BILANGAN KOMPLEKS

Rahmawati Munir

BILANGAN KOMPLEKS

- Bilangan Kompleks
- Fungsi Bilangan Kompleks
- Bidang Argand

BILANGAN KOMPLEKS

- Bilangan komplek biasanya dituliskan dalam bentuk pasangan bilangan sebagaimana pasangan titik dalam sistem koordinat xy.
- Artinya sebuah bilangan kompleks dapat juga digambarkan sebagai titik dalam bidang kompleks
- Bidang kompleks ini disebut juga diagram argand.

BILANGAN KOMPLEKS

Suatu titik dalam bidang xy juga dapat dinyatakan dalam ungkapan polar, makan bilangan kompleks juga dapat direpresentasikan dalam bentuk polar, maka bilangan kompleks juga demikian (r, θ)

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$$

Jadi suatu bilangan kompleks z dapat dinyatakan dalam representasi

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

ALJABAR KOMPLEKS

Menjadikan bentuk $x + iy$

Setiap bilangan kompleks dapat dinyatakan dalam bentuk $x + iy$. Dengan bentuk ini, dapat mudah diidentifikasi bagian real dan bagian imajiner dari suatu bilangan kompleks.

Contoh 1

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Tentukan bagian real dan bagian imajiner bilangan kompleks $\boxed{(1+i)^2}$

$$(1+i)^2 = (1+i)(1+i) = 1 + 2i + i^2 = \cancel{1} + 2i \cancel{- 1} = 2i$$

$i^2 = -1$

Dengan demikian bagian realnya adalah 0 dan bagian imajinernya adalah 2. Bilangan kompleks tersebut dapat dituliskan dalam bentuk

$x = 0$ ✓

$y = 2$ ✓

$$(1+i)^2 = 2i$$

$(\underset{x}{0} + \underset{y}{2}i)$

ALJABAR KOMPLEKS

Menjadikan bentuk $x + iy$

Setiap bilangan kompleks dapat dinyatakan dalam bentuk $x + iy$. Dengan bentuk ini, dapat mudah diidentifikasi bagian real dan bagian imajiner dari suatu bilangan kompleks.

Contoh 2

Ubahlah bentuk $\dfrac{2+i}{3-i}$ menjadi bentuk $x+iy$

$i^2 = -1$

$$\frac{2+i}{3-i} = \frac{(2+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{6+5i+\overset{-1}{i^2}}{9-i^2} = \frac{5+5i}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$x = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}$

ALJABAR KOMPLEKS

Menjadikan bentuk $x + iy$

Setiap bilangan kompleks dapat dinyatakan dalam bentuk $x + iy$. Dengan bentuk ini, dapat mudah diidentifikasi bagian real dan bagian imajiner dari suatu bilangan kompleks.

Contoh 3

Nyatakan $z = \dfrac{1}{2(\cos 30° + i \sin 30°)}$ dalam bentuk $x + iy$.

Karena $30° = \pi/6$ rad jadi akan diperoleh

$$z = \frac{1}{2(\cos 30° + i \sin 30°)} = \frac{1}{2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2e^{i\pi/6}} = \frac{1}{2}e^{-i\pi/6}$$

$$= \frac{1}{2}(\cos \pi/6 - i \sin \pi/6) = \underline{\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{1}{4}\right)}$$

$x = \sqrt{3}/4$

$y = -\frac{1}{4}$

KONJUGAT KOMPLEKS

Konjugat dari suatu bilangan kompleks dinyatakan $z = x + iy$ dengan $\bar{z} = x - iy$.

Konjugat dari suatu bilangan kompleks diperoleh dengan mengalikan bagian imajinernya dengan -1.

Contoh

Tentukan konjugat kompleks dari $z = \dfrac{2-3i}{i+4}$ (-1)

$$z = \frac{2-3i}{i+4} \quad \Longrightarrow \quad \bar{z} = \frac{2+3i}{-i+4}$$

PERSAMAAN KOMPLEKS

Dua buah bilangan kompleks dikatakan sama jika bagian real bilangan kompleks pertama sama dengan bagian real bilangan kompleks kedua dan bagian imajiner bilangan kompleks pertama sama dengan bagian imajiner bilangan kompleks kedua.

