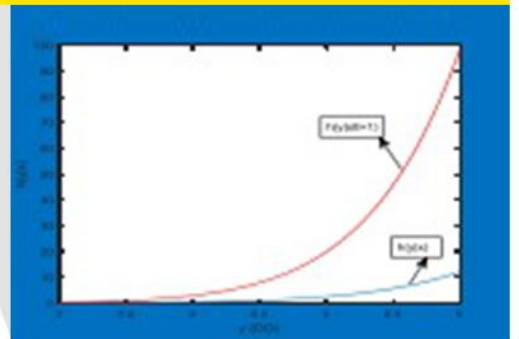


MONOGRAF

PEMODELAN REGRESI WEIBULL PADA POTENSI PENCEMARAN SUNGAI MAHAKAM

*Suyitno
Darnah Andi Nohe
Ika Purnamasari
Meiliyani Siringoringo
Rito Goejantoro
Meita Nor Rahmah*



MONOGRAF:
PEMODELAN *REGRESI WEIBULL*
PADA POTENSI PENCEMARAN SUNGAI MAHAKAM

Suyitno
Darnah Andi Nohe
Ika Purnamasari
Meiliyani Siringoringo
Rito Goejantoro
Meita Nor Rahmah



MONOGRAF:

PEMODELAN *REGRESI WEIBULL*

PADA POTENSI PENCEMARAN SUNGAI MAHAKAM

Penulis:
Suyitno
Darnah Andi Nohe
Ika Purnamasari
Meiliyani Siringoringo
Rito Goejantoro
Meita Nor Rahmah

Editor:
Darnah Andi Nohe
Layouter :
Tim Kreatif PRCI
Cover:
Rusli

Cetakan Pertama : Desember 2022

Hak Cipta 2022, pada Penulis. Diterbitkan pertama kali oleh:

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT
Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151
Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website : www.rcipress.rcipublisher.org
E-mail : rumahcemerlangindonesia@gmail.com

Copyright © 2022 by Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
All Right Reserved

- Cet. I – : Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2022
; 18 x 25 cm
ISBN : 978-623-448-337-6

Hak cipta dilindungi undang-undang
Dilarang memperbanyak buku ini dalam bentuk dan dengan
cara apapun tanpa izin tertulis dari penulis dan penerbit

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang
Hak Cipta Pasal 72

Undang-undang No.19 Tahun 2002 Tentang Hak Cipta
Pasal 72

Barang siapa dengan sengaja melanggar dan tanpa hak melakukan perbuatan sebagaimana dimaksud dalam pasal ayat (1) atau pasal 49 ayat (1) dan ayat (2) dipidana dengan pidana penjara masing-masing paling sedikit 1 (satu) bulan dan/atau denda paling sedikit Rp.1.000.000,00 (satu juta rupiah), atau pidana penjara paling lama 7 (tujuh) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.5.000.000.000,00 (lima miliar rupiah).

Barang siapa dengan sengaja menyiarkan, memamerkan, mengedarkan, atau menjual kepada umum suatu ciptaan atau barang hasil pelanggaran hak cipta terkait sebagai dimaksud pada ayat (1) dipidana dengan pidana penjara paling lama 5 (lima) tahun dan/atau denda paling banyak Rp.500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah)

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kehadiran Tuhan Yang Maha Esa yang telah memberikan rahmat serta karunia-Nya kepada kami sehingga kami berhasil menyelesaikan Buku dengan judul Monograf: Pemodelan Regresi Weibull Pada Potensi Pencemaran Sungai Mahakam sesuai yang ditargetkan.

Sungai Mahakam memiliki peran penting dalam mendukung kebutuhan masyarakat Provinsi Kalimantan Timur (Kaltim). Kegiatan di sekitar Daerah Aliran Sungai (DAS) Mahakam seperti rumah makan, perikanan, industri, pertambangan, dan rumah penduduk berpotensi menimbulkan limbah di aliran sungai. Limbah tersebut dapat mengancam kualitas air Sungai Mahakam dan berpotensi menyebabkan pencemaran air. Pencemaran air Sungai Mahakam merupakan ancaman bagi kesehatan masyarakat Kaltim, oleh karena itu diperlukan pencegahan. Pencegahan yang diusulkan dalam penelitian ini adalah pencegahan secara statistik, yaitu memberikan informasi kepada masyarakat Kaltim mengenai faktor-faktor yang mempengaruhi potensi pencemaran air Sungai Mahakam melalui pemodelan regresi Weibull. Pemodelan regresi Weibull dalam penelitian ini diterapkan pada data indikator pencemaran air Oksigen Terlarut (*Dissolved Oxygen/DO*). Kami menyadari bahwa Buku ini masih jauh dari sempurna, oleh karena itu kritik dan saran dari semua pihak yang bersifat membangun selalu kami harapkan demi kesempurnaan buku ini.

Akhir kata, kami sampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah berperan serta dalam penyusunan Buku ini dari awal sampai akhir. Semoga Tuhan Yang Maha Esa senantiasa meridhoi segala usaha kita. Amin.

Desember 2022, Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	I
DAFTAR ISI	II
BAB I SUNGAI MAHAKAM DAN POTENSI PENCEMARANNYA	1
BAB II KONSEP DISTRIBUSI VARIABEL ACAK KONTINU	5
BAB III KONSEP DISTRIBUSI WEIBULL	6
A. Pengertian Distribusi Weibull	6
B. Penaksiran Parameter Ditribusi Weibull	7
C. Pengujian Distribusi Data	10
D. Model Regresi Weibull	11
E. Penaksiran Parameter Model Regresi Weibull	12
F. Pengujian Parameter Model Regresi Weibull	16
G. Pendeteksian Multikolinieritas	19
H. Interpretasi Model Regresi Weibull	19
I. Pemilihan Model Terbaik	21
BAB IV PEMODELAN REGRESI <i>WEIBULL</i> PADA POTENSI PENCEMARAN SUNGAI MAHAKAM	22
A. Pendahuluan	22
B. Proses Pemecahan	24
C. Hasil Pemodelan Regresi Weibull Pada Potensi Pencemaran Sungai Mahakam	27
1. Deskripsi Data	28
2. Penaksiran Parameter Distribusi Weibull	29
3. Pengujian Distribusi Data Respon	29
4. Pendeteksian Multikolinieritas Antar Kovariat	30
5. Pemodelan Regresi Weibull	31
a. Penaksiran Parameter Model Regresi Weibull	31
b. Pengujian Parameter Regresi Model Regresi Weibull Secara Serentak	33
c. Pengujian Parameter Regresi Model RW Secara Parsial	34
6. Pemilihan Model Regresi Weibull Terbaik	35
7. Pengujian Parameter Regresi Model RW Terbaik Secara Serentak	37
8. Pengujian Parameter Regresi Model RW Terbaik Secara Parsial	38
9. Interpretasi Model Regresi Weibull pada Data DO Air Sungai Mahakam	40
BAB V PENUTUP	51
DAFTAR PUSTAKA	54

BAB I

SUNGAI MAHAKAM DAN POTENSI PENCEMARANNYA

Sungai Mahakam merupakan sungai terbesar yang membelah provinsi Kalimantan Timur yang bermuara di Selat Makassar. Di bagian hulu, aliran sungai ini melintasi wilayah Kabupaten Kutai Barat dan Kabupaten Kutai Kartanegara sedangkan di bagian hilirnya melintasi Kota Samarinda. Panjang sungai Mahakam mencapai 920 km dengan luas sekitar 149.277 km² dan kedalaman 50 meter di bagian hilir dan sekitar 100 meter di bagian hulu. Sungai Mahakam memiliki beberapa anak sungai, yaitu Sungai Belayan, Sungai Lawa, Sungai Kedang Kepala, Sungai Telen, dan Sungai Tenggarong.

Sungai Mahakam merupakan urat nadi kehidupan masyarakat Kalimantan Timur yaitu sebagai sumber air baku air minum dan air bersih, habitat flora dan fauna perairan, sarana transportasi serta pengendali banjir. Daerah Aliran Sungai (DAS) Mahakam merupakan pusat kegiatan banyak pihak, mulai dari sektor industri, pertanian, kehutanan, pertambangan, hingga pusat kegiatan ekonomi masyarakat. Di sepanjang sungai mahakam terdapat bangunan pabrik/industri, penambangan batu baru, serta pemukiman penduduk yang berpotensi menghasilkan limbah domestik maupun non domestik. Aktivitas manusia dalam kehidupan sehari-hari dapat menyebabkan kualitas air sungai terancam tercemar. Dampak pencemaran air berbahaya bagi organisme air dan juga bagi manusia, karena dapat menjadi sarang penyakit.

