Volume 1 No 1 (2022) 1-7
http://jurnal.fmipa.unmul.ac.id/index.php/basis

# Pelabelan Selimut $H$-Ajaib Super pada Koronasi Graf *Gear* dengan Graf Lintasan

Hardina Sandariria [1*], Qonita Qurrota A'yun[1], Desi Febriani Putri[1]

[1] *Program Studi S1 Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Mulawarman*

Dikirim: September 2022; Diterima: September 2022; Dipublikasi: September 2022
Alamat Email Korespondesi: hardinasandariria@fmipa.unmul.ac.id

**Abstrak.**
Graf sederhana $G = (V, E)$ memuat selimut $H$ jika setiap sisi pada $E$ memuat subgraf di $G$ yang isomorfik dengan $H$. Andaikan suatu graf $G = (V(G), E(G))$ memiliki selimut-$H$, maka suatu fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, |V(G)| + |E(G)|\}$, adalah pelabelan $H$-ajaib dari $G$ jika terdapat bilangan bulat positif $m(f)$ yang disebut jumlah ajaib. Untuk suatu subgraf $H' = (V'(H'), E'(H'))$ dari $G$ isomorfik ke $H$ diperoleh

$$f(H') = \sum_{v \in V'} f(v) + \sum_{e \in E'} f(e) = m(f),$$

sehingga graf $G$ disebut $H$-ajaib. Graf $G$ adalah $H$-ajaib super dan jumlah ajaib super dinotasikan dengan $s(f)$ untuk $f(V(G)) = \{1, \ldots, |V(G)|\}$.

Penelitian ini untuk mencari selimut $H$-ajaib super pada koronasi *gear* dengan graf lintasan. Akan dibuktikan bahwa graf *gear* korona lintasan $G_n \odot P_m$ adalah $C_4 \odot P_m$-ajaib super untuk $n$ ganjil dan $m \geq 3$.
**Kata Kunci**:
*selimut H-ajaib super, koronasi, graf lintasan, graf gear, graf siklus*

## PENDAHULUAN

Pelabelan adalah suatu pemberian nilai (dengan bilangan bulat) pada titik atau sisi dari graf atau keduanya sehingga memenuhi kondisi tertentu (Gallian [3]). Label yang digunakan berupa bilangan bulat positif atau bilangan asli. Perkembangan topik tentang pelabelan dapat diikuti dalam jurnal *Dynamics Survey of Graph Labeling* yang ditulis oleh Gallian [3].

Pelabelan yang banyak diteliti adalah pelabelan ajaib. Pada tahun 1964 untuk pertama kalinya pelabelan ajaib diperkenalkan oleh Sedl*áček* (Gallian [3]). Pelabelan ajaib adalah pemetaan satu-satu dari elemen-elemen graf yaitu himpunan titik dan himpunan sisi ke himpunan bilangan bulat positif, sehingga terdapat suatu jumlahan ajaib. Pelabelan ajaib pada graf merupakan kajian pada keilmuan teori graf yang banyak diaplikasikan antara lain pada radar, astronomi, sistem alat jaringan komunikasi, desain sirkuit, dan teori koding.

Pada tahun 2005 Gutiérrez dan Lladó [4] memperkenalkan pelabelan $H$-ajaib dari suatu graf sebagai perluasan *magic valuation*. Diberikan $H$ dan $G = (V(G), E(G))$

adalah graf sederhana sedemikian sehingga setiap sisi dari graf $G$ termuat dalam paling tidak satu subgraf yang isomorfik dengan $H$. Suatu fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, |V(G)| + |E(G)|\}$ adalah pelabelan $H$-ajaib dari graf $G$ jika terdapat suatu bilangan positif integer $m(f)$, disebut jumlahan ajaib.Suatu graf $G$ adalah $H$-super ajaib jika $f(V(G)) = \{1, \ldots, |V(G)|\}$ dan $s(f)$ adalah jumlahan super ajaib.

Penelitian pelabelan selimut $H$-ajaib dilakukan mula-mula oleh Gutiérrez dan Lladó [4] yang membuktikan graf bipartit lengkap dapat diselimuti dengan selimut bintang ajaib $K_{1,n}$. Selanjutnya Maryati dkk. [5] meneliti tentang selimut lintasan ajaib pada beberapa kelas graf *tree* di antaranya *shrubs* dan *banana tree*. Ngurah dkk. [7] meneliti selimut siklus ajaib super pada graf rantai, kipas, *triangle ladder*, *grid*, buku, dan graf yang terbentuk dari menghubungkan graf bintang $k_{1,n}$ dengan satu *isolated vertex*.

