# PENGGUNAAN BILANGAN KOMPLEKS DALAM PERSOALAN FISIKA

Rahmawati Munir

# KINEMATIKA

Sebagaimana sistem koordinat kartesian dua dimensi, bidang kompleks dapat digunakan untuk mendeskripsikan gerak suatu benda.

Jika $z$ menyatakan posisi suatu benda, maka jika posisinya berubah tiap saat akan dapat dinyatakan bahwa $z(t)$

# KINEMATIKA

Misalkan posisi benda tiap saat dinyatakan dengan $z = 5e^{i\omega t}$ dengan $\omega$ suatu konstanta. Tentukan laju, besar percepatan dan deskripsi gerak benda tersebut.

$z' = i\omega . 5e^{i\omega t}$

Laju gerak benda adalah $v = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}5e^{i\omega t} = i\omega z$

$= z$

$i^2 = -1$

Percepatan gerak benda adalah

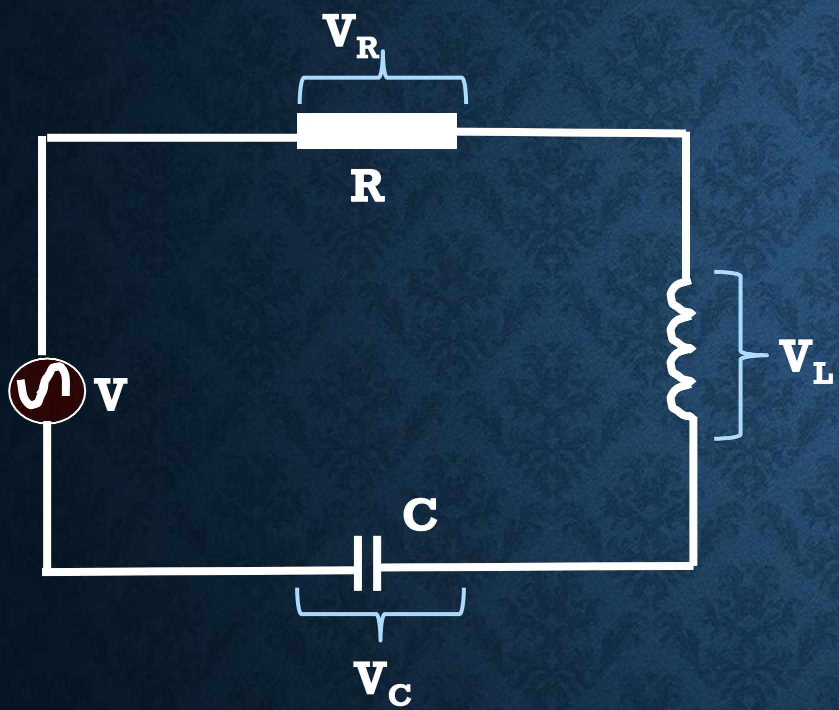
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(5i\omega^2 e^{i\omega t}\right) = -\omega^2 z$$

$z'' = i^2 \omega^2 5e^{i\omega t}$

$z$

Tampak dari percepatan gerak benda, bahwa percepatan gerak benda sama dengan suatu konstanta dikalikan dengan posisi benda dan hal ini menyatakan suatu gerak harmonik.

# ANALISIS RANGKAIAN AC




Rangkaian RLC Seri

Misalkan arus total yang mengalir pada rangkaian dinyatakan dengan bentuk fungsi harmonik $I = I_0 \sin \omega t$