Air merupakan salah satu sumber daya alam yang memiliki fungsi sangat penting dalam kehidupan sehari-hari. Pada dasarnya air yang baik adalah air yang tidak tercemar yang berarti air bersifat netral, sedangkan apabila di dalam perairan terdapat zat pencemar maka sifat air dapat berubah menjadi asam atau basa. Menurut Peraturan Pemerintah Nomor 82 Tahun 2001, pencemaran air adalah masuknya atau dimasukkannya makhluk hidup, zat, energi, dan atau komponen lain ke dalam air oleh kegiatan manusia sehingga kualitas turun

sampai ke tingkat tertentu yang menyebabkan air tidak dapat berfungsi sesuai dengan peruntukannya.

Sumber pencemar air sungai dapat dibedakan menjadi sumber domestik dan non domestik. Sumber pencemar domestik (rumah tangga) adalah semua buangan (limbah) yang berasal dari penduduk perkampungan dan kota, pasar, jalan, terminal, rumah sakit, hotel dan restoran. Sumber pencemar non domestik adalah buangan yang berasal dari pabrik, industri, pertanian, perikanan, peternakan, transportasi dan sebagainya. Bentuk pencemar air dapat dibagi menjadi bentuk cair, padat, gas dan kebisingan.

Pencemaran kualitas air dapat menyebabkan ketidakseimbangan ekosistem. Pencemaran tersebut menyebabkan oksigen yang seharusnya digunakan oleh seluruh hewan dan tumbuhan air menjadi berkurang. Berdasarkan Peraturan Pemerintah Nomor 82 Tahun 2001 tentang Pengelolaan Kualitas Air dan Pengendalian Pencemaran Air, klasifikasi mutu air ditetapkan menjadi 4 (empat) kelas:

- a. Kelas satu, air yang peruntukannya dapat digunakan untuk air baku air minum, dan atau peruntukan lain yang mempersyaratkan mutu air yang sama dengan kegunaan tersebut.
- b. Kelas dua, air yang peruntukannya dapat digunakan untuk prasarana/sarana rekreasi air, pembudidayaan ikan air tawar, peternakan, air untuk mengairi pertanaman dan atau peruntukan lain yang mempersyaratkan mutu air yang sama dengan kegunaan tersebut.
- c. Kelas tiga, air yang peruntukannya dapat digunakan untuk pembudidayaan ikan air tawar, peternakan, air untuk mengairi pertanaman dan atau peruntukan lain yang mempersyaratkan mutu air yang sama dengan kegunaan tersebut.
- d. Kelas empat, air yang peruntukannya dapat digunakan untuk mengairi pertanaman atau peruntukan lain yang mempersyaratkan mutu air yang sama dengan kegunaan tersebut.

Baku mutu air dari kelas I sampai kelas IV kegunaannya berbeda-beda dalam kehidupan manusia. Golongan kelas I dapat dimanfaatkan sebagai air minum dalam kehidupan sehari-hari. Golongan kelas II yang dimanfaatkan oleh manusia sebagai sarana rekreasi. Golongan kelas III dapat digunakan sebagai pembudidayaan ikan air tawar dan peternakan, sedangkan untuk golongan kelas IV digunakan untuk mengairi pertanian. Dari golongan kelas I sampai kelas IV tersebut menunjukkan bahwa tingkat kejernihan airnya berbeda-beda.

Indikator atau parameter yang umum digunakan untuk mendeteksi kualitas air salah satunya adalah *Dissolved Oxygen* (DO) [2]. DO adalah suatu ukuran yang menyatakan banyaknya (kandungan) oksigen yang terlarut dalam air. Kandungan oksigen pada air normal adalah jenuh. DO dalam air akan berkurang jika banyak bakteri pembusuk di dalam air atau banyak zat oksidan di dalam air. Indikator pencemaran air yang lain adalah *Biochemical Oxygen Demand* (BOD). BOD adalah banyaknya oksigen yang dibutuhkan oleh mikroorganisme untuk menguraikan bahan-bahan organik (zat pencemar) yang terdapat di dalam air secara biokimia. BOD menunjukkan jumlah oksigen terlarut yang dibutuhkan oleh organisme hidup untuk menguraikan atau mengoksidasi bahan-bahan buangan di dalam air. Jadi nilai BOD tidak menunjukkan jumlah bahan organik yang sebenarnya, tetapi hanya mengukur skala relatif jumlah oksigen yang dibutuhkan untuk mengoksidasi bahan-bahan buangan tersebut. Jika konsumsi oksigen tinggi, yang ditunjukkan dengan semakin kecilnya sisa oksigen terlarut di dalam air, maka berarti kandungan bahan buangan yang membutuhkan oksigen adalah tinggi. Organisme hidup yang bersifat aerobik membutuhkan oksigen untuk proses reaksi biokimia, yaitu untuk mengoksidasi bahan organik, sintesis sel dan oksidasi sel.

Standar baku mutu untuk indikator DO pada pencemaran air Sungai Mahakam ditunjukkan pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Indikasi Pencemaran Air Sungai
Berdasarkan *Dissolved Oxygen* (DO)

DO	Indikasi
< 6 mg/l	Tercemar
> 6 mg/l	Tercemar

Sumber : Lampiran VI, PP No. 22 Tahun 2021

Berdasarkan Tabel 2.1, air yang bersih (tidak tercemar) jika memiliki nilai DO kurang dari 6 mg/l, dan jika nilai BOD lebih dari 2 mg/l maka air dikatakan ada indikasi tercemar (Rahmah, Suyitno, Siringoringo, 2021)

BAB II

KONSEP DISTRIBUSI VARIABEL ACAK KONTINU

Misal Y adalah variabel acak kontinu non negatif, maka fungsi distribusi kumulatif dinotasikan oleh $F(y)$ dan didefinisikan oleh

$$F(y) = P(Y \leq y) = \int_0^y f(x)dx, \quad (2.1)$$

dengan Y bernilai riil nonnegatif dan f adalah Fungsi Kepadatan Peluang (FKP). Berdasarkan persamaan (2.1), FKP didefinisikan oleh

$$f(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{F(y + \Delta y) - F(y)}{\Delta y} \right] = \frac{dF(y)}{dy}. \quad (2.2)$$

Fungsi *survival* dinotasikan dengan $S(y)$ dan didefinisikan oleh

$$S(y) = P(Y > y) = \int_y^{\infty} f(x)dx, \quad (2.3)$$

dengan $f(y)$ adalah FKP yang diberikan oleh persamaan (2.2). Berdasarkan persamaan (2.1), fungsi *survival* yang diberikan oleh persamaan (2.3) dapat dinyatakan dalam

$$S(y) = 1 - F(y). \quad (2.4)$$

Berdasarkan persamaan (2.2) dan (2.4) diperoleh hubungan antara FKP dan fungsi *survival*, yaitu

$$f(y) = -\frac{d}{dy} S(y). \quad (2.5)$$

Fungsi *hazard* dikenal sebagai *hazard rate* yang dinotasikan dengan $h(y)$ (Collet, 2003; Rinne, 2009; Kleinbaum & Klein, 2012) dan didefinisikan oleh

$$h(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P(y \leq Y < (y + \Delta y) | Y \geq y)}{\Delta y} \quad (2.6)$$

Persamaan (2.6) dapat disederhanakan menjadi

$$h(y) = \frac{f(y)}{S(y)}. \quad (2.7)$$

BAB III

KONSEP DISTRIBUSI WEIBULL

A. Pengertian Distribusi Weibull

Distribusi Weibull merupakan salah satu distribusi yang memiliki peranan penting dalam analisis *survival*. Distribusi Weibull dengan tiga parameter mempunyai FKP sebagai berikut

$$f(y) = \frac{\gamma}{\eta} \left(\frac{y-\tau}{\eta} \right)^{\gamma-1} \exp \left[- \left(\frac{y-\tau}{\eta} \right)^{\gamma} \right], \quad (2.8)$$

dengan $0 \leq y < \infty$; $0 < \gamma, \tau, \eta < \infty$, dimana τ, γ dan η berturut-turut menyatakan parameter lokasi, parameter bentuk dan parameter skala. Salah satu bentuk khusus distribusi Weibull adalah distribusi Weibull versi skala-bentuk (*scale- shape version*). Berdasarkan persamaan (2.8), jika $\tau = 0$ didapat FKP peubah acak Y berdistribusi Weibull versi skala-bentuk, yaitu (Rinne, 2009)

$$f(y) = \frac{\gamma}{\eta} \left(\frac{y}{\eta} \right)^{\gamma-1} \exp \left[- \left(\frac{y}{\eta} \right)^{\gamma} \right]. \quad (2.9)$$

FKP yang diberikan oleh persamaan (2.9) dapat ditulis dalam bentuk

$$f(y) = \lambda \gamma y^{\gamma-1} \exp \left[- \lambda y^{\gamma} \right], \quad (2.10)$$

dengan $\lambda = \eta^{-\gamma}$ (Collet, 2003; Fajriati, Suyitno, & Wasono, 2022; Lawless, 2003). Berdasarkan persamaan (2.1), (2.5) dan (2.10) fungsi distribusi kumulatif dan fungsi *survival* ditribusi Weibull versi skala-bentuk berturut-turut adalah

$$F(t) = 1 - \exp(-\lambda t^{\gamma}), \quad (2.11)$$

dan

$$S(t) = \exp(-\lambda t^{\gamma}). \quad (2.12)$$

Berdasarkan persamaan (2.7), (2.10) dan (2.12) fungsi *hazard* ditribusi Weibull versi skala-bentuk (Collet, 2003; Fajriati, Suyitno, & Wasono, 2022; Lawless, 2003) adalah

$$h(t) = \gamma \lambda t^{\gamma-1} .$$

Berdasarkan persamaan (2.10), momen ke $-r$ dan *mean* (ekspektasi) dari peubah acak Y berturut-turut (Rinne, 2009; Suyitno, 2017) adalah

$$E(Y^r) = \int_0^{\infty} y^r f(y) dy = \lambda^{-\frac{r}{\gamma}} \Gamma\left(\frac{r}{\gamma} + 1\right),$$

dan

$$\mu_Y = E(Y) = \lambda^{-\frac{1}{\gamma}} \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right). \quad (2.14)$$

Salah satu metode penaksiran parameter distribusi Weibull dengan FKP diberikan oleh persamaan (2.10) adalah *Maximum Likelihood Estimation* (MLE).

