 + y_2}{(1/\lambda) + 1}$$

   dengan $\lambda = \infty$

4. Jika C terletak pada perpanjangan AB, maka mengingat arah dari ruas garis-ruas garis AB dan AC maka AC : CB = λ menjadi negatif dan harga mutlak λ lebih besar dari 1. Sehingga diperoleh $\lambda < 0$ dan $|\lambda| > 1$

5. Jika C terletak pada perpanjangan BA, maka mengingat arah dari ruas garis-ruas garis AB dan AC maka AC : CB = λ menjadi negatif dan harga mutlak λ lebih kecil 1. Sehingga diperoleh $\lambda < 0$ dan $|\lambda| < 1$

Contoh: Diketahui A (1, -4) dan B(6,1). Tentukan koordinat-koordinat titik C apabila C terletak pada garis AB dan jarak C dari A dan B berbanding sebagai 2 : 3

Penyelesaian:

AB : CB = 2 : 3 jadi $\lambda = \pm \frac{2}{3}$,

untuk $\lambda = \frac{2}{3}$,

$$x_c = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

$$x_c = \frac{1+\frac{2}{3}.6}{1+\frac{2}{3}} = 3$$

$$y_c = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$$

$$y_c = \frac{-4+\frac{2}{3}.1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{-3\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = -2$$

Jadi |koordinat C(3,-2)

Untuk $\lambda = -\frac{2}{3}$

$$x_c = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{1+(-\frac{2}{3}).6}{1+(-\frac{2}{3})} = -9$$

$$y_c = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{-4+(-\frac{2}{3}).1}{1+(-\frac{2}{3})} = -14$$

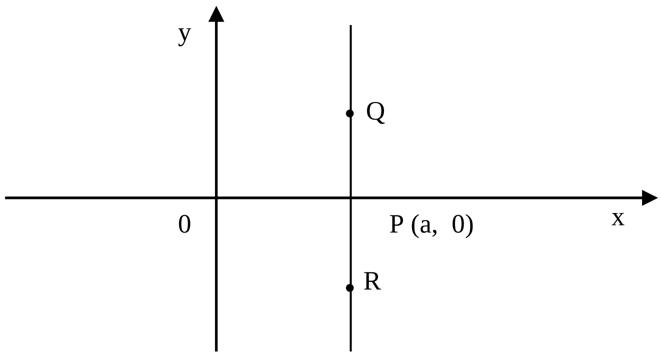
Jadi koordinat C(-9,-14)

(Catatan untuk mengecek apakah hasil tersebut benar? Silahkan digambar secara tepat)

BAB II
GARIS LURUS

2-1. Persamaan Garis-garis Istimewa

1. Perhatikan gambar 8 garis g melalui titik P (a, 0) dan sejajar dengan sumbu y. Titik-titik Q dan R terletak pada garis g, karena garis g sejajar dengan sumbu y, maka absis titik Q adalah a dan absis titik R adalah a pula. Bahkan semua titik pada garis g selalu mempunyai absis sama dengan a.

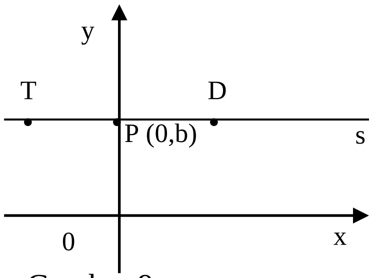


Gambar 8

Dapat dikatakan bahwa garis g adalah himpunan semua titik yang berabsis a, ditulis **$\{(x, y) \mid x = a\}$.** Selanjutnya dikatakan bahwa x = a merupakan persamaan garis g, yaitu garis yang sejajar sumbu y dan melalui titik (a, 0). Atau persamaan garis lurus yang tegak lurus sumbu x dan melalui titik (a, 0).

2. Apabila garis g di atas ditranslasikan searah sumbu y sehingga titik P berimpit dengan O, maka diperoleh persamaan sumbu y adalah x = 0. Dengan penjelasan ini dapat dipahami bahwa **persamaan sumbu y adalah x = 0.**

3. Perhatikan gambar 9 garis s sejajar dengan sumbu x dan melalui titik P (0, b).



Gambar 9

- ∗ Titik T dan D terletak pada garis s, maka ordinat-ordinat titik-titik T dan D adalah b pula. Lebih dari itu, semua titik yang terletak pada garis s selalu mempunyai ordinat b. Sehingga kita dapat mengatakan bahwa garis s merupakan himpunan semua titik yang mempunyai ordinat b, atau dituliskan sebagai $\{(x, y) \mid y = b\}$.
- ∗ Selanjutnya dikatakan bahwa y = b merupakan persamaan garis s, yaitu persamaan garis lurus yang sejajar dengan sumbu x dan melalui titik (0, b). Atau persamaan garis lurus yang tegak lurus sumbu y dan melalui titik (9=0, b).

4. Jika garis s ditranslasikan searah sumbu y sehingga titik P berimpit dengan titik 0, maka diperoleh persamaan y = 0. Dengan pengertian tersebut, dapat dipahami bahwa persamaan untuk sumbu x adalah y = 0.

5. Jika sekarang dipandang suatu garis lurus yang melalaui O dan diambil beberapa titik sebarang $T_1(x_1, y_1)$ dan $T_2(x_2, y_2)$ pada garis tersebut.

   Maka ternyata selalu berlaku

   $y_1 : x_1 = y_2 : x_2 = \text{tg } \alpha = m$ (gambar 10)

   Karena perbandingan ini berlaku untuk setiap titik pada garis tersebut, maka persamaan garis lurus itu ialah

$\frac{y}{x} = \text{tg}\,\alpha$ atau $\frac{y}{x} = m$ yang dapat ditulis

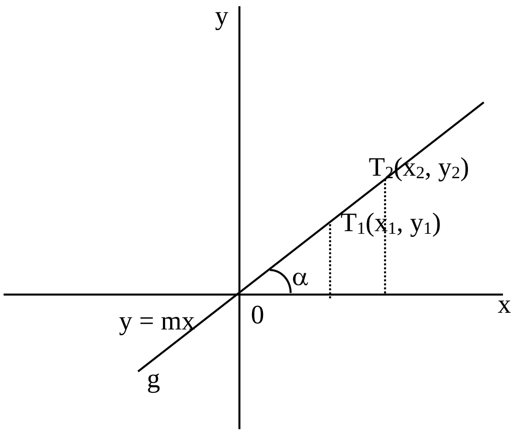
$\underline{y = \text{tg}\,\alpha}\ x$ atau

$\underline{y = mx}$

α ialah sudut yang diapit oleh garis itu dengan sumbu x positif dan menghitungnya dari sumbu x positif kearah berlawanan dengan arah putaran jarum jam.

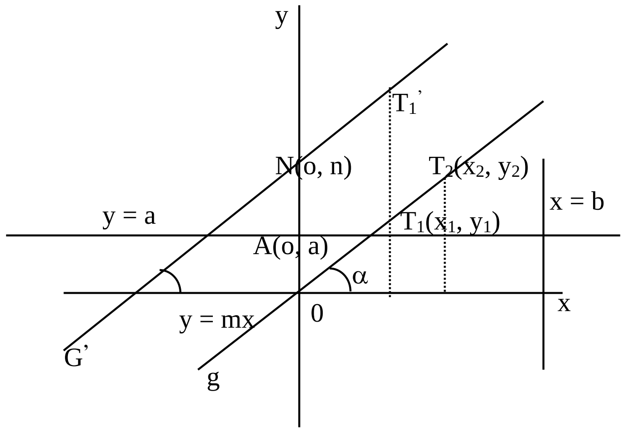
m disebut **<u>koefisien arah</u>** garis lurus tersebut dan **m = tg α** atau m disebut **gradien** atau **tanjakan.**

Jika suatu garis lurus mengapit sudut lancip dengan sunbu x, maka koefisien arahnya positif, dan jika sudutnya tumpul maka koefisien arahnya negatif.



Gambar 10

2-2. Garis Sebarang dengan Persamaan $y = mx + n$



Gambar 11

Suatu garis lurus g' mempunyai koefisien arah m dan memotong sumbu y sepanjang n, yaitu titik N(o, n). Pada gambar 11 digambarkan garis g' yang sejajar g. Garis g mempunyai persamaan $y = mx$. Setiap titik T' pada garis g' didapat dari titik T pada g dengan menambah ordinat titik T dengan n.

Jadi jika $T_1 (x_1, y_1)$ pada garis g maka $T'_1(x_1, y_1 + n)$ pada garis g',

Jika $T_2(x_2, y_2)$ pada garis g maka $T'_2(x_2, y_2 + n)$ pada garis g',

Jika $T_3(x_3, y_3)$ pada garis g maka $T'_3(x_3, y_3 + n)$ pada garis g',

Jika $T_4(x_4, y_4)$ pada garis g maka $T'_4(x_4, y_4 + n)$ pada garis g',

dan seterusnya.

Untuk setiap titik T pada g dipenuhi $y = mx$, jadi untuk setiap titik T' pada g' dipenuhi $y = mx + n$.

Jadi persamaan garis g' dipenuhi $y = mx + n$

Perlu dibuktikan, bahwa persamaan yang berbentuk $y = px + q$, dimana p dan q adalah bilangan-bilangan tetap, betul-betul persamaan suatu garis lurus. Misalkan ada 3 titik sebarang pada grafik persamaan tersebut , $T_1 (x_1, y_1)$, $T_2 (x_2, y_2)$ dan $T_3(x_3, y_3)$.

Jadi berlaku : $y_1 = px_1 + q$

$y_2 = px_2 + q$

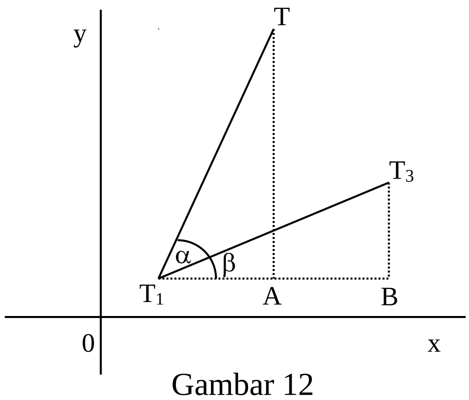
$y_3 = px_3 + q$

Dalam $\Delta\ AT_1T_2$:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{AT_2}{T_1A} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = p$$

Dalam $\Delta\ BT_1T_3$:

$$\text{tg}\ \beta = \frac{BT_3}{T_1B} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = p$$



Gambar 12

Ternyata tg α = tg β, jadi $\alpha = \beta$. Sedang T_1A dan T_1B segaris, jadi tentulah T_1T_2 dan T_2T_3 segaris atau T_1, T_2 dan T_3 terletak pada satu garis lurus.

Karena ini berlaku untuk sebarang 3 titik pada grafik persamaan itu, maka berarti bahwa persamaan itu adalah persamaan sebuah garis lurus yang mengapit sudut α dengan sumbu x dan tg α = p.

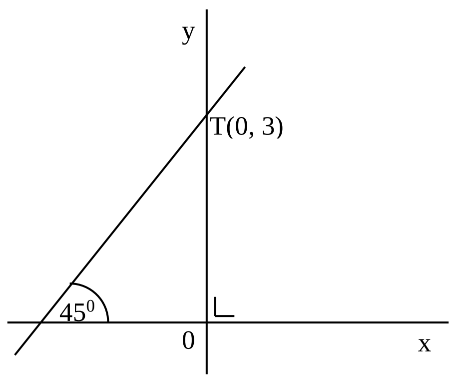
Untuk x = 0, terdapat y = 0, berarti garis itu melalui titik (o, q).

Jadi terdapat : $y = mx + n$, adalah persamaan garis lurus yang koefisien arahnya m dan memotong sumbu y di titik (o, n).