Misalnya jika $\mathrm{z} = x + iy = 2 + 3i$ maka berarti $x = 2$ dan $y = 3$.

PERSAMAAN KOMPLEKS

Contoh

Tentukan x dan y jika $(x+iy)^2 = 2i$

$i^2 = -1$

$$(x+iy)^2 = x^2 + i2xy - y^2 = 2i$$

Dengan demikian diperoleh hubungan

$$x^2 - y^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = \pm x$$
$$2xy = 2$$

Selanjutnya diperoleh

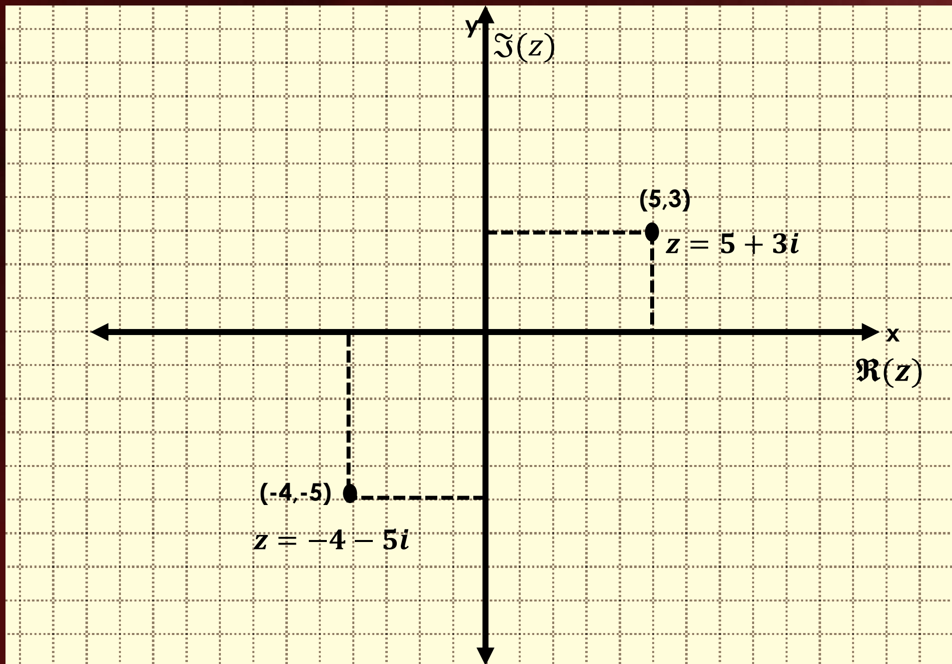
$$2x^2 = 2 \quad \text{atau} \quad -2x^2 = 2$$

Karena x harus real maka x^2 tidak mungkin negatif, dengan demikian didapat $x^2 = 1$ dan $y = x$. Sehingga solusi persamaan tersebut adalah $x = y = 1$ atau $x = y = -1$.