B. Penaksiran Parameter Ditribusi Weibull

Metode penaksiran parameter distribusi Weibull yang dibahas pada penelitian ini adalah MLE. Metode MLE merupakan metode penaksiran parameter dengan memaksimumkan fungsi *likelihood*. Misal diberikan n data pengamatan variabel Y , yaitu $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ yang saling bebas dan berdistribusi identik, yaitu $y_i \sim W(\lambda, \gamma), i = 1, 2, 3, \dots, n$. Fungsi *likelihood* berdasarkan FKP yang diberikan oleh persamaan (2.11), didefinisikan oleh

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}_0) &= \prod_{i=1}^n f(\boldsymbol{\theta}_0 | y_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \lambda \gamma y_i^{\gamma-1} \exp[-\lambda y_i^{\gamma}], \end{aligned} \quad (2.15)$$

dengan $\boldsymbol{\theta}_0 = [\lambda \quad \gamma]^T$. Penaksir *Maximum Likelihood* (ML) dari $\boldsymbol{\theta}_0$ adalah $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ yang memaksimumkan fungsi *likelihood* (2.14), dan juga memaksimumkan fungsi *log-likelihood*, karena maksimum kedua fungsi tersebut dicapai pada titik

yang sama, yaitu $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$. Fungsi *log-likelihood* berdasarkan fungsi *likelihood* (2.15) adalah

$$\begin{aligned}\ell(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y}) &= \ln[L(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})] = \ln\left(\prod_{i=1}^n f(\boldsymbol{\theta}_0 | y_i)\right) = \sum_{i=1}^n \ln f(\boldsymbol{\theta}_0 | y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n [\ln(\lambda \gamma y_i^{\gamma-1} \exp[-\lambda y_i^\gamma]) \\ &= \sum_{i=1}^n [\ln \lambda + \ln \gamma + (\gamma-1) \ln y_i - \lambda y_i^\gamma] \quad (2.16)\end{aligned}$$

$\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ yang memaksimumkan fungsi *likelihood* diperoleh dari turunan pertama fungsi *log-likelihood* (2.15) terhadap semua parameter dan disamakan dengan nol, yaitu

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\theta}_0} = \mathbf{0}, \quad (2.17)$$

dengan $\mathbf{0}$ adalah vektor nol berdimensi 2 dan persamaan (2.17) dinamakan persamaan *likelihood*. Ruas kiri persamaan (2.17) adalah vektor gradien berdimensi 2, yaitu

$$\mathbf{g}_1(\boldsymbol{\theta}_0) = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\theta}_0}. \quad (2.18)$$

Bentuk umum komponen-komponen vektor gradien (2.18) berturut-turut adalah

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{\lambda} - y_i^\gamma \right], \quad (2.19)$$

dan

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{\gamma} + \ln y_i - \lambda y_i^\gamma \ln y_i \right]. \quad (2.20)$$

Berdasarkan persamaan (2.19) dan (2.20), persamaan *likelihood* (2.17) merupakan sistem persamaan non-linier yang saling bergantung, sehingga solusi eksak untuk mendapatkan penaksir ML tidak dapat ditemukan secara analitis. Metode untuk mendapatkan penaksir ML ($\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$) adalah metode iteratif

Newton-Raphson. Algoritma iterasi Newton-Raphson diperlukan perhitungan vektor gradien dan matriks Hessian. Vektor gradien diberikan oleh persamaan (2.18) dan matriks Hessian adalah matriks turunan parsial orde ke-2 dari fungsi *log-likelihood* (2.16) terhadap semua kombinasi semua parameter, dengan bentuk umum sebagai berikut

$$\mathbf{H}_1(\boldsymbol{\theta}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})}{\partial \lambda \partial \gamma} \\ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})}{\partial \lambda \partial \gamma} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})}{\partial \gamma^2} \end{bmatrix}_{2 \times 2}. \quad (2.21)$$

Berdasarkan persamaan (2.19) dan (2.20) elemen-elemen matriks Hessian (2.21) berturut-turut adalah

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{\lambda} - y_i^\gamma \right] \right] = \sum_{i=1}^n -\frac{1}{\lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2}; \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})}{\partial \gamma^2} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{\gamma} + \ln y_i - \lambda y_i^\gamma \ln(y_i) \right] = \sum_{i=1}^n \left[-\frac{1}{\gamma^2} - \lambda (\ln y_i)^2 y_i^\gamma \right]; \quad (2.23)$$

dan

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})}{\partial \lambda \partial \gamma} = \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}_0 | \mathbf{y})}{\partial \gamma \partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{\gamma} - y_i^\gamma \right] \right] = -\sum_{i=1}^n y_i^\gamma \ln y_i. \quad (2.24)$$

Berdasarkan hasil perhitungan vektor gradien (2.18) dan matriks Hessian (2.21), algoritma iterasi Newton-Raphson (Khuri, 2003) untuk mendapatkan $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ adalah

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_0^{q+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_0^{(q)} - \left[\mathbf{H}_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0^{(q)}) \right]^{-1} \mathbf{g}_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}_0^{(q)}), q = 0, 1, 2, \dots \quad (2.25)$$

Proses iterasi dimulai dari penentuan harga awal $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0^{(0)} = \left[\lambda^{(0)} \quad \gamma^{(0)} \right]$ dan iterasi dihentikan pada iterasi ke- $q+1$ jika dipenuhi kondisi konvergen, yaitu jika $\left\| \hat{\boldsymbol{\theta}}_0^{(q+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_0^{(q)} \right\| < \varepsilon$, dengan ε adalah bilangan riil non-negatif yang cukup kecil misalnya 10^{-6} . (Suyitno, 2017)

C. Pengujian Distribusi Data

Salah satu metode pengujian distribusi data adalah metode nonparametrik Kolmogorov-Smirnov. Misal $\hat{F}(y)$ adalah penaksir fungsi distribusi kumulatif yang diberikan oleh persamaan (2.11). Hipotesis pengujian distribusi data menggunakan metode nonparametrik Kolmogorov-Smirnov adalah sebagai berikut

$$H_0 : F(y) = \hat{F}(y)$$

(Data mengikuti distribusi Weibull dengan fungsi distribusi kumulatif adalah $\hat{F}(y)$)

$$H_1 : F(y) \neq \hat{F}(y)$$

(Data tidak mengikuti distribusi Weibull dengan fungsi distribusi kumulatif adalah $\hat{F}(t)$)

Statistik uji diberikan oleh

$$D = \max\{D_F, D_S\} \quad (2.26)$$

dengan

$$\begin{aligned} D_F &= \max_{1 \leq i \leq n} |\hat{F}(y_i) - F^*(y_i)|; \\ D_S &= \max_{1 \leq i \leq n} |\hat{S}(y_i) - S^*(y_i)| \end{aligned} \quad (2.27)$$

dan

$$\begin{aligned} F^*(y_i) &= \frac{\text{banyaknya data variabel } Y \text{ yang } \leq y_i}{n}; \\ S^*(y_i) &= \frac{\text{banyaknya data variabel } Y \text{ yang } \geq y_i}{n}. \end{aligned}$$

$\hat{F}(t)$ dan $\hat{S}(y)$ pada persamaan (2.27) adalah masing-masing adalah fungsi distribusi yang dihipotesiskan dan fungsi *survival* yang diperoleh dari penaksiran parameter distribusi Weibull dengan fungsi distribusi kumulatif diberikan oleh persamaan (2.11). $F^*(y)$ dan $S^*(y)$ berturut-turut adalah fungsi

distribusi kumulatif dan fungsi *survival* empiris berdasarkan data sampel. H_0 ditolak pada taraf signifikansi α , jika $D > D_{(\alpha, n)}$ (Rinne, 2009; Rahmah, Suyitno, & Siringoringo, 2021).