Dengan mudah dapat ditentukan bahwa $y = x + 3$ adalah persamaan garis yang koefisien arahnya 1 dan memotong sumbu y di titik (0, 3).

$m = \text{tg}\ \alpha = 1 \rightarrow \alpha = 45^o$

$n = OT = 3 \rightarrow T\ (0, 3)$



Gambar 13

Satu contoh lagi : carilah persamaan garis lurus yang memotong sumbu y di titik (0, -2) dan mengapit sudut 60^o dengan sumbu x positif.

Jawaban : Misalkan persamaan garis itu y = mx + n

maka m = tg 60^o = $\sqrt{3}$

n = -2

Jadi persamaan garis itu y = $\sqrt{3}$. x - 2 atau

y = x$\sqrt{3}$ - 2.

2-3 Persamaan Umum Suatu Garis Lurus

Pada pembahasan di atas tampak bahwa setiap garis lurus mempunyai persamaan yang linear dalam x dan y atau persamaan berpangkat satu dalam x dan y.

Sebaliknya setiap persamaan linear dalam x dan y adalah persamaan suatu garis lurus.

Hal ini dapat kita tunjukkan dengan memperhatikan persamaan linear umum dalam x dan y.

Ax + By + C = 0 (A, B, dan C bilangan nyata dan tidak bersama-sama nol).

Kemungkinan-kemungkinan :

a) Bila A = 0, B $\neq$ 0 dan C $\neq$ 0 maka persamaannya menjadi By + C = 0 atau $y = -\frac{C}{B}$, menunjukkan persamaan garis yang sejajar sumbu x, melalui titik (0, $\frac{-C}{B}$)

b) Bila B = 0, A ≠ 0 dan C ≠ 0 maka persamaannya menjadi Ax + C = 0 atau $x = \frac{-C}{A}$, menunjukkan persamaan garis yang sejajar sumbu y, melalui titik $(-\frac{C}{A}, 0)$.

c) Bila C = 0, A ≠ 0 dan B ≠ 0 maka persaannya menjadi Ax +By = 0, maka $y = \frac{-A}{B}x$, menunjukkan persamaan garis yang melalui 0 dan mempynuyai gradien:m = $\frac{-A}{B}$

d) Bila A = C = 0, dan B ≠ 0 maka terdapat By = 0 atau y = 0
Menunjukkan persamaan sumbu x.

e) Bila B = C = 0, dan A ≠ 0 maka terdapat Ax = 0 atau x = 0
Menunjukkan persamaan sumbu y.

f) Bila A, B dan C tidak nol, maka maka persamaannya adalah
Ax + By + C = 0 atau
$y = \frac{-A}{B}x - \frac{C}{B}$ Menunjukkan persamaan garis yang mempunyai koefisien arah $\frac{-A}{B}$ dan memotong sumbu y di titik $(0, \frac{-C}{B})$

Mengingat hal-hal di atas maka persamaan umum suatu garis lurus adalah:

Ax + By + C = 0
(A, B dan C tidak bersama-sama nol)

2-4 Suatu Garis Lurus Ditentukan Oleh Dua Buah Titiknya

Diketahui $T_1(x_1, y_1)$ dan $T_2(x_2, y_2)$. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik-titik T_1 dan T_2.

Melihat persamaan garis lurus y = mx + n, maka setiap harga m dan n yang nyata,

$y = mx + n$ menentukan suatu garis lurus. m dan n disebut parameter.

Jika dari suatu garis lurus diketahui 2 buah titiknya, maka persamaan garisnya dapat dicari.

Bukti:

Misalkan persamaan garisnya $y = mx + n$ dan titik-titik yang diketahui pada garis itu $T_1(x_1, y_1)$ dan $T_2(x_2, y_2)$ maka berlaku

$y_1 = mx_1 + n$ .... (1) dan

$y_2 = mx_2 + n$ .... (2)

Dari kedua persamaan ini m dan n dapat dicari dan persamaan garisnya dapat ditentukan.

Cara kedua

Jika dimisalkan persamaan garisnya $Ax + By + C = 0$. Dalam persamaan ini tampaknya ada 3 parameter . Tetapi untuk menentukan persamaan garisnya tidak perlu dicari besarnya parameter itu. Tetapi cukup dengan perbandingan saja. Jika $A \neq 0$ persamaannya dapat ditulis $x + \frac{B}{A}y + \frac{C}{A} = 0$.

Contoh :

Carilah persamaan garis lurus yang melalui titik A(1, -1) dan B(3, 3)

Penyelesaian: Cara Pertama

Misalkan persamaan garisnya $y = mx$.

Titik A pada garis maka berlaku $-1 = m + n$ . . . . . . (1)

Titik B pada garis maka berlaku $3 = 3m + n$ . . . . . (2)

$$
\begin{array}{rl}
-1 = m + n & \ldots\ldots (1) \\
3 = 3m + n & \ldots\ldots (2) \\
\hline
-4 = -2m & -
\end{array}
$$

$m = 2$ (m ini disubstitusikan ke persamaan (1) atau (2)

Jika disubtitusikan ke persamaan (1) diperoleh

$-1 = m + n$

$-1 = 2 + n$

$n = -3$

Jadi persamaannya $y = mx + n$ untuk $m = 2$ dan $n = -3$, diperoleh

$$y = 2x - 3.$$

Cara kedua :

Misal persamaan garisnya $Ax + By + C = 0$

Titik A pada garis maka berlaku $A - B + C = 0$ . . . . . (1)

Titik B pada garis maka berlaku $3A + 3B + C = 0$ . . . . (2)

$$\begin{array}{l} A - B + C = 0 \quad \ldots\ldots (1) \\ 3A + 3B + C = 0 \quad \ldots\ldots (2) \\ \hline -2A - 4B = 0 \end{array} \; -$$

atau $A = -2B$ ($A = -2B$ disubstitusikan ke persamaan (1) atau (2))

$A - B + C = 0$

$-2A - B + C = 0$

$C = 3B$.

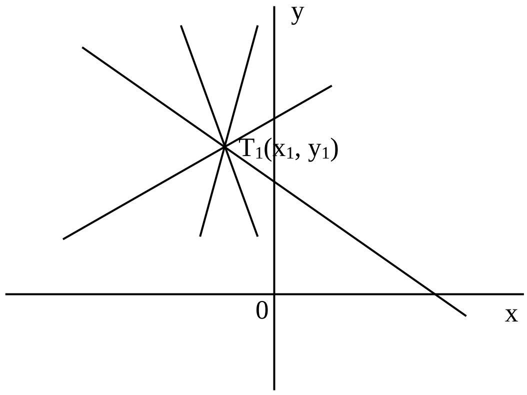
Jadi persamaannya $-2Bx + By + 3B = 0$ atau $-2x + y + 3 = 0$

2.5 Persamaan Garis Lurus yang Melalui Satu Titik

Akan dicari persamaan garis yang melalui titik $A(x_1, y_1)$. Misalkan persamaan garisnya $y = mx + n$ dengan m dan n belum diketahui. Garis ini melalui $A(x_1, y_1)$ jadi persamaannya berlaku $y_1 = mx_1 + n$ atau $n = y_1 - mx_1$ jadi persamaan garis tersebut $y = mx_1 + y_1 - mx_1$ atau

$y - y_1 = m(x - mx_1)$ atau

$\mathbf{y - y_1 = m(x - x_1)}$.



Gambar 14

Harga m belum dapat kita tentukan, maka pada m dapat diberi bermacam-macam harga, untuk setiap harga m menentukan sebuah garis yang melalui T.

Maka persamaan

$y - y_1 = m(x - x_1)$

disebut persamaan kipas garis yang melalui T atau kipas garis dengan puncak T.

Dengan cara ini dapat ditentukan bahwa persamaan sebuah garis yang melalui $T(x_1, y_1)$ dan mempunyai koefisien arah m_1 yaitu :

$$\mathbf{y - y_1 = m(x - x_1).}$$

Contoh:

Carilah persamaan garis yang melalui titik T (-1, 2) dan mengimpit sudut 135^o dengan sumbu x positif.

Jawab : Misal persamaan garis yang ditanyakan adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Persamaan garis yang melalui T (-1, 2)

$y - 2 = m(x - (-1))$

$m = \text{tg } 135^o = -1$

Jadi persamaan garis yang melalui T(-1, 2) dan mengapit sudut 135^o dengan sumbu x adalah

$y - 2 = -1(x + 1)$ atau

$y = -x + 1$ atau

$x + y - 1 = 0$

2-6 Persamaan Suatu Garis Lurus Yang Diketahui 2 Buah Titiknya

Kita akan mencari persamaan garis yang melalui titik-titik $T_1(x_1, y_1)$ dan $T_2(x_2, y_2)$.

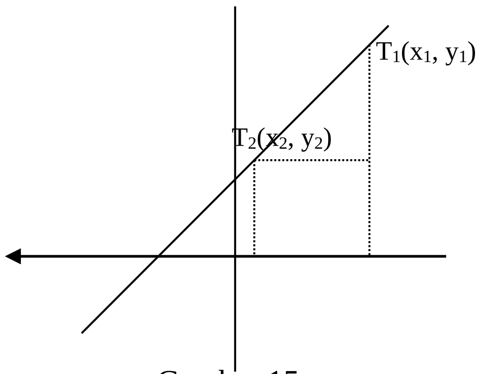
Persamaan garis yang melalui $T_1(x_1, y_1)$ adalah

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \ldots\ldots\ (1)$$

Garis ini melalui $T_2(x_2, y_2)$, jadi berlaku

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1) \quad \ldots\ldots\ (2)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Gambar 15

Jadi persamaan garis yang melalui $T_1(x_1, y_1)$ dan $T_2(x_2, y_2)$ adalah:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

atau

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Keterangan : dari gambar tampak pula, bahwa koefisien arah garis penghubung $T_1(x_1, y_1)$ dan $T_2(x_2, y_2)$ adalah

$$\textbf{Tg}\ \alpha = \textbf{Tan}\ \alpha = \mathbf{m} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Persamaan garis yang melalui $T_1(x_1, y_1)$ dan $T_2(x_2, y_2)$ dapat pula mempunyai bentuk lain.

Misalkan persamaan garisnya

$Ax + By + C = 0 \quad \ldots\ldots\ (1)$

Garis tersebut melalui $T_1(x_1, y_1)$, maka harus dipenuhi

$Ax_1 + By_1 + C = 0 \ldots\ (2)$

Garis melalui $T_2(x_2, y_2)$, maka dipenuhi

$Ax_2 + By_2 + C = 0 \quad \ldots\ldots\ (3)$

Supaya susunan 3 persamaan homogen dalam A, B dan C memberikan satu penyelesaian, haruslah

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ atau } \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Persamaan inilah yang kita cari

Dari persamaan-persamaan yang diperoleh, kita dapat mencari syarat supaya 3 buah titik $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2)$ dan $T_3(x_3, y_3)$ terletak segaris lurus (*collinear*).

Jika T_1, T_2 dan T_3 terletak pada satu garis lurus, maka T_3 harus terletak pada garis T_1T_2. Jadi terdapatlah syaratnya :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \text{ atau dengan bentuk determinan}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Contoh:

Tentukan persamaan garis yang melalui A(-2, -3) dan B(4, 0).