Dalam hal ini, peneliti melakukan penelitian untuk menentukan pelabelan selimut $H$-ajaib super pada koronasi graf *gear* dengan graf lintasan $G_n \odot P_m$ untuk $n$ ganjil dan $m \geq 3$. Selimut $H$ adalah koronasi graf *cycle* dengan graf lintasan $C_4 \odot P_m$.

## LANDASAN TEORI

Suatu graf sederhana $G$ merupakan pasangan himpunan tak kosong berhingga $V(G)$ yang elemen-elemennya disebut titik dan himpunan $E(G)$ yang elemen-elemennya merupakan padanagan tidak berurutan $uv$ dengan $u \neq v \in V(G)$ yang disebut sisi. Chartrand dan Oellermann [1] mendefinisikan bahwa dua graf $G_1$ dan $G_2$ adalah isomorfik jika terdapat fungsi satu-satu $\phi$ dari $V(G_1)$ ke $V(G_2)$ sedemikian sehingga dua titik $u$ dan $v$ *adjacent* pada $G_1$ jika dan hanya jika titik $\phi(u)$ dan $\phi(v)$ *adjacent* pada $G_2$. Jika $G_1$ dan $G_2$ isomorfik maka dapat dinotasikan $G_1 \cong G_2$. Jika dua graf dikatakan isomorfik maka kedua graf tersebut harus memiliki *order* dan *size* yang sama, serta *degree* setiap titiknya harus sama.

Pada tahun 1970, Frucht dan Harary [2] untuk pertama kalinya memperkenalkan operasi hasil kali korona dari dua graf. Korona dari suatu graf G dengan graf H, dinotasikan $G \odot H$ adalah graf yang terbentuk dari graf G dan $|V(G)|$ kopi graf H yaitu $H_1, H_2, \ldots,\ H_{|V(G)|}$, kemudian menghubungkan setiap titik $v_i \in V(G)$ dengan sebuah sisi ke setiap titik dari $V(H_i)$ untuk $i \in [1, k]$.

Suatu pelabelan atau pemberian nilai pada graf adalah pemetaan satu-satu $f$ yang membawa $V(G)$ pada bilangan non negatif $\{1, 2, \ldots, |V(G)|\}$ yang disebut label. Gutiérrez dan Lladó pada tahun 2005 mengembangkan pelabelan total ajaib menjadi pelabelan selimut ajaib. Jika diketahui graf $G = (V(G), E(G))$, maka selimut sisi dari $G$ adalah subgraf-subgraf berbeda $H_1, H_2, \ldots, H_j$ dengan $j$ adalah bilangan bulat positif sedemikian sehingga setiap sisi dari $G$ berada dalam paling tidak satu subgraf $H_i$ dengan $1 \leq i \leq j$. Jika setiap $H_i$ isomorfik dengan graf $H$ yang diberikan, maka dapat dikatakan $G$ memuat suatu selimut-$H$.

Andaikan suatu graf $G = (V(G), E(G))$ memiliki selimut-$H$, maka suatu fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, |V(G)| + |E(G)|\}$, adalah pelabelan $H$-ajaib dari $G$ jika terdapat bilangan bulat positif $m(f)$ yang disebut jumlah ajaib. Untuk suatu subgraf $H' = (V'(H'), E'(H'))$ dari $G$ isomorfik ke $H$ diperoleh

$$f(H') = \sum_{v \in V'} f(v) + \sum_{e \in E'} f(e) = m(f),$$

sehingga graf $G$ disebut $H$-ajaib. Graf $G$ adalah $H$-ajaib super dan jumlah ajaib super dinotasikan dengan $s(f)$ untuk $f(V(G)) = \{1, \ldots, |V(G)|\}$. Pelabelan selimut-ajaib ini kemudian dikembangkan menjadi selimut bintang-ajaib, selimut lintasan-ajaib, dan selimut *cycle*-ajaib ([4], [7]).

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Teknik $k$-seimbang multihimpunan diperkenalkan oleh Maryati dkk. [6]. Misalkan $k \in N$ dan $Y$ adalah multihimpunan bilangan bulat positif. Multihimpunan $Y$ disebut $k$-seimbang jika terdapat $k$ subhimpunan dari $Y$ yaitu $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ sedemikian sehingga untuk setiap $i \in [1, k]$ berlaku $\sum Y_i = \frac{\sum Y}{k} \in N$ dan $\biguplus_{i=1}^{k} Y_i = Y$. Untuk membuktikan pelabelan selimut $H$-ajaib super, peneliti menggunakan Lemma 2 dan Lemma 3 Maryati dkk. [5, 6].