D. Model Regresi Weibull

Model regresi Weibull merupakan pengembangan dari distribusi Weibull, yaitu distribusi Weibull yang dipengaruhi langsung oleh kovariat atau variabel bebas. Model regresi Weibull secara matematis dapat dikonstruksi dari distribusi Weibull dengan parameter skala (λ) dinyatakan dalam fungsi dari kovariat atau fungsi dari parameter regresi (Rinne, 2009; Lawless, 2003; Suyitno, 2017). Model-model regresi Weibull adalah regresi *survival* Weibull, regresi *hazard* Weibull dan regresi *mean* Weibull.

Berdasarkan persamaan (2.8) dan (2.9), parameter skala (λ) adalah bilangan riil positif, sehingga dapat dinyatakan dalam fungsi parameter regresi dalam format

$$\lambda(\mathbf{x}) = \exp(-\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}) = \exp(-\beta_0 - \beta_1 X_1 - \beta_2 X_2 - \dots - \beta_p X_p), \quad (2.28)$$

dengan $\boldsymbol{\beta}^T = [\beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_p]$; $\mathbf{x} = [X_0 \ X_1 \ \dots \ X_p]^T$ dan $X_0 = 1$.

Model-model regresi Weibull dapat dikonstruksi dari persamaan persamaan (2.12), (2.13) dan (2.14) dengan memperhatikan persamaan (2.28).

Pensubstitusian persamaan (2.28) ke persamaan (2.12) didapat model umum regresi *survival* Weibull, yaitu

$$S(y | \mathbf{x}) = \exp(-y^\gamma \exp(-\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x})). \quad (2.29)$$

Model regresi *hazard* Weibull dapat dikonstruksi berdasarkan persamaan (2.13) dan (2.28), yaitu

$$h(y | \mathbf{x}) = \gamma y^{\gamma-1} \exp(-\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}). \quad (2.30)$$

Model regresi *mean* Weibull diperoleh dari pensubstitusian persamaan (2.28) ke persamaan (2.14) dan didapat

$$\mu_y(\mathbf{x}) = \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \exp\left[\frac{1}{\gamma} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}\right]. \quad (2.31)$$

Berdasarkan persamaan (2.7), (2.29) dan (2.30) diperoleh fungsi kepadatan peluang (FKP) yang langsung dipengaruhi oleh kovariat (parameter regresi), yaitu

$$f(y|\mathbf{x}) = \gamma y^{\gamma-1} \exp(-\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}) \exp(-y^\gamma \exp(-\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x})). \quad (2.32)$$

E. Penaksiran Parameter Model Regresi Weibull

Penaksiran parameter model Regresi Weibull (RW) terdiri dari penaksiran parameter model regresi *survival*, model regresi *hazard* Weibull dan model regresi *mean* Weibull, dengan model umum berturut-turut diberikan oleh persamaan (2.29), (2.30) dan (2.31). Penaksiran parameter model RW dapat menggunakan metode MLE. Tahapan awal metode MLE adalah mendefinisikan fungsi *likelihood* (Fajriati, Suyitno, & Wasono, 2022; Suyitno, 2017; Rahmah, Suyitno, & Siringoringo, 2021).

Misalkan diberikan n data sampel $(y_i, \mathbf{x}_i, \delta_i), i = 1, 2, \dots, n$ yang saling bebas dan berdistribusi indintik, yakni $y_i \sim W(\gamma, \lambda(\mathbf{x}_i))$ dengan $\lambda(\mathbf{x}_i)$ diberikan oleh persamaan (2.28). δ_i adalah status klasifikasi individu ke- i , dan didefinisikan

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{jika } y_i \geq y^* \\ 0, & \text{jika } y_i < y^* \end{cases}$$

dengan y^* adalah suatu konstanta riil positif yang diketahui. Diketahui bahwa,

$P(Y = y_i | \delta_i = 1) = f(y_i | \mathbf{x}_i)$ dan $P(Y = y_i | \delta_i = 0) = S(y_i | \mathbf{x}_i)$ dengan $S(y_i | \mathbf{x}_i)$ dan $f(y_i | \mathbf{x}_i)$ berturut-turut diberikan oleh persamaan (2.29) dan (2.30).

Berdasarkan persamaan (2.29) dan (2.30), fungsi *likelihood* didefinisikan oleh

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n \left(f(y_i) \right)^{\delta_i} \left(S(y_i) \right)^{1-\delta_i}, \quad (2.33)$$

dengan $\boldsymbol{\theta} = [\gamma \quad \boldsymbol{\beta}^T]^T$, dimana $\boldsymbol{\beta}^T = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \dots \quad \beta_p]$.

Berdasarkan persamaan (2.7), fungsi *likelihood* (2.33) dapat dinyatakan dalam format

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n h(y_i | \mathbf{x}_i)^{\delta_i} S(y_i | \mathbf{x}_i) \\ = \prod_{i=1}^n \left(\gamma y_i^{\gamma-1} \exp(-\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i) \right)^{\delta_i} \exp\left(-y_i^\gamma \exp(-\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i)\right), \quad (2.34)$$

dengan $\mathbf{x}_i = [x_{i0} \ x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{ip}]^T$; $x_{i0} = 1$. Penaksir ML model RW adalah nilai vektor $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ yang memaksimumkan fungsi *likelihood* yang diberikan oleh persamaan (2.31), dan secara matematis, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ lebih mudah diperoleh dengan menentukan maksimum fungsi logaritma natural dari fungsi *likelihood* atau fungsi *log-likelihood*. Nilai maksimum kedua fungsi *likelihood* (2.31) dan *log-likelihood* akan dicapai pada titik yang sama, yaitu titik $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Penerapan logaritma natural pada kedua ruas persamaan (2.33) diperoleh fungsi *log-likelihood*, yaitu

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \ln L(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \left(\delta_i \left[\ln \gamma + (\gamma - 1) \ln y_i - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i \right] - y_i^\gamma \exp\left[-\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i\right] \right). \quad (2.35)$$

Penerapan logaritma natural persamaan (2.34) menjadi persamaan (2.35) tidak mengubah nilai data pengamatan. Penaksir ML model RW diperoleh dengan menyelesaikan persamaan *likelihood* yang diberikan oleh

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}, \quad (2.36)$$

dengan $\mathbf{0}$ adalah vektor nol berdimensi $p + 2$, dan ruas kanan persamaan (2.36) adalah vektor gradien berdimensi $p + 2$. Bentuk umum vektor gradien berdasarkan persamaan (2.36) adalah

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \left[\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma} \quad \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} \right]^T, \quad (2.37)$$

dengan $\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} = \left[\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_0} \quad \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_p} \right]$, (Rinne, 2009; Suyitno, 2017;

Rahmah, Suyitno & Siringoringo, 2021). Bentuk umum komponen-komponen vektor gradien (2.37) adalah

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^n \left(\delta_i \left[\frac{1}{\gamma} + \ln y_i \right] - (\ln y_i) y_i^\gamma \exp[-\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i] \right), \quad (2.38)$$

dan

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_k} = \sum_{i=1}^n x_{ik} \left(y_i^\gamma \exp[-\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i] - \delta_i \right); \quad k = 0, 1, 2, \dots, p. \quad (2.39)$$

Berdasarkan komponen-komponen vektor gradien yang diberikan oleh persamaan (2.37) dan (2.38), maka persamaan *likelihood* (2.35) terdiri dari persamaan-persamaan nonlinier, sehingga solusi eksak persamaan (2.36) untuk mendapatkan penaksir *closed form* (penaksir eksak) ML tidak dapat ditemukan secara analitis. Metode dalam menyelesaikan persamaan (2.34) untuk mendapatkan hampiran penaksir ML ($\hat{\boldsymbol{\theta}}$) adalah metode iteratif Newton-Raphson.