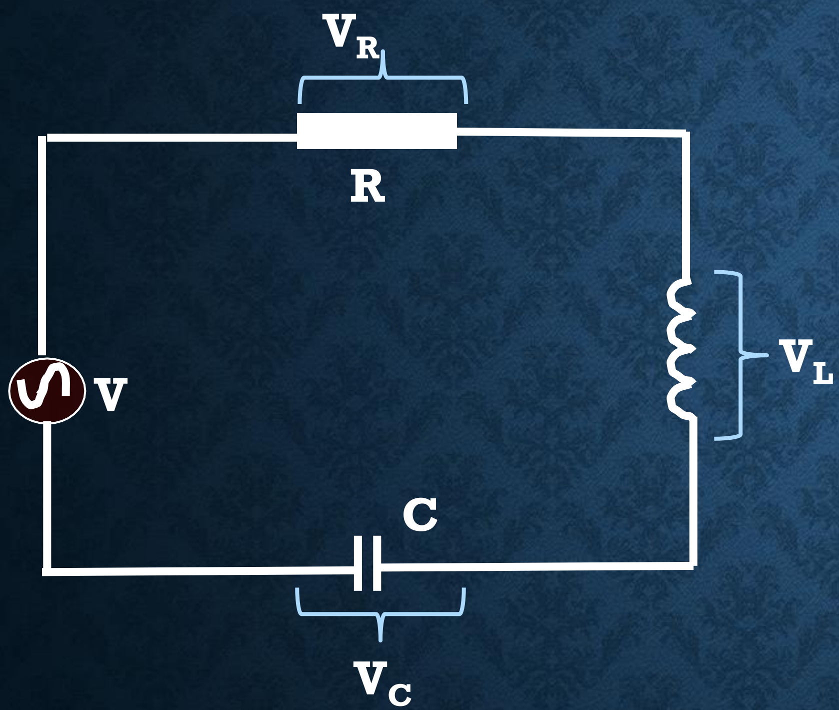
Berdasarkan Hukum Ohm dapat dinyatakan

$$V_R = IR$$

Hubungan antara tegangan pada induktor $L$ dengan kuat arus dinyatakan dengan

$$V_L = L\frac{dI}{dt}$$

# ANALISIS RANGKAIAN AC




Rangkaian RLC Seri

Tegangan pada kapasitor dinyatakan dengan

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C} \rightarrow V_C = \frac{1}{C}\int I dt$$

Bentuk arus setiap saat tersebut bila dinyatakan dengan bilangan kompleks adalah

$$I = I_0 \sin \omega t = I_0 e^{i\omega t}$$

# ANALISIS RANGKAIAN AC

Maka,

$$V_R = RI = RI_0 e^{i\omega t} = RI$$

$$V_L = L\frac{dI}{dt} = L\frac{d\left(I_0 e^{i\omega t}\right)}{dt} = i\omega L I_0 e^{i\omega t} = i\omega L I$$

$$V_C = \frac{1}{C}\int I_0 e^{i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega C} I_0 e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega C} I$$

# ANALISIS RANGKAIAN AC

Tegangan total jika ketiga komponen tersusun seri adalah

$$V = V_R + V_L + V_C = RI + i\omega LI + \frac{1}{i\omega C} I$$
$$= \left[R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right] I = zi \quad Z\,I$$

Dengan $z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ dinamakan sebagai impedansi (kompleks) pada rangkaian RLC seri

Hambatan efektif pada komponen induktor dinamakan reaktansi induktif $X_L$

$$X_L = \frac{V_L}{I} = i\omega L$$

# ANALISIS RANGKAIAN AC

Hambatan efektif pada komponen kapasitor dinamakan reaktansi $X_C$

$$X_C = \frac{V_C}{I} = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}$$

Pada rangkaian RLC seri, impedansi kompleks menjadi

$R_1 = R, R_2 = X_L = i\omega L \; dan \; R_3 = X_C = -\frac{i}{\omega C}$ sehingga

hambatan total dapat diungkapkan

$$\begin{aligned} z &= R_1 + R_2 + R_3 \\ &= R + X_L + X_C = R + i\omega L - i\frac{1}{\omega C} \\ &= R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \end{aligned}$$

# ANALISIS RANGKAIAN AC

Selanjutnya dapat diperoleh besar impedansi sebagaiman nilai absolut dari z, yaitu

$$|z|_{seri} = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Suatu kondisi dengan z sepenuhnya real (berarti bagian imajinernya sama dengan nol) dinamakan kondisi resonansi

# ANALISIS RANGKAIAN AC

Demikian pula jika ketiga komponen tersusun paralel impedansi kompleks menjadi

$R_1 = R, R_2 = X_L = i\omega L \; dan \; R_3 = X_C = -\frac{i}{\omega C}$ sehingga

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} + \frac{1}{{-i}/{\omega C}}$$

$$= \frac{1}{R} + \frac{1}{X_L} + \frac{1}{X_C} = \frac{1}{R} + i\left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right)$$

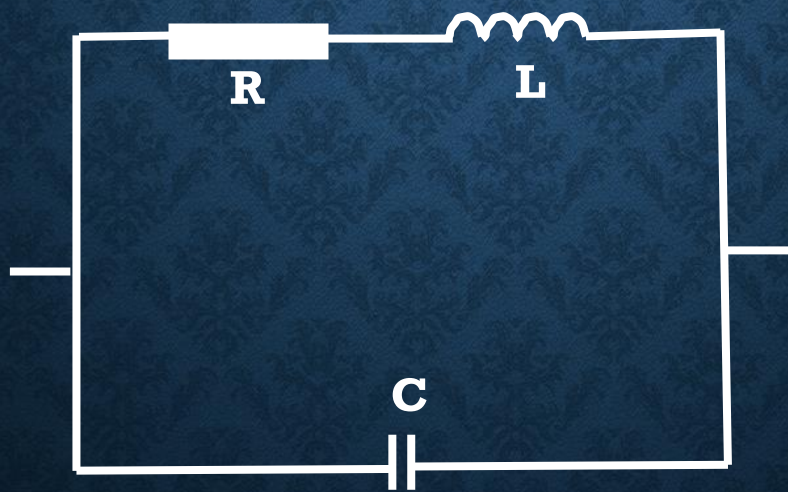
$$z = \frac{1}{\frac{1}{R} + i\left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right)}$$