Penyelesaian: Misal persamaannya:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y + 3}{0 + 3} = \frac{x + 2}{4 + 2}$$

$\Leftrightarrow$ 3(x + 2) = 6(y +3)

$\Leftrightarrow$ 3x + 6 = 6y + 18

$\Leftrightarrow$ 3x – 6y + 6 – 18 = 0

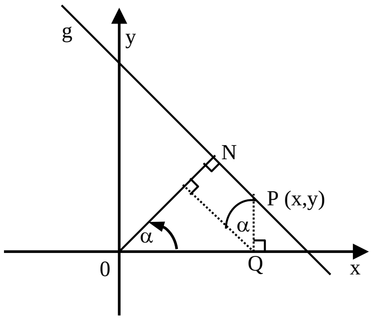
$\Leftrightarrow$ 3x – 6y –12 = 0

$\Leftrightarrow$ x – 2y – 4 = 0

Jadi persamaan garis yang melalui titik A(-2, -3) dan B(4, 0)

Adalah x – 2y – 4 = 0

2-7. PERSAMAAN NORMAL GARIS LURUS



Gambar 16

Dalam pembahasan di atas, kita telah mempelajari persamaan garis lurus yang berbeda-beda bentuknya. Pada kegiatan ini, kita akan mempelajari bentuk persamaan garis lurus jenis lain, yaitu persamaan normal (persamaan Hess) suatu garis lurus.

Perhatikan gambar 16. | ON | = n disebut panjang normal garis g. ON tegak lurus pada garis g. α adalah sudut yang diapit oleh normal ON dan sumbu x positif. Ambil sebarang titik P (x,y) pada garis g. Q adalah proyeksi titik P pada sumbu x dan R adalah proyeksi titik Q pada ON.

$\angle$ OQR + $\theta = 90^o$ dan

$\angle$ OQR + $\angle$ PQR = 90^o

maka $\angle$ PQR = θ

$| OR | = | OQ | \cos \alpha = x \cos \theta$

$| RN | = | PQ | \sin \alpha = y \sin \theta$

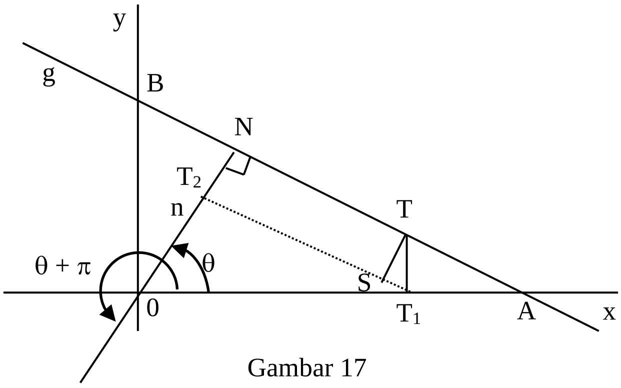
Perhatikan bahwa | OR | + | RN | = | ON |, maka $x \cos \theta + y \sin \theta = n$

Karena titik P sebarang titik pada garis lurus g, maka hubungan terakhir ini menyatakan persamaan garis g. Persamaan bentuk itu dinamakan persamaan normal dari Hess atau disingkat persamaan normal atau persamaan Hess. Karena n, adalah panjang normal, yaitu jarak, maka n suatu bilangan positif.

Untuk lebih jelasnya dapat diterangkan sebagai berikut: suatu garis lurus dapat pula ditentukan persamaannya, apabila diketahui panjang normalnya (garis yang melalui 0 dan tegak lurus garis tersebut) dan sudut yang diapit oleh normal itu dengan sumbu x (gambar 17).

ON : normal, disingkat n

θ : sudut yang diapit normal dengan sumbu x



Gambar 17

Diambil sebarang titik $T(x_1, y_1)$ pada garis g.

Proyeksi OT pada ON sama dengan proyeksi garis patah OT_1T pada ON.

Terdapat :

Pada $\Delta\ T_1OT_2$ siku-siku di T_2 maka berlaku

$$\text{Cos}\ \theta = \frac{OT_2}{OT_1}$$

$$OT_2 = OT_1 \text{ Cos } \theta$$

$$\text{Sin}\ \alpha = \frac{ST}{TT_1} = \frac{NT_2}{TT_1}$$

$$NT_2 = TT_1 \text{ Sin } \theta = T_2N$$

$$ON = OT_2 + T_2N$$

$$ON = OT_1 \cos \alpha + T_1T \sin \pi$$

Sehingga : $n = x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta$

Hubungan ini berlaku untuk setiap titik T(x, y) pada garis g, sehingga persamaan g adalah :

$x \cos \alpha + y \sin \alpha = n$ atau $x \cos \alpha + y \sin \alpha - n = 0$

Persamaan ini disebut persamaan normal dari Hesse atau dapat disingkat persamaan normal atau persamaan Hesse.

Karena dalam rumus itu n menunjukkan jarak, maka pada umumnya diambil posititf. Jika persamaan garis g ditulis dengan n yang negatif, maka persamaan menjadi $x \cos (\alpha + \pi) + (y \sin (\alpha + \pi) = -n$ dan jika ini diubah hasilnya juga $x \cos \alpha + y \sin \alpha = n$.

Mengingat hal ini, maka untuk selanjutnya kita membuat perjanjian saja, bahwa *n positif*.

2.8. Mengubah Persamaan Umum Menjadi Persamaan Normal

Persamaan umum garis lurus $Ax + By + C = 0$ dapat diubah menjadi persamaan normal dengan mengalikan kedua ruasnya dengan suatu faktor tertentu.

Misalkan faktor itu λ, maka

$$\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$$

Jika ini suatu persamaan normal, harus dipenuhi

$$\lambda A = \cos \theta \text{ dan } \lambda B = \sin \psi \text{ serta } \lambda C < O$$

$\lambda^2 A^2 = \cos^2 \theta$

$\lambda^2 B^2 = \sin^2 \theta$

――――――― +

$\lambda^2 A^2 + \lambda^2 B^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$

$\lambda^2 A^2 + \lambda^2 B^2 = 1$ (mengingat $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$)

$\lambda^2 (A^2 + B^2) = 1,$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{(A^2 + B^2)}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A_2 + B_2}}$$

Mengingat, bahwa λ C = $-$ n dan n selalu positip, maka tanda λ dipilih demikian, hingga berlawanan dengan tanda dari C, artinya jika C positif (C > 0), maka λ diambil negative ($\lambda < 0$) dan jika C negatif (C < 0), maka λ diambil positif ($\lambda > 0$).

Jadi persamaan normal itu berbentuk

$$\pm\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A\ \ +B^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0\right.$$

Contoh sederhana : Ubahlah persamaan-persamaan berikut menjadi persamaan normal

a) 5x – 12y = 19 dan

b) 3x – y + 6 = 0

Hitunglah kemudan α dan n

Perhitungan :

a) 5x – 12y – 19 = 0

$$\frac{1}{\lambda}=\pm\sqrt{A^2+B^2}=\pm\sqrt{25+144}=\pm\ 13$$

Karena nilai C = -19 (C < 0), maka λ dipilih positif ($\lambda > 0$)

Jadi λ = 13

Persamaan normalnya berbentuk $\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y-\frac{19}{13}=0$

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{5}{13}\\ \sin\alpha&=-\frac{12}{13}\end{aligned}\right\}\quad \alpha = 292^o\ 37'\ 11'' \text{ atau } \alpha = -67^o\ 22'\ 49''\text{(Kuadran IV)}\qquad n=1\frac{6}{13}.$$

b) 3x – y + 6 = 0

$$\frac{1}{\lambda}=\pm\sqrt{A^2+B^2}=\pm\sqrt{4+9}=\pm\sqrt{10}$$

Karena C= 6 (positif) maka λ diambil negative yaitu $\lambda = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

Persamaan normalnya berbentuk $-\dfrac{3}{\sqrt{10}}x + \dfrac{1}{\sqrt{10}}y - \dfrac{6}{\sqrt{10}} = 0$

atau $\dfrac{-3}{10}\sqrt{10x} + \dfrac{1}{10}\sqrt{10y} - \dfrac{3}{5}\sqrt{10} = 0$

$\cos\alpha = -\dfrac{3}{10}\sqrt{10}$

$\sin\alpha = \dfrac{1}{10}\sqrt{10}, \quad n = \dfrac{3}{5}\sqrt{10}$

Jadi $\alpha = 161^{o}\ 34'$

2.9. Persamaan suatu garis lurus jika diketahui titik-titik potongnya dengan sumbu-sumbu x dan y

Misalkan suatu garis memotong sumbu x di A(a, 0) dan sumbu y di B (0, b) (gambar 18)

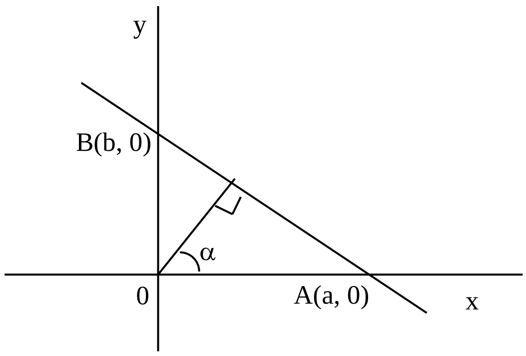
Menurut persamaan Hesse, untuk suatu garis lurus maka tampak persamaan garis g ialah x cos α + y sin α = n sedang dari gambar dapat kita lihat, bahwa

$\cos\alpha = \dfrac{n}{a}$ dan $\sin\alpha = \dfrac{n}{b}$

Jadi

$x\dfrac{n}{a} + y\dfrac{n}{b} = n$ dan terdapatlah

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$



Gambar 18

Persamaan ini disebut persamaan pada segmen-segmen sumbu untuk suatu garis lurus atau dengan singkat persamaan segmen.

Persamaan ini tidak berlaku, apabila garisnya melalui 0.

Persamaan segmen ini sebenarnya dapat juga kita turunkan dari persamaan umum Ax + By + C = 0 yang titik-titik potongnya dengan sumbu x dan y adalah $(-\frac{C}{A}, 0)$ dan $(0, -\frac{C}{B})$.

$$Ax + By + C = 0 \rightarrow \quad Ax + By = -C \quad (A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0)$$

$$\frac{x}{\frac{C}{A}} + \frac{y}{\frac{C}{B}} = 1$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

2.10. Persamaan Parameter

Seperti telah kita ketahui setiap persamaan yang memuat dua variabel, berpangkat satu atau lebih, menurut ilmu ukur menunjukkan suatu persamaan garis lurus atau lengkung. Jika variabel-variabel itu x dan y, maka persamaan itu menunjukkan suatu relasi antara x dan y.

Mungkin pula, bahwa untuk menyajikan relasi antara x dan y dipakai suatu variabel ketiga atau variabel penolong yang disebut parameter. Misalnya :

$$x = -2 + t$$
$$y = 1 + 4t$$

Dapat mudah kita lihat, bahwa untuk setiap harga yang dapat dicapai oleh t akan terdapat sepasang harga x dan y. Jadi berarti bahwa persamaan diatas menunjukkan persamaan suatu garis, misalnya t = 1, maka x = -1, y = 5 dan terdapat (-1, 5) dan seterusnya.

Jika x yang ditentukan, maka dari persamaan yang pertama maka hanya t yang dapat dicari. Dengan memasukkan harga t dalam persamaan kedua akan terdapat harga y. Misalnya x = 2, maka t = 4 dan y = 16 dan terdapat (2, 16).

Jika t dapat dicari dari salah satu persamaan dan kemudian dimasukkan dalam persamaan lainnya, maka akan terdapat suatu persamaan dalam x dan y. Misalnya dari persamaan pertama kita dapat t = x + 2, jika ini kita masukkan dalam persamaan kedua terdapat x = 4x + 9, suatu persamaan garis lurus.

Jika dalam suatu persamaan garis untuk menyatakan relasi antara x dan y digunakan variabel ketiga, misalnya $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, maka variabel ketiga ini (dalam contoh diatas ialah t), disebut *parameter* dan persamaannya disebut *persamaan parameter* dari garis tersebut. Mencari relasi antara x dan y dengan menghilangkan parameter disebut *mengeliminir parameter* itu dari persamaan.