Penentuan penaksir ML model RW menggunakan metode Newton-Raphson diperlukan perhitungan vektor gradien dan matriks Hessian. Vektor gradien $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$ diberikan oleh persamaan (2.36) dan matriks Hessian $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$ adalah matriks simetri orde $p+2$, yaitu matriks turunan orde kedua dari fungsi *log-likelihood* (2.34). Bentuk umum matriks Hessian adalah

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma^2} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma \partial \boldsymbol{\beta}^T} \\ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \gamma} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^T} \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

dengan

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma \partial \boldsymbol{\beta}^T} = \left[\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma \partial \beta_0} \quad \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma \partial \beta_1} \quad \dots \quad \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma \partial \beta_p} \right],$$

dan

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_0^2} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_0 \partial \beta_p} \\ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_0^2} & \dots & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_p \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_p \partial \beta_1} & \dots & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_p^2} \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Berdasarkan turunan orde pertama yang diberikan oleh persamaan (2.38) dan (2.39), elemen-elemen matriks Hessian $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$ yang diberikan oleh persamaan (2.41) dapat dinyatakan dalam bentuk umum sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma^2} = - \sum_{i=1}^n \left[\frac{\delta_i}{\gamma^2} + (\ln y_i)^2 y_i^\gamma \exp[-\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i] \right], \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_k^2} = \sum_{i=1}^n - y_i^\gamma (x_{ik})^2 \exp[-\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i], \quad k = 0, 1, \dots, p \quad (2.43)$$

Elemen-elemen nondiagonal dapat dinyatakan dalam bentuk umum, yaitu untuk $k \neq t; k, l = 0, 1, 2, \dots, p$ dan $t = 0, 1, 2, \dots, p$ didapat

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_k \partial \gamma} = \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \gamma \partial \beta_k} = - \sum_{i=1}^n X_{ki} \ln(y_i) y_i^\gamma \exp[-\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i], \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_l \partial \beta_k} = \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_k \partial \beta_l} = - \sum_{i=1}^n x_{ik} x_{il} y_i^\gamma \exp[-\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i]. \quad (2.45)$$

Berdasarkan hasil penghitungan komponen-komponen vektor gradien $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$ yang diberikan oleh persamaan (2.38) dan (2.39), serta elemen-elemen matriks Hessian $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$ yang diberikan oleh persamaan (2.42), (2.43), (2.44) dan (2.45), penaksir ML parameter model RW ($\hat{\boldsymbol{\theta}}$) dapat ditemukan melalui algoritma iterasi Newton-Raphson (Khuri, 2003) yang diberikan oleh

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q)} - \left[\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q+1)}) \right]^{-1} \mathbf{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(q)}), q = 0, 1, 2, \dots \quad (2.46)$$

Proses iterasi dimulai dengan penentuan nilai awal (*initial value*) $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(0)} = [\gamma^{(0)} \ \beta_0^{(0)} \ \dots \ \beta_p^{(0)}]^T$, dan proses iterasi Newton-Raphson dihentikan pada iterasi ke $q+1$ bila terpenuhi kondisi konvergen, yaitu $\|(\hat{\boldsymbol{\theta}})^{(q+1)} - (\hat{\boldsymbol{\theta}})^{(q)}\| \leq \varepsilon$ dimana $\|\dots\|$ adalah *norm* suatu vektor, dan ε adalah bilangan positif yang sangat kecil misal 10^{-12} (Suytino, 2017).

Berdasarkan matriks Hessian yang diberikan oleh persamaan (2.40) dapat diperoleh matriks informasi Fisher (Rencher & Schaalje, 2018), yaitu

$$\mathbf{I}_1(\boldsymbol{\theta}) = -E \left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right) = -E(\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})). \quad (2.47)$$

Diketahui bahwa $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ adalah penaksir dari $\boldsymbol{\theta}$, maka didapat

$$\mathbf{I}_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = -\mathbf{H}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (2.48)$$

dan

$$\text{cov}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \left[\mathbf{I}_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \right]^{-1} \quad (2.49)$$

F. Pengujian Parameter Model Regresi Weibull

Pengujian signifikansi parameter terdiri dari dua tahap yaitu pengujian signifikansi parameter model secara simultan dan pengujian signifikansi parameter model secara parsial.

Pengujian parameter secara simultan untuk mengetahui signifikansi parameter β terhadap variabel respon secara simultan atau untuk mengetahui kelayakan model. Hipotesis pengujian secara serentak adalah

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0$$

(Model regresi Weibull tidak layak)

$$H_1 : \text{Minimal ada satu } \beta_k \neq 0, k = 1, 2, \dots, p$$

(Model regresi Weibull layak) (2.50)

Statistik uji berdasarkan metode *likelihood ratio* adalah

$$G = 2\left(\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1)\right), \quad (2.51)$$

dengan $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\gamma} \quad \hat{\beta}_0 \quad \hat{\beta}_1 \quad \dots \quad \hat{\beta}_p]$ adalah himpunan parameter di bawah model regresi Weibull lengkap (model populasi) dan $\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ adalah nilai maksimum fungsi *log likelihood* pada persamaan (2.35) pada $(\hat{\boldsymbol{\theta}})$, yakni

$$\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \sum_{i=1}^n \left[\delta_i \left[\ln \hat{\gamma} + (\hat{\gamma} - 1) \ln y_i - \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \hat{\mathbf{x}}_i \right] + y_i^\gamma \exp \left[-\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \hat{\mathbf{x}}_i \right] \right] \quad (2.52)$$

Himpunan parameter di bawah H_0 adalah $\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 = [\hat{\gamma}_{00} \quad \hat{\beta}_{00}]$ dan nilai maksimum fungsi *log-likelihood* di bawah model H_0 dan nilai $\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1)$ adalah

$$\ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}_1) = \sum_{i=1}^n \left[\delta_i \left[\ln \hat{\gamma}_{00} + (\hat{\gamma}_{00} - 1) \ln y_i - \hat{\beta}_{00} \right] + y_i^{\hat{\gamma}_{00}} \exp \left[-\hat{\beta}_{00} \right] \right]. \quad (2.53)$$

Di bawah H_0 , statistik uji $G \sim \chi_p^2$, dan statistik uji G yang diberikan oleh persamaan (2.51) dapat dihipotesis (Rencher & Schaalje, 2008) oleh

$$G \approx \mathbf{B}^T \left[\mathbf{I}^{22}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \right]^{-1} \mathbf{B}, \quad (2.54)$$

dengan $\mathbf{B}^T = [\hat{\beta}_1 \quad \hat{\beta}_2 \quad \dots \quad \hat{\beta}_p]$ dan $[\mathbf{I}_{22}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]$ diperoleh dari invers matriks informasi fisher yaitu $[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1}$ dengan menghapuskan baris ke-1 dan ke-2 serta kolom ke-1 dan ke-2 (Fajriati, Suyitno, & Wasono, 2022; Suyitno, 2017; Rahmah, Suyitno, & Siringoringo, 2021).

Daerah kritis hipotesis (2.50) adalah H_0 akan ditolak pada taraf uji signifikansi α jika nilai $G > \chi_{(\alpha,p)}^2$, dimana p adalah banyaknya parameter model di bawah populasi dikurangi dengan banyaknya parameter di bawah H_0 . $\chi_{(\alpha,p)}^2$ adalah suatu nilai sedemikian sehingga $P(G_v > \chi_{(\alpha,p)}^2) = 1 - F(\chi_{(\alpha,p)}^2) = \alpha$, dengan G_v adalah peubah acak, $G_v \sim \chi_p^2$ dan F adalah fungsi distribusi kumulatif.

Daerah kritis hipotesis (2.50) ekuivalen dengan menolak H_0 pada taraf signifikansi α jika $P_{value} < \alpha$, dengan

$$P_{value} = P(G_v > G) = 1 - F(G), \quad (2.55)$$

dimana G adalah nilai statistik uji yang diberikan oleh persamaan (2.51) (Fajriati, Suytino, & Wasono, 2022; Suyitno, 2017; Rahmah, Suyitno, & Siringoringo, 2021).

Pengujian hipotesis parameter regresi secara parsial untuk mengetahui apakah kovariat tertentu secara individual berpengaruh terhadap model regresi Weibull. Hipotesis pengujian secara parsial untuk k tertentu $k = 0, 1, 2, \dots, p$ adalah

$$H_0 : \beta_k = 0$$

(Variabel kovariat X_k tidak berpengaruh terhadap model regresi Weibull)

$$H_1 : \beta_k \neq 0 \quad (2.56)$$

(Variabel kovariat X_k berpengaruh terhadap model regresi Weibull)

Statistik uji diberikan oleh

$$Z_s = \frac{\hat{\beta}_k}{\sqrt{\text{var}(\hat{\beta}_k)}}, \quad (2.57)$$

dengan $Z \sim N(0,1)$ untuk $n \rightarrow \infty$. $\text{var}(\hat{\beta}_k)$ adalah elemen diagonal ke- $k+1$ dari invers matriks informasi Fisher $[\mathbf{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})]^{-1}$ (Rencher & Schaalje, 2008).

Daerah kritis pengujian hipotesis (2.56) adalah menolak H_0 pada taraf signifikansi α jika $|Z_{hitung}| > Z_{1-\alpha/2}$ dengan $Z_{1-\alpha/2}$ adalah *quantile* ke- $(1-\alpha/2)$ dari distribusi $N(0,1)$. Nilai $Z_{1-\alpha/2}$ dihitung melalui hubungan $F(Z_{(1-\alpha/2)}) = 1-\alpha/2$, dengan F adalah fungsi distribusi kumulatif dari distribusi $N(0,1)$. Daerah kritis pengujian hipotesis (2.56) ekuivalen dengan menolak H_0 pada taraf signifikansi α , jika $p_{value} < \alpha$, dengan

$$p_{value} = 2(1 - F(|Z_s|)), \quad (2.58)$$

dimana $Z \sim N(0,1)$ dan Z_s adalah nilai statistik yang diberikan oleh persamaan (2.57) (Fajriati, Suyitno, & Wasono, 2022; Suyitno, 2017; Rahmah, Suyitno, & Siringoringo, 2021).