**Lemma 1** [8] *Misalkan $k \in N$ dan $x$ adalah bilangan bulat non negatif. Misal $X = [x+1\ , x+k]$ dengan $|X| = k$ dan $Y = [x+k+1, x+2k]$ dengan $|Y| = k$. Maka, multihimpunan $K = X \uplus Y$ adalah $k$-seimbang untuk $j \in [1, k]$.*

Bukti. Untuk setiap $j \in [1, k]$ didefinisikan $K_j = \{a_j, b_j\}$ dengan

$$\begin{aligned} a_j &= x + j, \\ b_j &= x + 2k + 1 - j. \end{aligned}$$

Kemudian didefinisikan

$$\begin{aligned} A &= \{a_j \mid 1 \leq j \leq k\} &= [x+1, x+k], \\ B &= \{b_j \mid 1 \leq j \leq k\} &= [x+k+1, x+2k]. \end{aligned}$$

Karena $A \uplus B = K$, maka $\biguplus_{j=1}^{k} K_j = K$. Untuk setiap $j \in [1, k]$ diperoleh $\sum K_j = 2(x+k)+1$ untuk $1 \leq j \leq k$. Jadi, $K$ adalah $k$-seimbang.

**Lemma 2** [6] *Misalkan x,y, dan z bilangan bulat non negatif dan multihimpunan $Y = [x+1, x+k] \uplus [y+1, y+k] \uplus [z+1, z+k]$. Untuk bilangan ganjil $k \geq 3$, $Y$ adalah $k$-seimbang.*

Bukti. Misalkan $k \geq 3$ adalah bilangan ganjil. Untuk setiap $i \in [1, k]$, didefinisikan multihimpunan $Y_i = \{a_i, b_i, c_i\}$ dengan

$$a_i = x + i;$$
$$b_i = \begin{cases} y + \lceil \frac{k}{2} \rceil + i, & \text{untuk } i \in [1, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor]; \\ y - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + i, & \text{untuk } i \in [\lceil \frac{k}{2} \rceil, k]; \end{cases}$$
$$c_i = \begin{cases} z + k + 1 - 2i, & \text{untuk } i \in [1, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor]; \\ z + k + 2\lceil \frac{k}{2} \rceil - 2i, & \text{untuk } i \in [\lceil \frac{k}{2} \rceil, k]; \end{cases}$$

Kemudian didefinisikan himpunan

$$\begin{aligned} \text{A} &= \{a_i | 1 \leq i \leq k\} &= [x+1, x+k] \\ \text{B} &= \{b_i | 1 \leq i \leq k\} &= [y+1, y+k] \\ \text{C} &= \{c_i | 1 \leq i \leq k\} &= [z+1, z+k] \end{aligned}$$

Didapatkan bahwa $A \uplus B \uplus C = Y$ dan $\biguplus_{i=1}^{k} Y_i = Y$. Untuk setiap $i \in [1,k]$ diperoleh $|Y_i| = 3$ dan $\sum Y_i = x + y + z + k + \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$. Jadi, untuk $k \geq 3$ ganjil, $Y$ adalah $k$-seimbang.

**Lemma 3** [5] *Misalkan $k \in N$ dan $x$, $y$ bilangan bulat non negatif, dengan $1 \leq x \leq y$. Jika $X = [x, y]$ dan $|X|$ adalah kelipatan $2k$, maka $X$ adalah $k$-seimbang.*

Bukti. Untuk $i \in [1,k]$, didefinisikan $X_i = \{a_j^i | 1 \leq j \leq \frac{|X|}{k}\}$ dimana

$$a_j^i = \begin{cases} x - 1 + k(j-1) + i, & \text{untuk } j \text{ ganjil;} \\ x + kj - i, & \text{untuk } j \text{ genap.} \end{cases}$$

Kemudian, $|X_i| = \frac{|X|}{k}$, $\biguplus_{i=1}^{k} X_i = X$, dan $\sum X_i = \frac{|X|}{2k}(x+y)$ untuk setiap $i \in [1,k]$. $X$ adalah $k$-seimbang.

Selanjutnya, Lemma 4 dibagun untuk mendukung teorema yang diperoleh.