Contoh sederhana : Suatu garis lengkung mempunyai persamaan parameter

$$x = r \cos \mu$$

$$y = r \sin \mu$$

dengan parameter μ

Dengan mengeliminir μ akan terdapat persamaan garis itu

$$\left.\begin{aligned} \cos\mu &= \frac{x}{r} \rightarrow \cos^2\mu = \frac{x^2}{r^2} \\ \sin\mu &= \frac{y}{r} \rightarrow \sin^2\mu = \frac{y^2}{r^2} \end{aligned}\right\} \quad 1 = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} \quad \text{atau} \quad x^2 + y^2 = r^2$$

Ini adalah persamaan garis lengkung tersebut.

2.11. Persamaan parameter suatu garis lurus yang diketahui salah satu titiknya dan arahnya.

Diketahui suatu garis lurus mempunyai titik $A(x_1, y_1)$ dan mengapit sudut α dengan sumbu x positif (Gambar 18).

Diambil sebarang titik (x, y) pada garis tersebut

Tampak, bahwa $x = OT_1 = OA_1 + A_1T_1 = x_1 + AT \cos\alpha$

$y = OT_2 = OA_2 + A_2T_2 = y_1 + AT \sin\alpha$

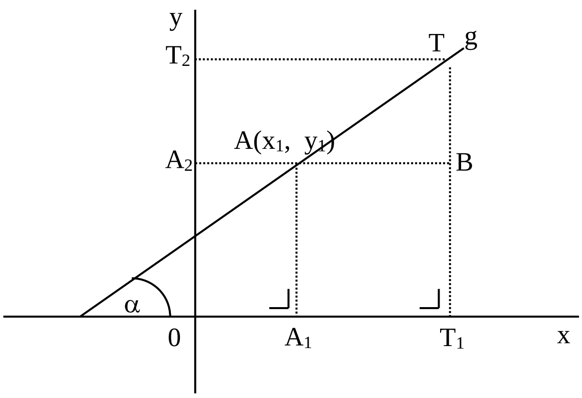
Untuk setiap titik T pada garis g berlaku hubungan antara x, y dengan sudut apit antara garis itu dengan sumbu x sebagai berikut

$$\begin{cases} x = x_1 + AT\cos\alpha \\ y = y_1 + AT\sin\alpha \end{cases}$$

Jika T berjalan pada garis g, maka jarak AT berubah-ubah. Maka AT dapat diambil sebagai parameter. Misalkan AT = r, maka akan terdapat persamaan dari garis lurus itu, yaitu

$$\begin{cases} x = x_1 + r\cos\alpha \\ y = y_1 + r\sin\alpha \end{cases}$$

dengan parameter r.



Gambar 19

Jika parameter r kita dieleminir, kita akan mendapatkan persamaan garis lurus dalam koordinat orthogonal.

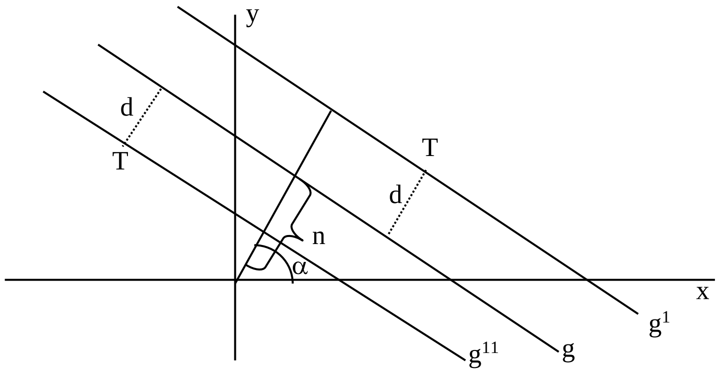
$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\sin\alpha} \quad \text{atau} \quad y - y_1 = \text{tg}\,\alpha\,(x - x_1)$$

Contoh sederhana: Suatu garis yang melalui titik T(3, -4) dan mengapit sudut 120^0 dengan sumbu x, mempunyai persamaan parameter.

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 - \frac{1}{2}r \\ y = -4 + \frac{1}{2}r\sqrt{3} \end{array}\right\} \text{dengan parameter r atau } \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -4 + t\sqrt{3} \end{cases} \text{dengan parameter t.}$$

3. 12. Jarak suatu titik dari garis lurus

Dipandang suatu garis lurus mempunyai persamaan $x \cos \alpha + y \sin \alpha - n = 0$ dan suatu titik $T(x_1, y_1)$ yang berjarak d dari garis tersebut. Akan kita cari berapa d ini (lihat gambar 19).



Gambar 20

Misalkan T dan O terletak pada pihak yang berlainan dari g dan T terletak pada garis g^1 yang sejajar g. Persamaan g^1 adalah

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - (n + d) = 0$$

Maka berlaku $x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - (n + d) = 0$ dan terdapat :

$$d = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - n$$

Andaikan T dan O terletak sepihak dari garis g, dan T terletak pada garis g^{11} yang sejajar g. Persamaan g^{11} ialah

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - (n - d) = 0$$

Maka berlakulah $x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - (n - d) = 0$ dan

$$d = -(x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - n)$$

Jika untuk jarak diambil harga mutlaknya, maka dapat ditulis

$$d(T, g) = d = \left| x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - n \right| .$$

Jadi jarak $T(x_1, y_1)$ ke garis $x \cos \alpha + y \sin \alpha - n = 0$ terdapat dengan memasukkan koordinat-koordinat T dalam ruas kiri persamaan garis itu yang kemudian diambil harga mutlaknya.

Untuk mengetahui apakah letak g dengan 0 sepihak atau berlainan pihak dari garis g, perlu kita lihat tanda yang sebenarnya dari d.

Jarak O terhadap garis g negatif, jadi jika d < 0, maka T dengan 0 pada satu pihak dari garis g, jika d > 0, maka T dengan O pada pihak yang berlainan dari garis g.

Rumus jarak tersebut berlaku, bila persamaan garisnya suatu persamaan normal.

Untuk mencari jarak suatu titik $T(x_1, y_1)$ dari garis yang mempunyai persamaan umum Ax + By + C = 0, maka persamaan garsinya harus diubah dahulu menjadi persamaan normal. Akan terdapatlah :

$$d(T, g) = d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Jarak $T(x_1, y_1)$ dari garis y = mx + n menjadi

$$d = \frac{|y_1 - mx_1 - n|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

Contoh sederhana : Carilah jarak titik T sampai garis g, jika

a) T(2, 3) dan g : 3x – y + 4 = 0
b) T(3, 5) dan g : y = 5x –3

Perhitungan:

a) $$d = \frac{|6 - 3 + 4|}{\sqrt{9 - 1}} = \left| \frac{-7}{\sqrt{10}} \right| = \frac{7}{10}\sqrt{10}$$

Tanda d yang sebenarnya adalah positif, jadi T dengan O pada pihak yang berlainan dari g.

b) $$d = \left| \frac{5 - 15 + 3}{\sqrt{1 + 25}} \right| = \left| \frac{-7}{\sqrt{26}} \right| = \frac{7}{26}\sqrt{26}$$

Tanda d yang sebenarnya adalah negatif, jadi T dengan O terletak pada satu pihak dari garis g.

<u>*Keterangan :*</u>

Suatu garis lurus membagi bidang datar dalam 2 bagian yang disebut daerah positif dan daerah negatif dari garis tersebut. Untuk dapat menentukan apakah suatu titik terletak didaerah positif atau daerah negatif dari garis tersebut, maka persamaan garisnya diuabah dahulu sedemikian, hingga ruas kanannya sama dengan nol.

Suatu titik terletak **di daerah positif dari garis itu**, apabila setelah koordinat-koordinat titik itu disubstitusikan dalam ruas kiri dari persamaan garis, akan memberikan harga yang **positif.**

Sedang suatu titik terletak **didaerah negatif dari garis**, apabila setelah koordinat-koordinat titik itu disubstitusikan dalam ruas kiri dari persamaan garis akan memberikan harga yang **negatif.**

Untuk dapat menentukan dengan cepat daerah-daerah suatu garis lurus disubstitusikan kordinat-koordinat titik O(0, 0). Jika terdapat harga yang positif , berarti titik O terletak di daerah positif , sedang kalau terdapat harga yang negatif, berarti titik O terletak di daerah negatif. Jika suatu garis mempunyai persamaan normal, maka titik O selalu terletak didaerah negatifnya.

Contoh : Selidiki, apakah titik (-2, 5) dan (0, 3) terletak sepihak atau pada pihak yang berlainan dari garis $9x - 7y - 3 = 0$.

Penyelidikan : $9x - 7y - 3 = 0$

(-2, 5) dimasukkan : $-18 - 35 - 3 = -56 < 0$

(0, 3) dimasukkan : $-21 - 3 = -24 < 0$

Kedua titik terletak sepihak, kedua-duanya didaerah negatif dari garis $9x - 7y - 3 = 0$. Titik O(0, 0) pun terletak di daerah negatif garis itu.

(jika persamaan garisnya $7y - 9x + 3 = 0$, maka tanda-tanda di atas harus dibalik, misalnya < 0 menjadi > 0).

BAB III

DUA BUAH GARIS LURUS

3.1. Kedudukan Suatu Garis terhadap Garis Lain

Misalkan diketahui persamaan dua buah garis lurus

$G_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0$ .... (1)

$G_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0$ .... (2)

Kalau dilihat letak dari garis-garis G_1 dan G_2 itu maka ada beberapa kemungkinan:

a) kedua garis itu berpotongan atau
b) kedua garis itu sejajar atau
c) kedua garis itu berimpit

Sekarang akan cari dahulu titik potong kedua garis tersebut. Titik potong ini koordinat-koordinat harus memenuhi kedua persamaan garis itu. Jadi mencari titik potong garis-garis itu sama saja dengan mencari harga-harga x dan y yang memenuhi kedua persamaan itu atau berarti menyelesaikan susunan persamaan tersebut

$$\begin{array}{l|c|} A_1x + B_1y + C_1 = 0 & +B_2 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 & -B_1 \end{array}$$

$$\overline{} \; +$$

$$(A_1B_2 - A_2B_1)x + B_2C_1 - B_1C_2 = 0$$

$$x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

Dengan jalan yang sama akan terdapat : $y = \dfrac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$

Penyelesaian ini dapat juga dikerjakan dengan aturan Cramer, dengan menggunakan determinan.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

Baiklah sekarang ditinjau kemungkinan-kemungkinannya

1) Jika $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ atau $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ maka akan terdapat satu pasang harga x dan harga y, berarti kedua persamaan itu bebas. Garis-garis itu mempunyai 1 titik potong.

2) $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ atau $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$

$$\left.\begin{array}{l} A_2C_1 - A_1C_2 \neq 0 \\ \\ B_1C_2 - B_2C_1 \neq 0 \end{array}\right\} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

Tidak terdapat pasangan harga x dan y di tak terhingga, kedua persamaan itu bertentangan.

Dari $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ terdapat bahwa $\frac{-A_1}{B_1} = \frac{-A_2}{B_2}$.

Jadi koefisien arah kedua garis itu sama berarti bahwa kedua garis itu sejajar. Jika kita pandang $A_1B_2 - A_2B_1$ sebagai penyebut koordinat-koordinat titik potong, maka koordinat-koordinat itu makin lama makin besar, apabila $A_1B_2 - A_2B_1$ mendekati nol. Kalau $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, tampak bahwa koordinat-koodinat titik potongnya tak terhingga besarnya atau potongnya di jauh tak terhingga.

Maka dapat dikatakan, bahwa 2 garis sejajar berpotongan dijauh tak terhingga.

3) $$\left.\begin{array}{l} A_1B_2 - A_2B_1 = 0 \\ A_2C_1 - A_1C_2 = 0 \\ B_1C_2 - B_2C_1 = 0 \end{array}\right\} \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Tampak bahwa kedua persamaan itu bergantungan. Maka akan terdapat tak terhingga banyaknya pasangan harga x dan y yang memenuhi kedua persamaan tersebut.

Titik-titik potong kedua garis tak terhingga banyaknya, berarti kedua garis tersebut berimpit.