G. Pendeteksian Multikolinieritas

Multikolinieritas merupakan kondisi dimana terdapat hubungan linier atau korelasi yang kuat antar kovariat di dalam model regresi. Adanya multikolinieritas dalam model menyebabkan penaksiran parameter tidak dapat dilakukan dan atau menghasilkan penaksir yang bias.

Multikolinieritas dapat dideteksi berdasarkan nilai *Variance Inflation Factor* (VIF) (Hocking, 2003). Nilai VIF dihitung berdasarkan formula

$$VIF = \frac{1}{1 - R_k^2}, \quad (2.59)$$

dengan R_k^2 adalah koefisien determinasi dari X_k (kovariat ke- k) yang diregresikan terhadap kovariat lainnya, yaitu

$$R_k^2 = \frac{\hat{\mathbf{b}}^T \mathbf{C}^T \mathbf{x}_k - n\bar{X}_k^2}{\mathbf{x}_k^T \mathbf{x}_k - n\bar{X}_k^2}. \quad (2.60)$$

$\hat{\mathbf{b}}$ pada persamaan (2.60) adalah vektor penaksir parameter regresi kovariat X_k yang diregresikan terhadap kovariat lainnya, \mathbf{x}_k adalah vektor data pengamatan kovariat X_k dan \mathbf{C} adalah matriks yang diperoleh dari matriks data kovariat \mathbf{X} , dengan menghapus kolom ke- $k+1$, dimana

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}_{n \times (p+1)} \quad (2.68)$$

H. Interpretasi Model Regresi Weibull

Interpretasi model RW yang terdiri dari model regresi *survival* Weibull dan model regresi *hazard* Weibull berdasarkan variabel-variabel yang berpengaruh dan nilai rasio. Rasio regresi *hazard* Weibull individu ke- i berdasarkan kovariat X_k yang berpengaruh dengan X_k adalah kontinu atau *count*, adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} R_h(x_{ik}) &= \frac{h(y_i | x_{ik} + 1)}{h(y_i | x_{ik})} = \frac{\hat{\gamma} y_i^{\hat{\gamma}-1} \exp\left(-\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \dots - \hat{\beta}_k (x_{ik} + 1) - \dots - \hat{\beta}_k x_{ik}\right)}{\hat{\gamma} y_i^{\hat{\gamma}-1} \exp\left(-\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \dots - \hat{\beta}_k x_{ik} - \dots - \hat{\beta}_k x_{ik}\right)} \\ &= \frac{\exp(-\hat{\beta}_k (x_{ik} + 1))}{\exp(-\hat{\beta}_k x_{ik})} = \exp(-\hat{\beta}_k) \end{aligned} \quad (2.69)$$

Rasio regresi *hazard* Weibull individu ke- i berdasarkan kovariat X_k kategorik nominal bernilai 0 atau 1 adalah

$$\begin{aligned} R_h(x_{ik}) &= \frac{h(y_i | x_{ik} = 1)}{h(y_i | x_{ik} = 0)} = \frac{\hat{\gamma} y_i^{\hat{\gamma}-1} \exp\left(-\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \dots - \hat{\beta}_k (1) - \dots - \hat{\beta}_k x_{ik}\right)}{\hat{\gamma} y_i^{\hat{\gamma}-1} \exp\left(-\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \dots - \hat{\beta}_k (0) - \dots - \hat{\beta}_k x_{ik}\right)} \\ &= \exp(-\hat{\beta}_k). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Berdasarkan persamaan (2.68) dan (2.69), nilai rasio regresi *hazard* Weibull semua individu berdasarkan kovariat X_k adalah sama.

Nilai rasio regresi *survival* dan distribusi kumulatif Weibull berdasarkan kovariat X_k kontinu atau *count* berturut-turut adalah

$$\begin{aligned} R_S(x_{ik}) &= \frac{\hat{S}(y_i | x_{ik} + 1)}{\hat{S}(y_i | x_{ik})} \\ &= \frac{\exp\left[-y_i^{\hat{\gamma}} \exp\left(-\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \dots - \hat{\beta}_k (x_{ik} + 1) - \dots - \hat{\beta}_p x_{ip}\right)\right]}{\exp\left[-y_i^{\hat{\gamma}} \exp\left(-\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \dots - \hat{\beta}_k x_{ik} - \dots - \hat{\beta}_p x_{ip}\right)\right]}. \end{aligned}$$

dan

$$R_f(x_{ik}) = \frac{\hat{f}(y_i | x_{ik} + 1)}{\hat{f}(y_i | x_{ik})} = \frac{1 - \hat{S}(y_i | x_{ik} + 1)}{1 - \hat{S}(y_i | x_{ik})}. \quad (2.71)$$

Nilai rasio regresi *survival* dan distribusi kumulatif Weibull berdasarkan kovariat X_k kategorik nominal bernilai 0 atau 1 berturut-turut adalah (Rinne,

2009; Rahmah, Suyitno, & Siringoringo, 2021; Hosmer, Lemeshow, & May, 2008)

$$R_S(x_{ik}) = \frac{\hat{S}(y_i | x_{ik} = 1)}{\hat{S}(y_i | x_{ik} = 0)} = \frac{\exp\left[-y_i^{\hat{\gamma}} \exp\left(-\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \dots - \hat{\beta}_k - \dots - \hat{\beta}_p x_{ip}\right)\right]}{\exp\left[-y_i^{\hat{\gamma}} \exp\left(-\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \dots - 0 - \dots - \hat{\beta}_p x_{ip}\right)\right]},$$

dan

$$R_f(x_{ik}) = \frac{\hat{f}(y_i | x_{ik} = 1)}{\hat{f}(y_i | x_{ik} = 0)} = \frac{1 - \hat{S}(y_i | x_{ik} = 1)}{1 - \hat{S}(y_i | x_{ik} = 0)} \quad (2.72)$$

Berdasarkan ekspresi persamaan (2.70) dan (2.71), nilai rasio regresi survival Weibull setiap individu berdasarkan kovariat X_k adalah tidak sama.

I. Pemilihan Model Terbaik

Pemilihan model terbaik dilakukan untuk mendapatkan model yang sederhana dan terbaik (sifat parsimoni). Model terbaik diperoleh melalui penaksiran parameter semua model yang melibatkan semua kombinasi kovariat dan berdasarkan nilai *Akaike Information Criterion* (AIC) yang terkecil. Nilai AIC adalah

$$AIC = -2\ell(\hat{\theta}) + 2K \quad (2.73)$$

dengan $\ell(\hat{\theta})$ adalah nilai maksimum fungsi *log-likelihood* pada persamaan (2.53) dan K adalah banyaknya parameter pada setiap model yang terbentuk (Rencher & Schaalje, 2008).

BAB IV

PEMODELAN REGRESI *WEIBULL* PADA POTENSI PENCEMARAN SUNGAI MAHAKAM

A. Pendahuluan

Air merupakan salah satu kebutuhan pokok makhluk hidup termasuk manusia. Air untuk memenuhi kebutuhan pokok manusia (minum, memasak, dan mencuci) harus higienis secara fisik dan kimiawi, agar terhindar dari permasalahan kesehatan. Pemenuhan kebutuhan air bersih sebagian besar masyarakat Kalimantan Timur (Kaltim) dipasok oleh Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) dengan sumber air baku adalah air sungai Mahakam. Sungai Mahakam adalah sungai terpanjang dan terlebar di daerah hutan tropis lembab (*tropical rain forest*) Kaltim. Multi fungsi Daerah Aliran Sungai (DAS) Mahakam sebagai pemukiman penduduk, hotel, restoran, pertanian, peternakan, industri, dan pertambangan serta sebagai jalur transportasi kegiatan ekonomi yang sangat padat berpotensi meningkatkan limbah dalam aliran air sungai. Peningkatan limbah dalam aliran air sungai akan meningkatkan potensi pencemaran yang dapat mengancam kesehatan masyarakat, sehingga perlu tindakan pencegahan pencemaran air sungai Mahakam. Salah satu tindakan pencegahan pencemaran air sungai Mahakam berdasarkan ilmu statistik adalah memberikan informasi kepada masyarakat tentang faktor-faktor yang memengaruhi pencemaran air sungai Mahakam. Potensi pencemaran dan faktor faktor yang memengaruhi pencemaran air sungai Mahakam dapat dianalisis melalui pemodelan Regresi Weibull (RW).