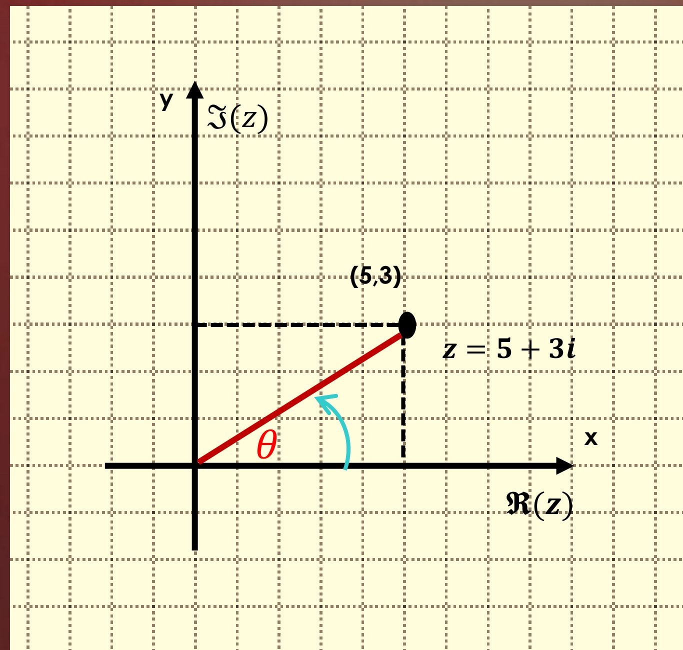
BIDANG KOMPLEKS

Bidang Cartesian dinamakan **bidang kompleks** atau bidang *Z*

Penyajian bilangan kompleks dalam bidang ini disebut **diagram Argand.**



Gambar 1 Bidang Kompleks



Gambar 2 Representasi polar dalam bidang kompleks

BILANGAN KOMPLEKS SECARA GEOMETRI

$$1$$

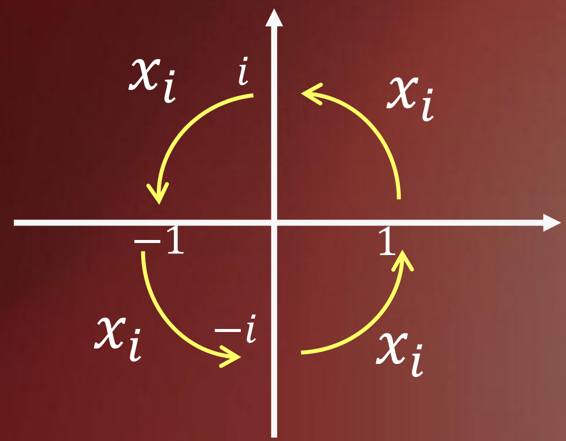
$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

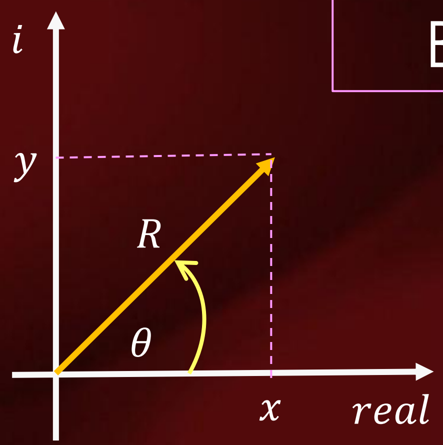
$$i^4 = -(-1) = 1$$

$$i^5 = \sqrt{-1}$$



- Bilangan kompleks perlu analogi ruang 2 dimensi
- Gerak yang terjadi ketika dikalikan bilangan kompleks adalah rotasi

DIAGRAM ARGAND



$$\boxed{\text{Bilangan Kompleks} \rightarrow \text{"2 } dimensi\text{"}}$$

$z = x + iy \qquad R = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad R = \sqrt{z\bar{z}} \qquad |z| = R$

amplitudo atau argumen z

$z = R(\cos\theta + i\sin\theta) = Rcis\ \theta$

$z = Re^{i\theta}$ *perkalian bilangan kompleks*

Rotasi 2 dimensi

$z_1 = R_1 e^{i\theta_1}$

$z_2 = R_2 e^{i\theta_2}$

Maka,

$z_1 \cdot z_2 = R_1 R_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

BILANGAN KOMPLEKS SECARA GEOMETRI

Hitunglah $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{10}$!

$\longrightarrow (x+iy)^{10}$ $\quad x = 1$, $\quad y = \sqrt{3}$

$\theta = arc\tan\sqrt{3}$

$R = \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$

$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1}$

$\theta = 60° = \frac{\pi}{3}$

$R = 2$

$\frac{10\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + \frac{6\pi}{3}$

$Z = R.e^{i\theta}$

Maka

$z = 2\cdot e^{i\pi/3} \longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
z^{10} &= 2^{10}\cdot e^{i\,\pi/3\cdot 10} \\
&= 1024\left\{\cos\left(\tfrac{4\pi}{3}+2\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{4\pi}{3}+2\pi\right)\right\} \\
&= 1024\left\{\cos\left(\tfrac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\tfrac{4\pi}{3}\right)\right\} \\
&= 1024\left\{\cancel{\cos}\left(-\tfrac{1}{2}\right) + i\,\cancel{\sin}\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{z^{10} = -512 - i\cdot 512\sqrt{3}}$$

x $\qquad$ y

BIDANG KOMPLEKS

Pasangan terurut (x, y) tersebut menyatakan vektor yang dimaksud.