4) $$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} A_1B_2 - A_2B_1 = 0 \\ A_2C_1 - A_1C_2 = 0 \end{array}\right\} \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} ; \frac{A_1}{A_2} = \frac{C_1}{C_2} \\ B_1C_2 - B_2C_1 \neq 0 \rightarrow \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \end{array}\right\}$$

Ini hanya mungkin jika $A_1 = A_2$

Jika $A_1 = A_2 = 0$, maka garis-garis itu persamaannya

$B_1y + C_1 = 0$ dan $B_2y + C_2 = 0$

Jadi kedua garis itu sejajar dengan sumbu x.

5) $$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} A_1B_2 - A_2B_1 = 0 \\ B_1C_2 - B_2C_1 = 0 \end{array}\right\} \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} : \frac{C_1}{C_2} = \frac{B_1}{B_2} \\ A_1C_2 - A_2C_1 \neq 0 \rightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \end{array}\right\}$$

Ini hanya mungkin jika $B_1 = B_2$

Jika $B_1 = B_2 = 0$, maka garis-garis itu persamaannya

$A_1x + C_1 = 0$ dan $A_2x + C_2 = 0$

Jadi kedua garis itu sejajar dengan sumbu y.

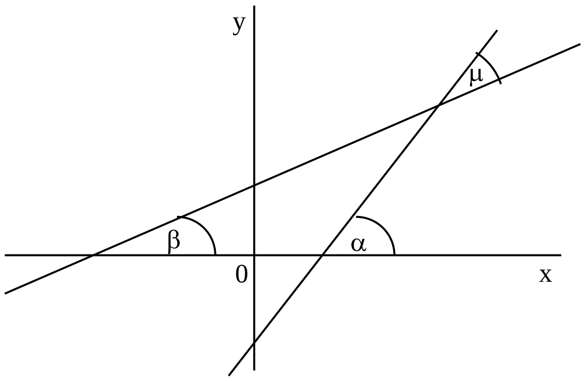
Jika garis-garis lurus itu mempunyai persamaan-persamaan $y = m_1x + n_1$ dan $y = m_2x + n_2$, maka mudah dilihat bahwa,

a) Jika $m_1 \neq m_2$, maka kedua garis itu akan berpotongan.

b) Jika $m_1 = m_2$ dan $n_1 \neq n_2$, maka kedua garis itu akan sejajar.

c) Jika $m_1 = m_2$ dan $n_1 = n_2$, maka kedua garis itu akan berimpit.

3.2. Sudut Antara Dua Garis Lurus



Gambar 21

Misalkan diketahui garis-garis

$G_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$G_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0$

Koefisien-koefisien arah garis-garis tersebut ialah

$$-\frac{A_1}{B_1} = \text{tg } \alpha \quad \text{dan} \quad -\frac{A_2}{B_2} = \text{tg } \beta$$

Jika sudut antara kedua garis itu disebut μ, maka $\mu = \alpha - \beta$ (gambar 21).

$$\text{tg } \mu = \text{tg } (\alpha - \beta) = \frac{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta}{1 + \text{tg } \alpha \ \text{tg } \beta}$$

$$\frac{-\frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2}}{1 + (-\frac{A_1}{B_1}).(-\frac{A_2}{B_2})} = -\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$$

Hasil tersebut mungkin positif atau negatif.

Dari tg μ yang positif terdapat sudut lancip dan dari tg yang negatip terdapat pelurusnya.

$$\text{tg } \mu = \left| \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} \right|$$

Dari hasil ini dapat kita lihat pula, bahwa μ akan sama dengan nol apabila $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$.

Jadi kedua garis itu akan sejajar atau berimpit apabila $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ atau apabila koefisien-koefisien arahnya sama.

Dan μ akan sama dengan 90^0, apabila tg $\mu \rightarrow \infty$

atau $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

Jadi kedua garis itu akan tegak lurus sesamanya apabila $A_1A_2 - B_1B_2 = 0$ atau apabila hasil perbanyakan koefisien-koefisien arahya sama degan –1.

$$(\frac{A_1}{B_1} \times \frac{A_2}{B_2} = -1)$$

Jika kedua garis itu persamaan-persamaannya :

$g_1 : y = m_1 x + n_1$

$g_2 : y = m_2 x + n_2$

maka tampak, bahwa $\text{tg } \mu = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} \right|$

Kedua garis akan sejajar, apabila $m_1 = m_2$, tetapi $n_1 \neq n_2$.

Kedua garis akan berimpit apabila $m_1 = m_2$ dan $n_1 = n_2$.

Kedua garis akan tegak lurus, sesamanya apabila $1 + m_1m_2 = 0$ atau $m_1 = -\frac{1}{m_2}$.

3.3. Berkas Garis

Diketahui persamaan dua buah garis

$G_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0$ dan

$G_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Dibentuk persamaan $G_1 + \lambda G_2 = 0$ ...... (1)

$(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$.

atau $(A_1 + \lambda A_2)x + (B_1 + \lambda B_2)y + (C_1 + \lambda C_2) = 0$

λ dapat diberi setiap harga dari $-\infty$ sampai ∞.

Persamaan di atas adalah suatu persamaan linear dalam x dan y jadi untuk setiap harga λ persamaan itu menunjukakan persamaan suatu garis lurus.

Persamaan (1) disebut persamaan berkas garis atau kipas garis dan setiap garisnya disebut anggota berkas.

Jika $\lambda = 0$, akan terdapat $G_1 = 0$

Jika $\lambda = \infty$, akan terdapat $G_2 = 0$. Ini dapat dilihat dari bentuk $\frac{1}{\lambda} G_1 + G_2 = 0$.

$G_1 = 0$ dan $G_2 = 0$ adalah juga anggota-anggota dari berkas dan disebut <u>anggota-anggota dasar</u> atau <u>anggota-anggota basis</u>.

Setiap titik dari bidang datar dilalui oleh suatu anggota dari berkas. Ini mudah dibuktikan dengan mengambil sebarang titik (x_1,y_1) dari bidang datar dan koordinat-kordinat dimasukkan dalam persamaan berkas. Tentu akan terdapat suatu harga λ yang akan memberikan satu persamaan garis, anggota dari berkas.

λ dalam persamaan (1) disebut parameter dari berkas.

Untuk menghindari harga ∞ dari λ, maka persamaan berkas dapat ditulis dengan dua parameter, misalnya

$\mu G_1 + \delta G_2 = 0$

Ini akan memberikan $G_1 = 0$, apabila $\mu = 0$ dan akan memberikan $G_2 = 0$, apabila $\delta = 0$. Kemungkinan $\mu = \delta = 0$ tidak dimasukkan.

Jika $G_1 = 0$ dan $G_2 = 0$ persamaan dua buah garis yang sejajar, maka semua anggota berkas $G_1 + \lambda G_2 = 0$ akan sejajar dengan anggota-anggota dasar. Titik dasarnya ada di jauh tak terhingga.

Persamaan berkas garis baik sekali dipakai untuk menyelesaikan soal-soal yang kalau diselesaikan dengan jalan biasa memberikan jalan dan perhitungan yang panjang.

Contoh : Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik potong garis-garis

$G_1 \equiv x + y + 3 = 0$ dan

$G_2 = x + 2y + 2 = 0$ dan tegak lurus pada garis.

$G_3 \equiv -x + 3y - 1 = 0$

Jika soal ini diselesaikan dengan jalan biasa, maka harus dicari dahulu titik potong $G_1 = 0$ dan $G_2 = 0$, kemudian mencari garis yang melalui titik potong itu dan tegak lurus pada $G_3 = 0$. Cara ini kurang baik.

Penyelesaian : Setiap garis yang melalui titik potong $G_1 = 0$ dan $G_2 = 0$ adalah anggota dari berkas $G_1 + \lambda G_2 = 0$

$x + y + 3 + \lambda (x + 2y + 2) = 0$

$(1 + \lambda)x + (1 + 2\lambda)y + (3 + 2\lambda) = 0$

Kita cari anggota berkas yang tegak lurus pada garis

$-x + 3y - 1 = 0$

Supaya 2 buah garis tegak lurus sesamanya haruslah dipenuhi $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Jadi kita cari harga λ yang memenuhi

$-(1 + \lambda) + 3(1 + 2\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow -1 - \lambda + 3 + 6\lambda = 0$

$\Leftrightarrow 5\lambda + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 5\lambda = -2$

$\Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{2}{5}$

Harga $\lambda = -\dfrac{2}{5}$, disubstitusikan pada persdamaan berkas

$(1 + \lambda)x + (1 + 2\lambda)y + (3 + 2\lambda) = 0$

Garis yang ditanyakan ialah :

$$(1-\frac{2}{5})x + (1-\frac{4}{5})y + (3-\frac{4}{5}) = 0 \quad \text{atau}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{5}x + \frac{1}{5})y + \frac{11}{5} = 0$$

$\Leftrightarrow \quad 3x + y + 11 = 0.$

Jadi persamaan garis lurus yang melalui titik potong garis

$G_1 \equiv x + y + 3 = 0$ dan $G_2 = x + 2y + 2 = 0$ serta tegak lurus pada garis.

$G_3 \equiv -x + 3y - 1 = 0$ adalah $\mathbf{3x + y + 11 = 0.}$

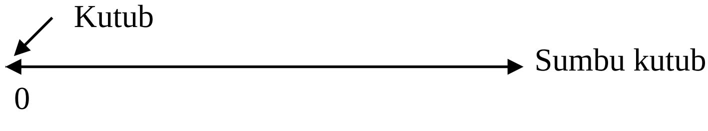
BAB IV
KOORDINAT KUTUB (POLAR)

4.1. Menggambar Titik pada Koordinat Kutub

Dalam bab sebelumnya, telah dipelajari koordinat Kartesius (koordinat kartesius) sistem koordinat ini merupakan dasar dari geometri analitik dan sangat membantu pengembangan kalkulus diferensial dan kalkulus integral. Dengan sistem koordinat Kartesius ini, kita telah dapat menyatakan persamaan-persamaan garis lurus, lingkaran ellips, parabola dan hiperbola serta garis lengkung lainnya.

Sistem koordinat Kartesius menggunakan dua garis lurus yang tegak lurus dan jarak berarah, kita dapat menentukan kedududkan suatu titik pada bidang. Cara lain untuk
menentukan kedudukan suatu titik pada bidang adalah dengan sistem koordinat kutub atau koordinat polar.

Dalam sistem koordinat kutub hanya menggunakan sebuah sinar garis sebagai patokan yang disebut sumbu kutub. Biasanya sinar garis ini digambar mendatar dan mengarah ke kanan seperti tampak pada gambar 1 sinar garis itu dinamakan *sumbu kutub*, sedangkan titik pangkalnya yang biasa diberi nama dengan huruf O disebut *kutub* atau *titik asal*.



Gambar 22

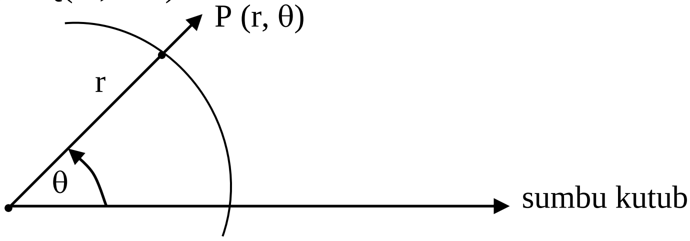
Sebuah titik P (selain titik kutub/titik asal) dinyatakan kedudukan oleh jarak titik O ke P dan sudut antara garis OP dan sumbu kutub. Apabila r adalah jarak antara titik O dan titik P dan θ adalah salah satu sudut antara OP dan sumbu kutub, maka (r, θ)adalah sepasang koordinat kutub dari titik P dan ditulis P (r, θ) (lihat gambar 22). Selanjutnya, r disebut *jari-jari penunjuk* dari P atau radius vektor dari P, sedangkan θ disebut *argumen* dari P atau *sudut kutub* dari P.