Model regresi Weibull adalah model regresi yang dikembangkan dari distribusi Weibull, yakni distribusi Weibull yang dipengaruhi langsung oleh kovariat atau peubah bebas. Penerapan distribusi Weibull umumnya terbatas pada penaksiran parameter dan pengujian pola sebaran data yang mengikuti distribusi Weibull. Pola sebaran data respon (peubah terikat) di lapangan banyak ditemui mengikuti distribusi Weibull dan pada umumnya dipengaruhi oleh data

kovariat, oleh karena itu perlu studi tentang model distribusi Weibull yang dipengaruhi langsung oleh kovariat. Distribusi Weibull yang dipengaruhi langsung oleh kovariat, selanjutnya dinamakan model RW (Rinne, 2009; Suyitno, 2017; Fajriati, Suyitno & Wasono, 2022). Model RW pada penelitian ini akan diterapkan pada data indikator pencemaran air *Dissolved Oxygen* (DO) air Sungai Mahakam. DO merupakan salah satu indikator pencemaran air (Lestari, Suyitno & Siringoringo, 2021). Model-model regresi Weibull yang dibahas pada penelitian ini, yaitu model *survival*, model *hazard* Weibull, dan model regresi *mean* Weibull. Penelitian ini akan menentukan model peluang air Sungai Mahakam tercemar dan model laju air Sungai Mahakam tidak tercemar pada data indikator pencemaran air DO, serta menemukan faktor-faktor yang memengaruhinya. Besar peluang air Sungai Mahakam tercemar dapat dimodelkan melalui regresi *survival* Weibull pada data DO, dan laju (*rate*) air Sungai Mahakam tidak tercemar dapat dimodelkan melalui regresi *hazard* Weibull, serta rata-rata DO di perairan Sungai Mahakam dimodelkan melalui model regresi *mean* Weibull. Berdasarkan model RW tersebut dapat dianalisis potensi pencemaran air Sungai Mahakam dan faktor-faktor yang memengaruhi menggunakan pemodelan RW pada data DO tahun 2021. Informasi ini sangat berguna bagi pemerintah, pemerhati lingkungan, dan masyarakat dalam melakukan pencegahan pencemaran air Sungai Mahakam.

Tujuan khusus penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mendapatkan program komputasi *Octave* untuk mendapatkan model Regresi Weibull terbaik pada data indikator penaran air DO.
2. Mendapatkan model regresi Weibull pada data DO air Sungai Mahakam 2021.
3. Mendapatkan informasi potensi pencemaran air Sungai Mahakam melalui pemodelan model regresi Weibull (regresi *survival*, regresi distribusi kumulatif, regresi *hazard* dan regresi *mean* Weibull) pada data DO air Sungai Mahakam 2021.

4. Mendapatkan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap potensi pencemaran air Sungai Mahakam.
5. Memperoleh interpretasi model regresi Weibull pada data DO air Sungai Mahakam 2021.

Penelitian ini penting dilakukan karena mempunyai keutamaan sebagai berikut:

1. Program komputasi Octave dapat menjadi referensi untuk mendapatkan model regresi Weibull.
2. Sebagai kontribusi upaya pencegahan pencemaran air Sungai Mahakam.
3. Sebagai bahan referensi pengambilan kebijakan dalam pencegahan pencemaran air Sungai Mahakam.
4. Sebagai pengembangan statistika, khususnya penaksiran parameter model regresi Weibull

B. Proses Pemecahan

Penelitian ini dilaksanakan dari bulan Agustus sampai Desember 2022. Tempat pengolahan data di Laboratorium Statistika Terapan, Laboratorium Statistika Komputasi, dan Laboratorium Ekonomi dan Bisnis Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Mulawarman. Pengambilan data dilakukan di Dinas Lingkungan Hidup (DLH) Provinsi Kalimantan Timur.

Populasi adalah keseluruhan objek pengamatan yang menjadi perhatian. Populasi penelitian ini adalah daerah aliran Sungai Mahakam. Sampel adalah sebagian dari populasi yang karakteristiknya akan diselidiki dan dianggap dapat mewakili keseluruhan populasi. Sampel penelitian ini adalah 27 titik lokasi pengamatan yang bermuara ke Sungai Mahakam yang telah ditetapkan oleh DLH Provinsi Kalimantan Timur tahun 2016. Nama dan koordinat lokasi pengamatan disajikan pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Nama dan Koordinat Lokasi Pengamatan

Lokasi	Nama Lokasi Pengamatan	Lintang	Bujur
1	Nyan	0,0726	115,6443
2	Mahakam Boh	0,8864	114,9951
3	Long Bagun	0,5489	115,2052
4	Tering	0,0726	115,6443
5	Bloro	-0,3216	116,9237
6	Pulau Kumala	-0,4124	116,8289

Tabel 3.1 (Lanjutan)

Lokasi	Nama Lokasi Pengamatan	Lintang	Bujur
7	Kalamur	-0,5667	117,0833
8	Kantor Gubernur	-0,5036	117,1397
9	Palaran	-0,5579	117,1866
10	Anggana	-0,5828	117,2696
11	Karang Mumus Hulu	-0,3916	117,2269
12	Karang Mumus Hilir	-0,4760	117,1509
13	Bontang Hulu	0,1353	117,4246
14	Bontang Hilir	0,1319	117,4478
15	Santan Hulu	0,0309	117,4525
16	Santan Hilir	0,0427	117,4867
17	Belayan Hulu	0,1731	116,5056
18	Belayan Hilir	0,2165	116,5953
19	Kedang Kepala Hilir	0,1259	116,6396
20	Kedang Kepala Hulu	0,1412	116,6817
21	Segah Hulu	2,1447	117,3739
22	Segah (Berau Coal)	2,1612	117,465
23	Segah (Jembatan G. Tabur)	2,1721	117,465

24	Segah Hilir	2,1582	117,494
25	Kelay Hulu	2,1448	117,5105
26	Kelay Hilir	2,1627	117,4986
27	Boh	0,8894	114,995

Sumber : DLH Provinsi Kalimantan Timur 2021

Teknik sampling penelitian ini adalah *purposive sampling* yaitu teknik penentuan sampel dengan pertimbangan tertentu. Adapun yang menjadi pertimbangan pemilihan sampel pada penelitian ini adalah:

1. Banyaknya industri di sepanjang sungai Mahakam yang membuang air limbah ke badan sungai.
2. Pembuangan limbah domestik dari pemukiman penduduk di sepanjang sungai Mahakam.
3. Peningkatan beban pencemaran pada sungai akibat sumber pencemar alami seperti erosi lahan terbuka, residu pestisida dan pupuk pertanian, transportasi serta depot Bahan Bakar Minyak (BBM) yang ada di sepanjang sungai tersebut.
4. Banyaknya kegiatan pembukaan lahan sehingga berpotensi peningkatan sedimentasi serta penurunan nilai kesadahan air sungai sehingga menjadi asam (pH asam) karena banyaknya aktivitas tambang batubara di bagian hulu.

Teknik pengumpulan data penelitian ini adalah pengumpulan data sekunder, di mana data penelitian ini diperoleh dari Dinas Lingkungan Hidup (DLH) Provinsi Kalimantan Timur.

Teknik analisis data adalah pemodelan Regresi Weibull (RW), perhitungan (komputasi) pada setiap tahapan analisis data menggunakan *software Octave*. Langkah-langkah analisis data pada pemodelan RW adalah sebagai berikut:

1. Deskripsi data berdasarkan statistik deskriptif data yang meliputi rata-rata, nilai maksimum, nilai minimum, dan simpangan baku.
2. Penaksiran parameter distribusi Weibull.
3. Pengujian distribusi data peubah respon, yakni pengujian apakah data sampel DO berdistribusi Weibull menggunakan uji Kolmogorov-Smirnov.
4. Pendeteksian multikolinearitas antar kovariat dengan kriteria VIF.
5. Pemodelan RW menggunakan *software* Octave dengan langkah-langkah sebagai berikut:
 - a. Penaksiran parameter model RW dengan 7 kovariat.
 - b. Menghitung nilai AIC model RW.
 - c. Menguji signifikansi parameter model RW, yaitu uji serentak dengan statistik uji G dan uji parsial dengan uji *Wald*.
 - d. Pemilihan model RW terbaik
 - e. Mengitung nilai rasio regresi *survival*, *hazard*, dan regresi *mean* Weibull.
 - f. Interpretasi model RW

C. Hasil Pemodelan Regresi Weibull Pada Potensi Pencemaran Sungai Mahakam

Data penelitian adalah data sekunder dari Dinas Lingkungan Hidup Provinsi Kalimantan Timur tahun 2021 dan data disajikan pada Lampiran 1. Data penelitian terdiri dari data variabel terikat (respon), variabel bebas (kovariat). Data variabel terikat (Y) adalah DO air sungai di lingkungan hutan tropis (Mahakam dan anak Mahakam) golongan air kelas 1. Data kovariat terdiri dari data TSS (X_1), TDS (X_2), debit air (X_3), suhu air (X_4), Kosentrasi Nitrat (X_5), konsentrasi Amonia (X_6), konsentrasi Phospat (X_7), dan konsentrasi zat Besi/Ferro (X_8).