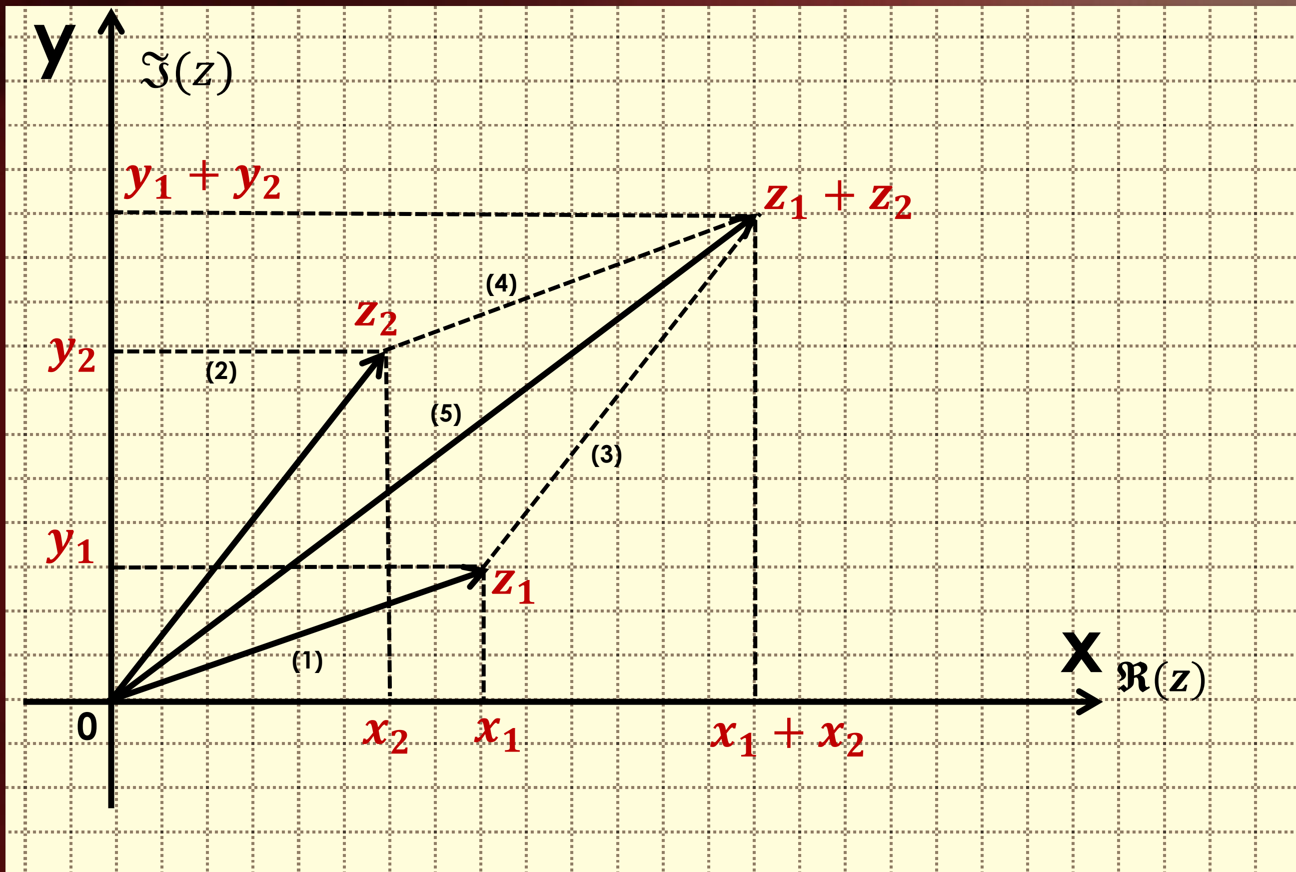
Bilangan kompleks $\mathrm{z} = (x, y) = x + yi$ dapat dipandang sebagai vektor (x, y)

Operasi penjumlahan dan pengurangan dua bilangan kompleks secara geometri serupa dengan operasi vektor tersebut

BIDANG KOMPLEKS

Gambar berikut memperlihatkan arti geometri dari bilangan kompleks $z_1, z_2,\ dan\ z_1 + z_2$