Pada umumnya r diambil positif $0 \le \theta \le 2\pi$. Jadi setiap titik letaknya dapat ditunjukkan oleh r dan θ. Sebaliknya setiap pasang r dan θ menunjukkan letak suatu titik dalam bidang itu.

Dalam beberapa hal r dan θ dapat diambil negatif. Misalnya P(r, θ) =

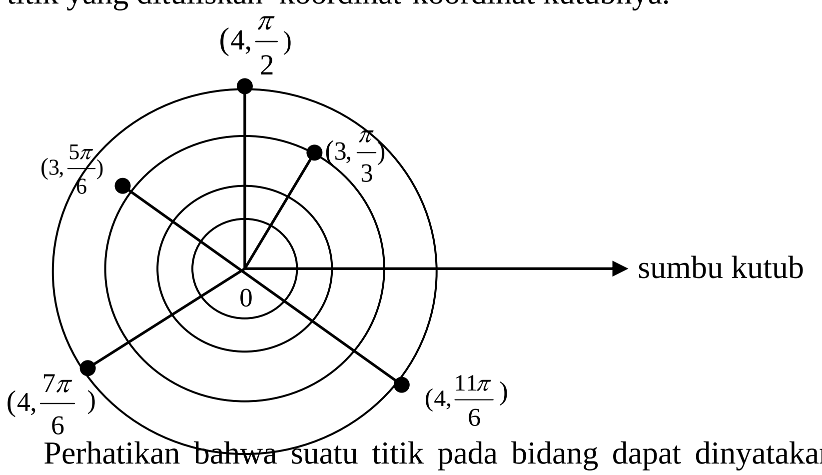
P(-r, θ+π)

Q(3, -½ π) = Q(3, 3/2 π) = Q(-3, ½ π)



Gambar 23

Titik-titik yang dilukiskan dengan koordinat kutub akan mudah digambar, apabila diggunakan kertas grafik kutub. Pada kertas grafik kutub telah tergambar lingkaran-lingkaran yang sepusat dan sinar-sinar garis yang memancar dari titik kutub. Kita dapat melihatnya pada gambar 24, pada gambar ini telah terlukis beberapa titik yang dituliskan koordinat-koordinat kutubnya.

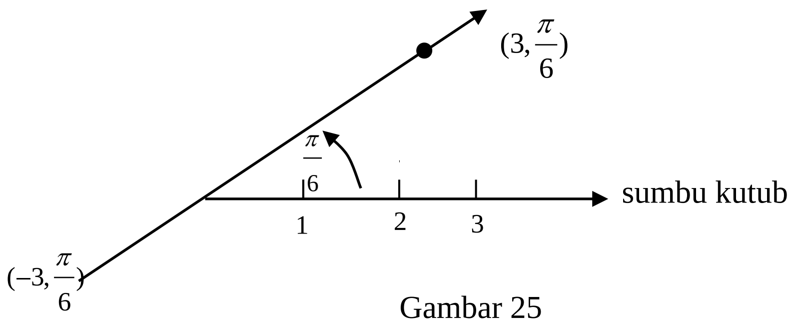


Gambar 24

Perhatikan bahwa suatu titik pada bidang dapat dinyatakan dengan beberapa koordinat kutub. Hal ini merupakan akibat sifat bahwa sudut θ + 2 k π dengan k = 0, 1, -1, 2, -2,..... memiliki kaki-kaki yang sama. Ingat sudut positif dihitung dari sumbu kutub ke arah berlawanan dengan arah putaran jarum jam, dan sudut negatif dihitung dari dari sumbu kutub ke arah yang searah dengan putaran jarum jam. Misalnya, titik dengan koordinat kutub $(4, \frac{\pi}{2})$ dapat pula dinyatakan dengan koordinat $(4, \frac{5\pi}{2})$, $(4, \frac{9\pi}{2})$, $(4, \frac{13\pi}{2})$, $(4, \frac{-3\pi}{2})$, $(4, \frac{-7\pi}{2})$ dan sebagainya.

Bahkan hal ini berlaku juga, jika r diperbolehkan memiliki nilai yang negatif. Apabila r bernilai negatif, maka koordinat kutub (r, θ) terletak pada sinar garis yang yang berlawanan arah dengan sinar garis yang dibentuk oleh sudut θ dan terletak $|r|$ satuan dari titik kutub.

Misalnya, titik dengan koordinat kutub $(-3, \frac{\pi}{6})$ dapat kita lihat pada gambar 25.



Gambar 25

Jadi titik dengan koordinat kutub $(-3, \frac{\pi}{6})$ sama saja dengan titik $(-3, \frac{13\pi}{6})$, $(3, \frac{-11\pi}{6})$, $(-3, \frac{25\pi}{6})$, $(3, \frac{7\pi}{6})$ dan seterusnya. Titik asal (kutub) mempunyai koordinat (0, π) dengan p sudut yang besarnya sebarang.

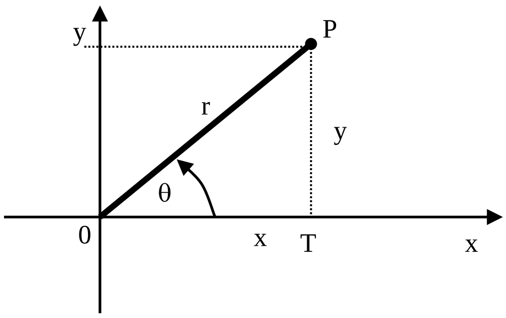
Seperti halnya dengan sistem koordinat Kartesius siku-siku, kita dapat menyusun persamaan Kartesius dengan perubah-perubah x dan y, maka dengan sistem koordinat kutub, kita dapat pula menyusun persamaan kutub dengan perubah-perubah r dan θ.

Contoh : r = 8 sin θ dan r = $\dfrac{2}{1-\cos\theta}$.

Apabila dengan sistem koordinat Kartesius kita dapat mengambarkan grafik sebuah persamaan Kartesius, maka dalam sistem koordinat kutub kita dapat pula menggambarkan grafik sebuah persamaan kutub. Grafik persamaan kutub adalah himpunan titik-titik yang mempunyai paling sedikit sepasang koordinat kutub yang memenuhi persamaan yang bersangkutan. Salah satu cara untuk menggambar grafik itu adalah menyusun daftar nilai-nilai pasangan koordinat. Kemudian menggambar titik dengan koordinat-koordinat yang bersangkutan dan akhirnya menghubungkan titik-titik itu secara berurutan dengan sebuah kurva yang mulus.

4.2. Hubungan Koordinat Kutub dan Koordinat Kartesius

Misalkan dalam sistem koordinat Kartesius, sumbu x positif dipandang pula sebagai sumbu kutub dan titik asal O (dalam sistem koordinat Kartesius) dipandang pula sebagai titik asal dari sistem koordinat kutub. Maka titik P (x, y) dalam sistem koordinat Kartesius yang dinyatakan sebagai P (r, θ) dalam sistem koordinat kutub (lihat gambar 26).



Gambar 26

Perhatikan Δ OTP siku-siku di T, maka diperoleh hubungan sebagai berikut.

$$\cos\theta = \frac{OT}{OP}$$

$$= \frac{x}{r}$$

$$x = r\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{PT}{OP} = \frac{y}{r}$$

$$y = r\sin\theta$$

$$OP^2 = OT^2 + PT^2 \text{ atau}$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{y}{x} \iff \theta = \text{arc tg}\,\frac{y}{x}$$

Dari persamaan terakhir ini akan diperoleh dua harga θ. Untuk menyelidiki harga θ yang memenuhi, perlu ditinjau tanda dari cos $\theta = \frac{y}{r}$ Oleh karena itu diperoleh hubungan :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \text{arc cos}\,\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

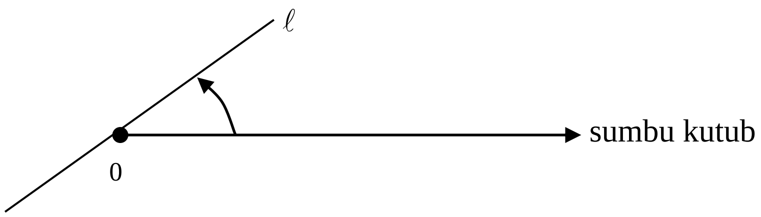
$$\theta = \text{arc sin}\,\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Jadi apabila suatu titik diketahui koordinat Kutub misalanya P(r, θ) maka koordinat kartesiusnya dapat dicari dengan P(r cosθ, r sinθ). Sebaliknya jika diketahui koordinat kartesiusnya , maka koordinat kutubnya dapat dicari.

4.3. PERSAMAAN KUTUB DAN GRAFIKNYA

Dalam kegiatan belajar berikut ini akan dipelajari lebih khusus persamaan-persamaan kutub untuk garis, lingkaran, konik (ellips, parabola dan hiperbola) dan persamaan kutub lainnya serta grafik persamaan-persamaan kutub itu.

Perhatikan gambar 27, yaitu grafik garis lurus yang melalui titik asal dan yang membentuk sudut θ dengan sumbu kutub.



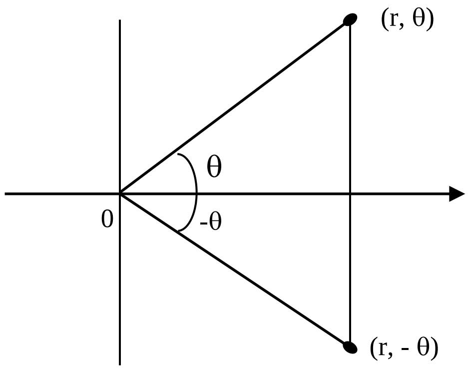
Gambar 27

Setiap titik pada garis *l*, koordinat kedua dari koordinat kutub itu selalu θ_0. Misalkan (1, θ_0), (-2, θ_0), (8, θ_0), (a, θ_0) untuk sebarang bilangan real adalah titik-titik yang terletak pada titik l. Dari kenyataan ini, kita dapat menyimpulkan bahwa persamaan kutub dari garis lurus yang melalui titik asal O membentuk sudut θ_0 dengan sumbu kutub adalah $\theta = \theta_0$.

Sekarang kita akan membahas grafik-grafik yang lebih rumit bentuknya, yaitu kardioda, limason, mawar dan spiral. Meskipun grafiknya rumit, namun persamaannya tetap sederhana kalau menggunakan persamaan kutub. Dan apabila dinyatakan dengan koordinat Kartesius, persamaannya tidak lagi sederhana. Sehingga kita dapat melihat keuntungan menggunakan koordinat kutub. Ada kurva-kurva yang persamaannya sederhana dalam suatu sistem dan ada kurva yang persamaannya sederhana dalam sistem lain, sifat demikian akan kita gunakan kelak dalam kalkulus untuk memecahkan suatu persoalan dengan memilih suatu sistem koordinat yang tepat.

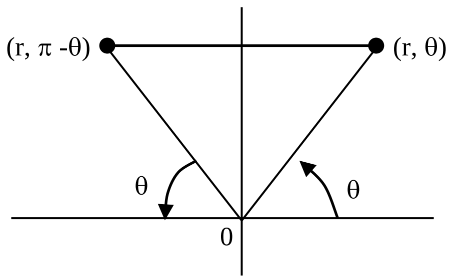
Banyak kurva yang memiliki sifat simetris pada suatu garis atau suatu titik. Oleh karena itu, sifat simetris ini dapat membantu kita dalam menggambar sebuah grafik. Berikut ini ada tiga pengujian sifat kesimetrisan yang cukup dalam koordinat kutub, yaitu:

1. Grafik persamaan kutub simetrik terhadap sumbu kutub atau perpanjangan ke kirinya, apabila dalam persamaan itu θ_0 diganti dengan - θ_0 menghasilkan persamaan yang sama (gambar 28).