**Lemma 4** *Misalkan $k \in N$ dan $x$, $y$ adalah bilangan bulat non negatif. Misal $X = [x+1, x+k]$ dengan $|X| = k$ dan $Y = [y+k+1, y+2k]$ dengan $|Y| = k$. Maka multihimpunan $M = X \uplus Y$ adalah $k$-seimbang jika terdapat $k$ subhimpunan $M_j$ dari $M$ dengan $j \in [1,k]$.*

Bukti. Untuk setiap $j \in [1,k]$ didefinisikan $M_j = \{a_j, b_j\}$ dengan

$$\begin{aligned} a_j &= x + j, \\ b_j &= y + 2k + 1 - j. \end{aligned}$$

Kemudian didefinisikan

$$\begin{aligned} A &= \{a_j \mid 1 \leq j \leq k\} &= [x+1, x+k], \\ B &= \{b_j \mid 1 \leq j \leq k\} &= [y+k+1, y+2k]. \end{aligned}$$

Karena $A \uplus B = M$, maka $\biguplus_{j=1}^{k} M_j = M$. Untuk setiap $j \in [1,k]$ diperoleh $\sum M_j = x + y + 2k + 1$ untuk $1 \leq j \leq k$. Jadi, $M$ adalah $k$-seimbang.

**Teorema 5** *Graf $G_n \odot P_m$ adalah $C_4 \odot P_m$-ajaib super untuk $n$ ganjil dan $m \geq 3$.*

Bukti. Misal graf $G$ adalah graf $G_n \odot P_m$ didefinisikan

$$\begin{aligned} V(G) = \;& \{v_i; 0 \leq i \leq n\} \uplus \{u_i; 0 \leq i \leq n\} \uplus \\ & \{a_j; 0 \leq j \leq (2n+1)(m+1)\} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} E(G) = \;& \{v_0v_1, v_0v_2, \ldots, v_0v_n, v_1u_1, v_2u_2, \ldots, v_nu_n, u_1v_2, u_2v_3, \ldots, u_{n-1}v_n, u_nv_1\} \uplus \\ & \{b_j; 0 \leq j \leq m(2n+1)\} \uplus \{a_j^i; 0 \leq i \leq 2n+1, 1 \leq j \leq m-1\} \end{aligned}$$

dengan $|V(G)| = (2n+1)(m+1)$ dan $|E(G)| = 4mn + 2m + n - 1$. Didefinisikan fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \ldots, 3(2mn+m+n)\}$. Misalkan himpunan label untuk seluruh titik dan sisi dari graf $G$ dinotasikan dengan $Z$ dimana $Z = [1, 3(2mn+m+n)]$. Himpunan $Z$ dipartisi menjadi 9 himpunan yaitu $A = \{1\}, B = [2, n+1], C = [n+2, 2n+1], D = [2n+2, (m+1)(2n+1)], E = [(m+1)(2n+1)+1, (2m+1)(2n+1)], F = [(2m+1)(2n+1)+1, m(4n+2)+3n+1], G = [m(4n+2)+3n+2, m(4n+2)+4n+1], H = [m(4n+2)+4n+2, m(4n+2)+5n+1]$, dan $I = [m(4n+2)+5n+2, 3(2mn+m+n)]$.

Seluruh titik dan sisi graf $G$ dilabeli dengan beberapa ketentuan. Himpunan $A$ digunakan untuk melabeli titik pusat $v_0$. Himpunan $B$ digunakan untuk melabeli titik $v_i$ yang *adjacent* dengan $v_0$ dan himpunan $F$ digunakan untuk melabeli sisi $v_0v_i$. Menggunakan Lemma 4 dengan $x = 1$, $y = 2m(2n+1)+n+1$, dan $k = n$ diperoleh $n$-seimbang. Didefinisikan $K = B \uplus F$, diperoleh $\sum K_i = 4mn+2m+3n+3$. Himpunan $C$ digunakan untuk melabeli titik $u_i$, himpunan $G$ digunakan untuk melabeli sisi $v_iu_i$, dan himpunan $H$ digunakan untuk melabeli sisi $\{u_1v_2, u_2v_3, \ldots, u_{n-1}v_n, u_nv_1\}$. Menggunakan Lemma 2 dengan $x = n+1, y = (2m+1)(2n+1)+n, z = (2m+1)(2n+1)+2n$, dan $k = n$ diperoleh $n$-seimbang. Didefinisikan $L = C \uplus G \uplus H$, diperoleh $\sum L_i = m(8n+4)+9n+4+\lceil \frac{n}{2} \rceil$. Himpunan $D$ digunakan untuk melabeli titik $a_j$ dan himpunan $E$ digunakan untuk melabeli sisi $b_j$. Menggunakan Lemma 1 dengan $x = 2n+1$ dan $k = m(2n+1)$. Didefinisikan $M = D \uplus E$, diperoleh $\sum M_i = m(4n+2)+4n+3$.