Sehingga diperoleh

$$|z|_{parael} = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right)^2}}$$

# LATIHAN MANDIRI 2

Pada rangkaian yang terdiri dari hambatan R yang tersusun seri dengan induktor L kemudian keduanya diparalel dengan kapasitor C sebagaimana ditunjukkan dalam Gambar berikut, tentukan impedansi rangkaian tersebut




Rangkaian RLC Seri

# OPTIK GELOMBANG

Misalnya suatu berkas cahaya dinyatakan dengan fungsi $\sin t$ dan berkas yang lain memiliki beda fasa sebesar $\delta$ dibandingkan berkas sebelumnya.

Dengan kata lain berkas-berkas tersebut dapat dinyatakan sebagai fungsi $\sin t$, $\sin(t+\delta)$, $\sin(t+2\delta)$, $\sin(t+3\delta)$, . . . dan seterusnya.

Misalkan ingin diperoleh superposisi dari seluruh fungsi gelombang tersebut, maka hal ini akan mudah dilakukan dengan menggunakan representasi eksponensial kompleks sebagai berikut

# OPTIK GELOMBANG

Karena fungsi gelombang tersebut dinyatakan dalam bentuk fungsi sinus, dan fungsi sinus adalah bagian imajiner dari fungsi eksponensial kompleks $e^{it}$,

maka artinya superposisi fungsi sinus tersebut dapat diperoleh dengan mengambil bagian imajiner dari deret berikut

$$e^{it} + e^{i(1+\delta)} + e^{i(1+2\delta)} + e^{i(1+3\delta)+\ \ldots}$$

Deret tersebut dapat dituliskan dalam bentuk

$$e^{it} + e^{it}e^{i\delta} + e^{it}e^{2i\delta} + e^{it}e^{3i\delta} + \cdots$$
$$= e^{it}\left(1 + e^{i\delta} + e^{2i\delta} + e^{3i\delta} + \cdots\right)$$

# OPTIK GELOMBANG

Deret geometri yang suku awalnya $a$ dan rasionya r mempunyai jumlah bagian $S_N$ dinyatakan dengan

$$S_N = \frac{a(1-r_N)}{(1-r)}$$

Dengan demikian jika terdapat n berkas gelombang maka jumlah bagiannya adalah

$$S_n = \frac{e^{it}\left(1-e^{in\delta}\right)}{1-e^{i\delta}}$$

# OPTIK GELOMBANG

Selanjutnya dapat digunakan penyederhanaan berikut

$$1 - e^{in\delta} = e^{in\delta/2}\left(e^{-in\delta/2} - e^{in\delta/2}\right) = -e^{in\delta/2}\left(2i\sin\frac{n\delta}{2}\right)$$

$$1 - e^{i\delta} = e^{i\delta/2}\left(e^{-i\delta/2} - e^{i\delta/2}\right) = -e^{i\delta/2}\left(2i\sin\frac{\delta}{2}\right)$$

Jadi diperoleh

$$S_n = e^{it}\frac{e^{in\delta/2}\left(\sin\frac{n\delta}{2}\right)}{e^{i\delta/2}\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)} = \frac{e^{it}e^{in\delta/2}}{e^{i\delta/2}}\frac{\sin(n\delta/2)}{\sin(\delta/2)}$$

$$= e^{i(t+(n-1)\delta/2)}\frac{\sin(n\delta/2)}{\sin(\delta/2)}$$

# OPTIK GELOMBANG

Selanjutnya bila diambil bagian imajinernya maka akan diperoleh hasil superposisi dari fungsi sinus tersebut di atas, yaitu

$$\sin\left(t + \frac{n-1}{2}\delta\right)\frac{\sin\left(\frac{n\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

Dari ketiga contoh penggunaan bilangan kompleks tersebut di atas (yaitu persoalan mekanika, listrik dan optik/gelombang) terlihat bahwa representasi bilangan kompleks dari fungsi harmonik (sinus atau cosinus) akan sangat membantu menyederhanakan berbagai kesulitan matematik dalam operasi aljabar fungsi harmonik.

# TERIMA KASIH