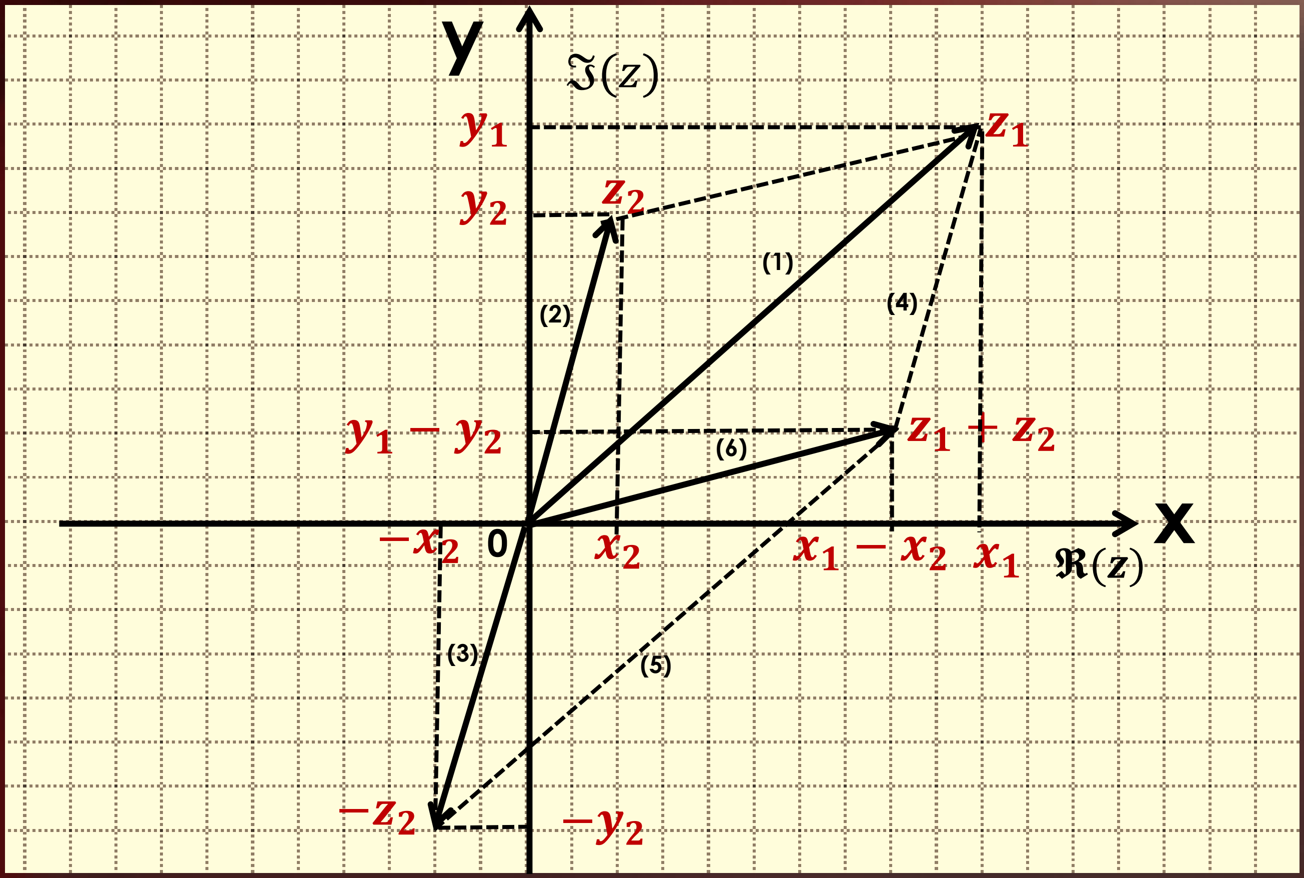
Penjumlahan



BIDANG KOMPLEKS

Gambar berikut memperlihatkan arti geometri dari bilangan kompleks $z_1, z_2,\ dan\ z_1 - z_2$

Penguragan



LATIHAN MANDIRI 1

Diketahui bilangan kompleks $z_1 = 1 + 3i$ dan $z_2 = 3 + 2i$

Gambarkan bilangan kompleks $z_1, z_2, z_1 + z_2 dan\ z_1 - z_2$ dengan cara seperti penjumlahan dan pengurangan vektor

PENGGUNAAN BILANGAN KOMPLEKS DALAM PERSOALAN FISIKA

DI VIDEO BERIKUTNYA ...

FMIPA UNMUL

TERIMA KASIH