Himpunan $I$ digunakan untuk melabeli sisi $a_j^i$. Didefinisikan $a_j^i$ adalah himpunan sisi pada lintasan. Pembuktian dibagi menjadi 2 kasus berdasarkan nilai $m$

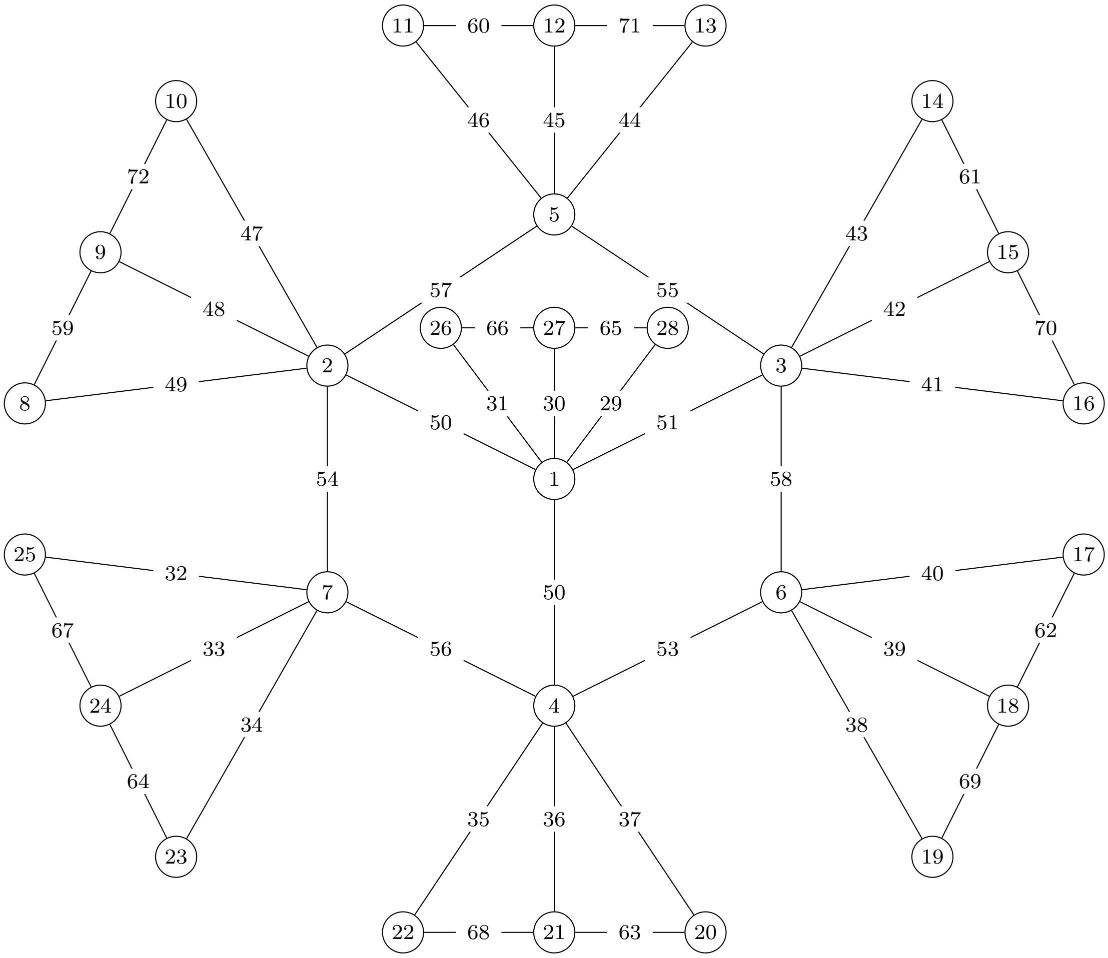
**Kasus 1.** $m$ ganjil ($m \geq 3$).
Berdasarkan Lemma 3 dengan $x = m(4n+2)+5n+2$, $y = 3(2mn+m+n)$, dan $|I| = (2n+1)(m-1)$ diperoleh $(2n+1)$-seimbang dengan $\sum I_i = \frac{(m-1)}{2}(5m(2n+1)+8n+2)$.