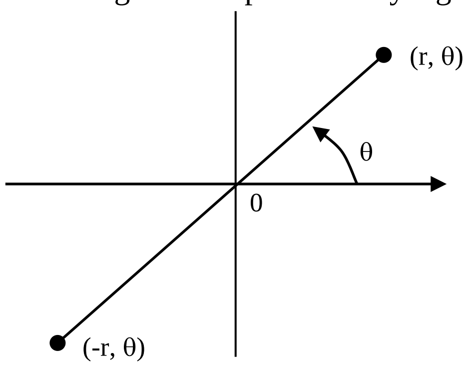


Gambar 28

2. Grafik persamaan kutub simetrik terhadap sumbu y (garis $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$), apabila dalam persamaan itu θ_0 diganti $(\pi - \theta)$ akan menghasilkan persamaan yang sama (gambar 29).



3. Grafik persamaan kutub simetrik terhadap kutub (titik asal), apabila persamaan itu r diganti dengan (-r) akan menghasilkan persamaan yang sama (gambar 30).



Gambar 30

Tugas Menggambar Tempat kedudukan titik dengan ketentuan sebagai berikut:

1. Diketahui suatu lingkaran dengan jari-jari a dan titik O pada lingkaran. Pada ujung garis tengah yang melalui O ditarik garis singgung g. Kemudian dari titik O dibuat garis-garis lurus yang memotong lingkaran di titik A dan garis g di titik B. Tentukan tempat kedudukan titik T sehingga OT = OB – OA. Garis lengkung yang terjadi disebut Cissoida.
2. Keadaan istimewa dari Cissoida atau garis selisih adalah jika garis-garis yang ditarik dari O memotong suatu garis lengkung (misalnya lingkaran)pada dua titik misalanya A dan B. Tentukan tempat kedudukan titik T yang memenuhi OT = OB – OA. Persamaan dari tempat kedudukan ini disebut dengan Lemniskat.

3. Diketahui suatu lingkarandengan garis tengah a. Melalui titik O pada keliling lingkaran ditarik garis lurus berubah yang memotong lingkaran di B. Pada garis ini diukurkan dari B titik-titik T dan T' yang berjarak b dari B. Tempat kedudukan titik-titik ini disebut Limacon. (Keterangan: untuk gambar ini ada 3 macam (1). $a < b$, (2) $a = b$, (3) $a > b$
4. Diketahui suatu titik A dan garis g. Dari A dibuat suatu garis l yang tegak lurus g dan memotong g di O. Pada garis berubah yang melalui A dan memotong g di B diukurkan BT = BT' = OB. Tempat kedudukan T dan T' disebut Strophoida.
5. Conchoida dapat dipandang sebagai Cissoida dari suatu garis g dan suatu lingkaran terhadap titik pusat dari lingkaran. Diambil O sebagai kutub. (gambar ini juga ada tiga macam, yaitu (1). $a < b$, (2) $a = b$, (3) $a > b$

Sebagai gambaran perhatikan berikut ini:

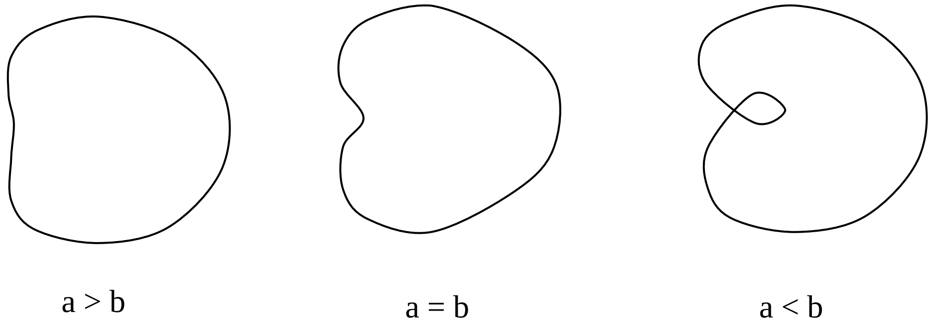
Limacon dan Kardioda

Kita perhatikan persamaan yang berbentuk

$$r = a \pm b \cos \theta, \qquad r = a \pm b \sin \theta$$

dengan a, b konstanta yang positif

Grafiknya disebut Limacon. Apabila $a = b$, grafiknya dinamakan Kardioda. Jadi kardioda kasus $a > b$, $a = b$ dan $a < b$ dapat dilihat pada gambar 31.



Gambar 31

Lemniskat

Perhatikan persamaan kutub yang berbentuk:

$r^2 = \pm\, a \cos 2\,\theta$, $r^2 = \pm\, a \sin 2\,\theta$

dengan a suatu konstanta positip.

Grafiknya dinamakan Lemniskat yang berbentuk seperti angka delapan.

Rose (Mawar)

Perhatikan persamaan kutub yang berbentuk

$r = a \cos n\theta$, $r = a \sin n\theta$

dengan a suatu konstanta

Grafiknya merupakan kurva-kurva yang berbentuk bunga dan dinamakan *mawar*. Banyaknya daun mawar adalah n apabila n ganjil dan 2 n apabila n genab.

Spiral

Grafik persamaan kutub $r = a\theta$ dengan a suatu konstanta dinamakan *spiral Archimides*, sedang grafik persamaan kutub $r = a\, e^{b\theta}$ dengan a, b konstanta disebut *spiral logaritma.*

Perpotongan Kurva-Kurva Dalam Koordinat Kutub

Dalam koordinat Kartesius, titik–titik potong dari dua kurva dapat dicari dengan cara menyelesaikan dua persamaan dari kurva tersebut secara simultan (bersama-sama). Hal ini tidak selalu mungkin jika menggunakan koordinat kutub. Ini disebabkan sebuah titik mempunyai banyak koordinat kutub. Satu pasang koordinat memenuhi persamaan kutub kurva yang satu dan potongan koordinat lainnya memenuhi persamaan yang lain.

Contoh: Tentukan kordinat-koordinat titik potong antara lingkaran dengan persamaan kutub $r = 4 \cos \theta$ dan 3. garis $\theta = \pi/3$

Penyelesaian:

Jika $\theta = \pi/3$, maka disubstitusikan pada $r = 4 \cos \theta$, maka diperoleh

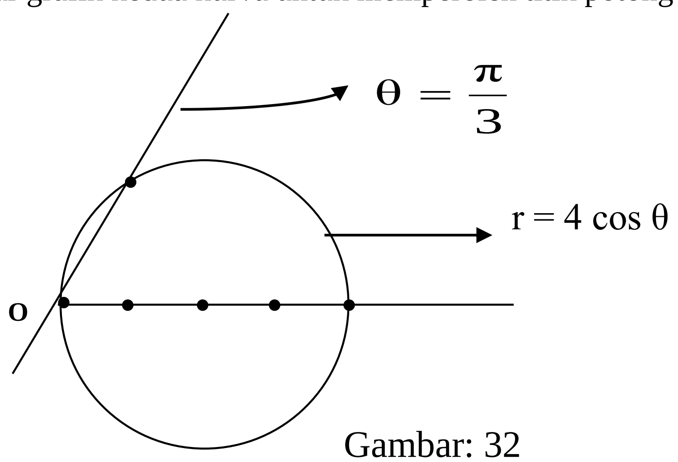
$r = 4 \cos \pi/3$

$= 4. \frac{1}{2} = 2$

sehingga diperoleh titik potong kedua kurva itu $(2, \pi/3)$

O(0,0) merupakan titik potong dari garis dan lingkaran, meskipun (0,0) tidak memenuhi kedua persamaan garis maupun lingkaran. Tetapi $(0, \pi/3)$ memenuhi persamaan garis $\theta = \pi/3$ dan titik $(0, \pi/2)$ memnuhi persamaan lingkaran $r = 4 \cos \theta$. Dan kedua pasang titik tersebut menyatakan titik yang sama yaitu titik pangkal O.

Oleh karena itu untuk mencari titik-titik potong dari dua kurva dengan persamaan kutub selain dengan menyelesaikan dua persamaan tersebut bersama-sama, perlu digambar grafik kedua kurva untuk memperoleh titik potong lain yang masih mungkin.



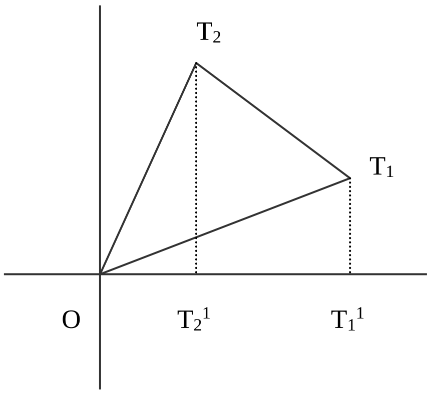
Gambar: 32

Luas Daerah Segi Banyak (Poligon)

Diketahui O titik asal, $T_1(x_1,y_1)$, dan $T_2(x_2,y_2)$

Tentukan luas segitiga OT_1T_2

Penyelesaian:



Gamabar 33

Perhatikan gambar di atas:

Luas .OT_1T_2 = Luas $OT_1{}^1T_1T_2$ – Luas $OT_1{}^1T_1$

$= \text{Luas } OT_2{}^1T_2 + \text{Luas } T_2{}^1T_1{}^1T_1T_2 - \text{Luas } OT_1{}^1T_1$

$$= \frac{1}{2}OT_2^1.T_2^1T_2 + \frac{1}{2}T_2^1T_1^1.(T_2^1T_2 + T_1^1T_1) - \frac{1}{2}OT_1^1.T_1^1T_1$$

$$= \frac{1}{2}x_2y_2 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)(y_2 + y_1) - \frac{1}{2}x_1y_1$$

$$= \frac{1}{2}x_2y_2 + \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_1y_1 - x_2y_2 - x_2y_1) - \frac{1}{2}x_1y_1$$

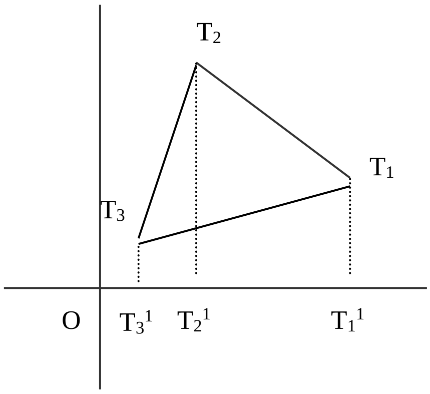
$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_{21}y_1)$$

Jadi luas segitiga OT_1T_2 = = $\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_{21}y_1)$

Diketahui $T_1(x_1,y_1)$, $T_2(x_2,y_2)$, dan $T_3(x_3,y_3)$

Tentukan luas segitiga $T_1T_2T_3$

Penyelesaian:



Gamabar 34

Perhatikan gambar di atas:

Luas .$T_1T_2T_3$ = Luas $T_3^1T_1^1\ T_1T_2$ – Luas $T_3^1T_1^1\ T_1T_3$

= Luas $T_3^1T_2^1T_2$ + Luas $T_2^1T_1^1\ T_1T_2$ - Luas $T_3^1T_1^1T_1T$

$$=\frac{1}{2}(x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)(y_2 + y_1) - \frac{1}{2}(x_1 - x_3)(y_1 + y_3)$$

$$= \frac{1}{2}(x_2y_2 + x_2y_3)(-x_3y_2 - x_3y_3) + \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_1y_1 - x_2y_2 - x_2y_1)$$

$$- \frac{1}{2}(x_1y_1 + x_1y_3)(-x_3y_1 - x_3y_3)$$

$$= \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2) + \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) + \frac{1}{2}(x_1y_3 - x_3y_1)$$

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 - x\ \ y_1) + \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2) + \frac{1}{2}(x_3y_1 - x_1y_3)$$

$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 - x\ \ y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)\}$$

| Karena harga dari hasil pehitungan ini dapat positif atau negatif jika letak titik-titiknya sebarang, maka diambil harga mutlaknya.