**Kasus 2.** $m$ genap.
Partisi himpunan $I$ menjadi dua subhimpunan yaitu $I_1 = [m(4n+2)+5n+2, m(4n+2)+11n+4]$ dan $I_2 = [m(4n+2)+11n+4, 3(2mn+m+n)]$. Untuk $m = 4$ didefinisikan $I = I_1$. Sedangkan untuk $m \geq 6$ didefinisikan $I = I_1 \uplus I_2$. Berdasarkan Lemma 2 dengan $x = m(4n+2)+5n+1$, $y = m(4n+2)+7n+2$, dan $z = m(4n+2)+9n+3$ diperoleh himpunan $I_{1i}$ adalah $(2n+1)$-seimbang dengan $\sum I_{1i} = 6m(2n+1)+23n+\lceil \frac{2n+1}{2} \rceil + 8$.

Kemudian menggunakan Lemma 3, untuk $x = m(4n+2)+11n+4$ dan $y = 3(2mn+m+n)$ dengan $|I_2| = (2n+1)(m-4)$ diperoleh $(2n+1)$-seimbang dengan $\sum I_{2i} = \frac{m-4}{2}(5m(2n+1)+14n+4)$. Karena didefinisikan untuk $m \geq 6$ adalah $I = I_1 \uplus I_2$, maka $\sum I_i = m^2(5n+\frac{5}{2}) - m(n+2) - 5n + \lceil \frac{2n+1}{2} \rceil$.

Untuk selanjutnya, jumlahan semua titik dan sisi pada setiap subgraf $C_4 \odot P_m$ adalah konstan dengan

$$f(C_4 \odot P_m) = \begin{cases} 18m^2(2n+1) + 14m(2n+1) - n + \lceil \frac{n}{2} \rceil + 7, & \text{untuk } m \text{ ganjil;} \\ (8m^2+40m)(2n+1) + 4m + 107n + \lceil \frac{n}{2} \rceil + \lceil \frac{2n+1}{2} \rceil + 43, & \text{untuk } m = 4\ ; \\ (18m^2+12m)(2n+1) + n(4m-5) + \lceil \frac{n}{2} \rceil + 4\lceil \frac{2n+1}{2} \rceil + 11, & \text{untuk } m \text{ genap}, m \geq 6. \end{cases}$$




Gambar 1: Pelabelan Selimut $C_4 \odot P_3$-ajaib Super pada Graf $G_3 \odot P_3$

## PENUTUP

Berdasarkan uraian pembahasan, didapatkan kesimpulan bahwa Graf $G_n \odot P_m$ adalah $C_4 \odot P_m$-ajaib super untuk $n$ ganjil dan $m \geq 3$. Saran yang dapat diberikan penulis adalah belum dibuktikan bahwa graf $G_n \odot P_m$ untuk $n$ genap adalah $H$-ajaib super dengan $H$ adalah graf $C_4 \odot P_m$.

## DAFTAR PUSTAKA

[1] Chartrand, G. dan Oellermann, O. R. (1993). *Applied and Algorithmic Graph Theory, International Series in Pure and Applied Mathematics.* McGraw-Hil Inc, California.

[2] Frucht, R. dan Harary, F. (1970). The Corona of Two Graphs. *Aequationes Math* (4), 322-325.

[3] Gallian, J.A. (2021). Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics #DS6,* (24), 1-576.

[4] Gutiérrez, A. dan Lladó, A. (2005). Magic Coverings. *J. Combin. Math. Combin. Computing* (55), 43-46.

[5] Maryati, T. K., Baskoro, E. T., dan Salman, A. N. M. (2008). $P_h$-supermagic Labelings of Some Trees. *J. Combin. Math. Combin. Computing* (65), 182-189.

[6] Maryati, T. K., Salman, A. N. M., Baskoro, E. T., Ryan, J., dan Miller, M. (2010). On H-Supermagic Labelings for Certain Shackles and Amalgamations of a Connected Graph. *Utilitas Mathematica* (83), 333-342.

[7] Ngurah A. A. G., Salman, A. N. M., dan Susilowati, L. (2010). H-supermagic Labelings. *Discrete Mathematics*, 1293-1300.

[8] Roswitha, M., Baskoro, E. T., Maryati, T. K., Kurdhi,N. A., dan Susanti, I. (2013). Further Result on Cycle-Supermagic Labeling. *ACKE Int. J. Graphs Comb.* (10), 211-220.