Jadi luas segitiga$T_1T_2T_3$

$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 - x\ \ y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)\}$$

atau dapat ditulis dengan rumus

$$= \frac{1}{2} \sum_{\text{cycl}1\text{-}3} (x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

Soal-soal Latihan:

1. Diketahui A(3,0), B(-2,4) dan C(-5,-3). Hitung:
   a. Panjang sisi-sisi segitiga ABC
   b. Luas segitiga ABC
   c. Koordinat titik beratnya.

2. Diketahui P(-2,9), Q(1,1) dalam koordinat miring dengan sudut koordinat 60^{O}. Tentukan jarak PQ.

3. Diketahui A(3, $\pi/6$), B(5, $5\pi/6$). Tentukan panjang segmen AB dan koordinat-koordinat A dan B dalam koordinat-koordinat Kartesius.

4. Dari suatu persegi diketahui titik potong diagonal-diagonalnya (3,5) dan salah satu sisinya mempunyai persamaan x = 6. Carilah persamaan sisi-sisi lainnya.

5. Carilah persamaan garis lurus yang memotong sumbu y di titik (0,-4) dan mengapit sudut 30^o dengan sumbu x.

6. Carilah persamaan garis lurus yang melalui titik (-2,0) dan mengapit sudut 60^o dengan sumbu x.

7. Carilah persamaan garis yang melalui titik (-3,1) dan mengapit sudut 45^o dengan sumbu x.

8. Diketahui titik-titik sudut Δ ABC, A(-3,1), B(5,3), dan C(1,-5). Tentukan persamaan sisi-sisi segitiga ABC tersebut. Tentukan pula koordinat-koordinat titik beratnya, serta persamaan garis-garis beratnya.

9. Tentukan jarak titik A ke garis g jika:
   a. A(2,3) dan g: $3x – y + 4 = 0$
   b. A(-1,2) dan g: $y = 2x – 2$
   c. A(2,0) dan g: $x – y –1 = 0$
   d. A(0,-3) dan g : $x + y + 2 = 0$

Tentukan pula panjang normal dan sudut yang diapit oleh normal dengan sumbu x

10. Titik A(2,-5) adalah salah satu titik sudut persegi yang salah satu sisinya terletak pada garis $x - 2y - 7 = 0$. Hitung luas persegi tersebut.

11. Persamaan parameter suatu garis lurus adalah

$x = 2 + 3t$

$y = -1 - 4t$

Tentukan gradiennya. Tentukan ordinat yang absisnya 5. Kemudian tentukan persamaan dalam koordinat Cartesius

12. Pada soal nomor 8 ABCD merupakan jajar genjang. Tentukan koordinat titik D. Hitung luasnya. Tentukan persamaan diagonal-diagonalnya?

13. Tentukan persamaan garis yang lurus yang melalui (1,0) dan sejajar dengan garis $y = 2x$

14. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui (0,-1) dan tegak lurus dengan garis $y = 2x$

15. Tentukan persamaan garis yang melalui (2,1) dan sejajar dengan garis $x + 2y + 3 = 0$

16. Tentukan persamaan garis yang melalui titik (2,0) dan mengapit sudut 45^o dengan garis $y = 2x$

17. Diketahui koordinat-koordinat titik sudut suatu segitiga ABC. A(6,8), B(-4,0) dan C(2,-2).

a. Tentukan persamaan garis beratnya?

b. Tentukan persamaan garis tingginya?

c. Tentukan persamaan garis baginya?

18. Diketahui trapesium ABCD. A(-1,-1), B(7,5), dan C(2,6). AB sejajar DC, CD = 5 Tentukan koordinat titik D. Kemudian tentukan luasnya?

19. Carilah persamaan garis yang melalui titik (2,1) dan mengapit sudut 45^o dengan garis $2x + 3y + 4 = 0$

20. Carilah persamaan garis yang melalui titik potong garis-garis $11x + 3y - 7 = 0$, $12x + y - 19 = 0$dan berjarak sama terhadap titik A(3,-2) dan B(-1,6).

21. Tentukan persamaan-persamaan garis bagi sudut-sudut yang diapit oleh garis-garis $g_1 \equiv 3x - 4y + 8 = 0$, $g_2 \equiv 5x + 12y - 15 = 0$,

22. Carilah persamaan garis yang melalui titik potong garis-garis $3x - 5y + 9 = 0$, dan $4x + 7y - 28 = 0$ dan yang absis titik potongnya dengan sumbu x dua kali ordinat titik potongnya dengan sumbu y.

23. Diketahui koordinat-koordinat titik sudut suatu segitiga ABC. A(1/2 ,4), B(-6,-1) dan C(4,-3). Tentukan koordinat titik potong garis tinggi yang melalui B dan garis berat yang melalui A.

24. Carilah persamaan sisi-sisi jajar genjang apabila diketahui persamaan dua sisi lainnya adalah $3x - 5y + 9 = 0$, dan $4x + 7y - 28 = 0$ dan salah satu titik sudutnya adalah (0,0).

25. Sudut antara garis g dan l adalah 45^o. Jika koefisien arah garis g adalah 2/3, maka tentukan gradien garis l.

26. Tentukan besar sudut segitiga ABC dengan titik-titik sudut sbb: A(-3,-2), B(2,5), dan C(4,2).

27. Tentukan luas daerah segi lima dengan titik-titk sudut A(- 5,-2), B(-2,5), C(2,7), D(5,1), (2,4).

28. Tentukan persamaan garis yang mempunyai absis titik potong dengan sumbu x adalah 5 , dan ordinat titik potong dengan sumbu y adalah –3.

29. Tentukan persamaan garis yang melalui (2,-3) dan sejajar dengan garis yang melalui titik-titik (4,1) dan (-2,2).

30. Tentukan persamaan segmen sumbu garis yang melalui titik-titik (7,4) dan (-1,-2)

31. Tentukan nilai k apabila:

a. garis $3kx + 5y + k - 2 = 0$ melalui titik (-1,4)
b. garis $4x - ky - 7 = 0$ mempunyai koefisien arah 3
c. garis $kx - y = 3k - 6$ yang mempunyai absis titik potong dengan sumbu x 5.

32. Ubahlah persamaan berikut menjadi persamaan normal, kemudian tentukan panjang normal dan besar sudut apt normal dengan sumbu x:

a. $x\sqrt{3} + y - 9 = 0$
b. $8x - 6y - 3 = 0$
c. $x + y + 8 = 0$
d. $12x - 5y = 0$
e. $4y - 7 = 0$
f. $x + 5 = 0$

33. Tentukan persamaan garis bagi sudut yang dibentuk oleh garis-garis: g: $3x - 4y + 8 = 0$ dan l : $5x + 12y - 15 = 0$

34. Tentukan koordinat titik potong garis-garis bagi segi tiga yang dibentuk oleh garis-garis: $g_1 : 7x - y + 11 = 0$
$g_2 : x + y - 15 = 0$
$g_3 : 7x + 17y + 65 = 0$

35. Diketahui A(-2,1), B(5,4), dan C(2,-3). Tentukanlah:

a. Persamaan garis-garis bagi Δ ABC
b. Persamaan garis tinggiΔ ABC
c. Persamaan berat Δ ABC
d. Panjang garis-garis tingginΔABC

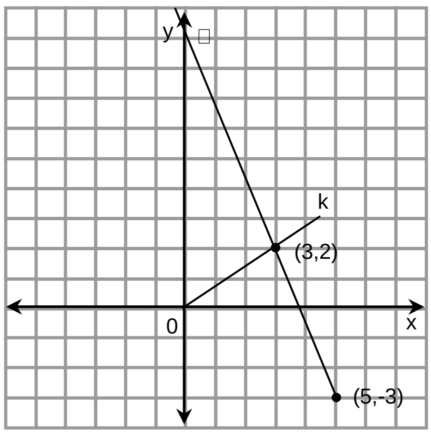
36. Tentukan persamaan garis lurus yang tegak lurus garis $4x + y - 1 = 0$ dan melalui titik potong garis-garis $2x - 5y + 3 = 0$ dan $x - 3y - 7y = 0$

Berikut ini soal-soal untuk siswa SMP/SMA

1. Tentukan titik potong garis a: $y = -x + 5$ garis b: $y = \frac{1}{2}x + 2$.
2. Diketahui dua buah garis dengan persamaan $y = -4x + 7$ dan $y = 3x - 7$.
   a. Tentukan koordinat titik potong kedua garis itu
   b. Tuliskan persamaan garis yang melalui titik potong kedua garis itu dan sejajar garis $y = -2x$
3. Gambarlah garis-garis di bawah ini pada satu bidang koordinat yang sama pada kertas berpetak:

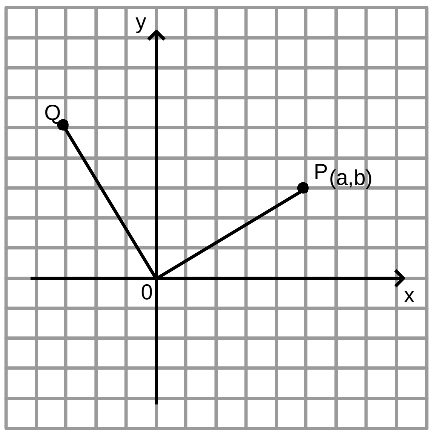
(i) y = -2x + 4 (ii) y = -5x – 3 (iii) y = 3x – 4 (iv) y = -2x

4. Titik A terletak pada sumbu x dengan absis 6, titik B pada sumbu y dengan ordinat 8, dan titik C pada sumbu x dengan absis negatif. Apabila AB = AC, tentukan koordinat titik potong garis-garis tinggi segitiga ABC tersebut.
5. Dua buah perahu mengikuti lintasan yang ditentukan oleh y = 2x + 2 dan y = -x + 5. Gambarlah grafik untuk menunjukkan apakah perahu-perahu itu akan bertabrakan. Jika keduanya bertabrakan, dimana keduanya akan bertabrakan.
6. Tentukan persamaan garis dengan gradien m = $-\frac{2}{3}$ dan melalui (4,6)!
7. 2x – 6y + 6 = 0 adalah suatu persamaan garis. Tentukan gradien dan persamaan umum persamaan garis tersebut!
8. Suatu garis melalui titik A(-2,5) dan B(6,3). Tentukan gradien persamaan garis tersebut!
9. Suatu persamaan garis melalui titik (4,-1) dan sejajar dengan garis 3x – y + 12 = 0, tentukan persamaan garis tersebut!



10. Pada gambar di samping garis l tegak lurus dengan garis k (l ⊥ k), tentukan persamaan garis l tersebut!
11. Gambarlah pasangan titik-titik ini dan hitunglah gradien garis yang menghubungkan:

    (1). A (3,1) dan B (6,2) (2). P (-2,0) dan Q (1,1)
12. Dari gradien AB dan PQ, apa yang dapat Anda simpulkan tentang kedua aris itu?



13. Gambarlah P (-1,-2), Q (-3,-1), R (1,2) dan S (-3,1)! Buktikan bahwa:

    (i) PQ sejajar SR (ii) SP sejajar RQ

    Bangun apakah gambar PQRS?

14. P adalah titik (a,b), OP dirotasikan 90^0 ke OQ, maka OP $\perp$ OQ.

    Tuliskan koordinat Q dalam a dan b!

    Tunjukkan bahwa mOP $\times$ mOQ = -1!

    Tuliskan gradien garis OP dan OQ!

15. Jika gradien garis yang melalui titik R (-3,4a) dan S (9,a) adalah 2, tentukan nilai a!
16. Garis h tegak lurus dengan garis yang melalui titik P (4,-7) dan Q (-6,8). Tentukan gradien garis h!