1. Deskripsi Data

Deskripsi data dinyatakan dalam statistik deskriptif yang meliputi rata-rata, nilai maksimum, nilai minimum dan simpangan baku. Nilai statistika deskriptif dihitung menggunakan *software* Octave dan hasil perhitungan statistik deskriptif data penelitian disajikan pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1 Statistik Deskriptif Data Penelitian

Variabel	Rata-rata	Maksimum	Minimum	Simpangan Baku
DO (Y)	4,5285	6,0000	3,5100	0,82267
TSS (X_1)	174,8333	1572,000	18,3400	296,5308
TDS (X_2)	74,5919	350,0000	18,3400	92,9172
Debit air (X_3)	1572,6226	11633,0000	1,5000	2662,8855
Suhu (X_4)	27,3999	31,0000	24,8000	1,7043
Konsentrasi Nitrat (X_5)	0,4637	3,4700	0,0140	0,67819
Konsentrasi Amonia (X_6)	0,05778	0,5900	0,0100	0,1185

Tabel 4.1 (Lanjutan)

Variabel	Rata-rata	Maksimum	Minimum	Simpangan Baku
Konsentrasi Fosfat (X_7)	0,0306	0,0670	0,0250	0,0115
Konsentrasi Besi/Ferro (X_8)	0,5789	1,2700	0,0700	0,4223

Sumber: Output komputasi Octave

Berdasarkan statistik deskriptif pada Tabel 4.1, rata-rata DO adalah 4,5285 *mg/l* atau *ppm* yang berarti bahwa secara rata-rata air Sungai Mahakam diindikasikan tercemar karena DO berada di bawah ambang batas angka baku yaitu 6 *mg/l*. Nilai simpangan baku DO adalah 1,0779. DO tertinggi adalah 6 *ppm*, yaitu pada pengamatan di Mahakam Boh, dan di Long Bagun, sedangkan

DO terendah pada pengamatan di Kalamur dan Kantor Gubernur Kaltim, yaitu sebesar 3,51 mg/l.

2. Penaksiran Parameter Distribusi Weibull

Metode Penaksir parameter distribusi Weibull data DO menggunakan MLE dan hampiran penaksir ML ditemukan menggunakan metode iteratif Newton-Raphson. Hasil perhitungan menggunakan *software Octave* disajikan pada Tabel 4.2

Tabel 4.2 Parameter Distribusi Weibull

Parameter	Taksiran
Skala (λ)	$4,1145 \times 10^{-5}$
Bentuk (γ)	6,28298

Sumber: *Output* komputasi Octave

Berdasarkan hasil penaksiran parameter distribusi Weibull pada Tabel 4.2 diperoleh taksiran *fungsi survival* adalah

$$\hat{S}(y) = \exp \left[- \left(\frac{y}{4,1145x 10^{-5}} \right)^{6,28298} \right], \quad (4.1)$$

dan taksiran fungsi distribusi kumulatif atau fungsi distribusi kumulatif teoritis adalah

$$\hat{F}(y) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{y}{4,1145x 10^{-5}} \right)^{6,28298} \right]. \quad (4.2)$$

3. Pengujian Distribusi Data Respon

Berdasarkan hasil penaksiran parameter, bahwa data DO diduga mengikuti pola sebaran (distribusi probabilitas) Weibull versi skala-bentuk dengan fungsi distribusi kumulatif $\hat{F}(y)$ yang diberikan oleh persamaan (4.1). Kebenaran dugaan ini dibuktikan melalui pengujian distribusi, dalam hal ini menggunakan

uji nonparametrik Kolmogorov-Smirnov (K-S). Hipotesis pengujian distribusi adalah

$$H_0 : F(y) = \hat{F}(y)$$

(Data DO berdistribusi Weibull dengan fungsi distribusi diberikan oleh (4.2)

$$H_1 : F(y) \neq F^*(y)$$

(Data DO tidak berdistribusi Weibull)

Statistik uji diberikan oleh persamaan (2.56) dan hasil perhitungan dapat dilihat pada Tabel 4.3.

Tabel 4.3 Pengujian Distribusi Weibull Data DO

Statistik Uji (D)	$D_{(27;0,05)}$	Keputusan
0,1950	0,254	Gagal menolak H_0

Sumber: *Output* komputasi Octave

Berdasarkan hasil perhitungan statistik uji yang disajikan pada Tabel 4.3 diputuskan gagal menolak H_0 pada taraf signifikansi 0,05, hal ini ditunjukkan oleh nilai statistik uji $D = 0,1950 < D_{(27;0,05)} = 0,254$. Kesimpulan dari uji hipotesis ini adalah data DO berdistribusi Weibull, dengan fungsi *survival* dan fungsi distribusi berturut-turut diberikan oleh persamaan (4.1) dan (4.2).

4. Pendeteksian Multikolinieritas Antar Kovariat

Pendeteksian multikolinieritas bertujuan untuk mengetahui apakah terdapat kovariat merupakan kombinasi linier dari kovariat yang lainnya. Pendeteksian multikolinieritas pada penelitian ini menggunakan nilai *Varian Inflation Factor* (VIF). Nilai VIF dihitung berdasarkan persamaan (2.66), dan nilai $VIF > 10$ mengindikasikan terdapat multikolinieritas antar kovariat. Hasil perhitungan nilai VIF setiap kovariat dapat dilihat pada Tabel 4.4

Tabel 4.4 Nilai VIF Setiap Kovariat

Kovariat	VIF	Keterangan
TSS (X_1)	10,2975	Terdapat multikolinieritas
TDS (X_2)	2,9434	Tidak terdapat multikolinieritas

Debit air (X_3)	4,8062	Tidak terdapat multikolinieritas
Suhu (X_4)	2,5049	Tidak terdapat multikolinieritas
Konsentrasi Nitrat (X_5)	5,5316	Tidak terdapat multikolinieritas
Konsentrasi Amonia (X_6)	2,9464	Tidak terdapat multikolinieritas
Konsentrasi Phospat (X_7)	3,3041	Tidak terdapat multikolinieritas
Konsentrasi Besi/Ferro (X_8)	2,5994	Tidak terdapat multikolinieritas

Sumber: *Output* komputasi Octave

Berdasarkan nilai VIF pada Tabel 4.4 dapat disimpulkan bahwa terdapat multikolinieritas pada kovariat TSS (X_1), sedangkan kovariat TDS, Debit, suhu, konsentrasi Nitrat, Amonia, Phospat, dan Besi (Ferro) tidak terdapat multikolinieritas. Hal ini ditunjukkan oleh nilai VIF > 10 untuk kovariat TSS dan VIF < 10 untuk kovariat lainnya. Berdasarkan hasil pendeteksian multikolinieritas, maka pemodelan regresi Weibull pada penelitian melibatkan tujuh (7) kovariat, yaitu TDS, debit air, suhu, konsentrasi Nitrat, Amonia, Phospat, dan konsentrasi zat Besi.

5. Pemodelan Regresi Weibull

Sub bab ini membahas model Regresi Weibull (RW) yang meliputi penaksiran parameter, pengujian parameter secara serentak dan pengujian parameter secara parsial.

a. Penaksiran Parameter Model Regresi Weibull

Model-model RW yang dibahas pada penelitian ini adalah model regresi *survival* Weibull, model regresi hazard Weibull dan regresi mean Weibull. Model umum regresi survival Weibull dengan tujuh kovariat berdasarkan persamaan (2.29) adalah

$$S(y | \mathbf{x}) = \exp\left(-y^\gamma \exp\left[-\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}\right]\right), \quad (4.3)$$

model umum regresi hazard Weibull adalah

$$h(y | \mathbf{x}) = \gamma y^{\gamma-1} \exp\left[-\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}\right], \quad (4.4)$$

dan model umum regresi *mean* Weibull adalah

$$\mu_y(\mathbf{x}) = \Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \exp\left[\frac{1}{\gamma} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}\right], \quad (4.5)$$

dengan

$$\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x} = \beta_0 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \beta_5 X_5 + \beta_6 X_6 + \beta_7 X_7 + \beta_8 X_8. \quad (4.6)$$

Tabel 4.5 Penaksir Parameter Model RW dengan Tujuh Kovariat

Parameter	Taksiran
\square	10,3149
β_0	30,1729

Tabel 4.5 (Lanjutan)

Parameter	Taksiran
β_2	-0,0084
β_3	-0,0002
β_4	-0,3876
β_5	0,8839
β_6	2,7351
β_7	-60,5070
β_8	-1,7573

Sumber: *Output* komputasi Octave

Penaksiran parameter model RW menggunakan metode MLE. Penaksir eksak (*closed form*) tidak dapat ditemukan secara analitik, dan hampiran penaksir ML ditemukan menggunakan metode Iteratif Newton-Raphson. Hasil penaksiran parameter dituangkan pada Tabel 4.5. Berdasarkan hasil penaksiran

parameter pada Tabel 4.5, didapat model-model RW, yaitu model regresi *survival* Weibull merujuk persamaan (4.3), model regresi *hazard* Weibull merujuk persamaan (4.4), dan model regresi *mean* Weibull merujuk persamaan (4.4), berturut-turut adalah

$$\hat{S}(y | \mathbf{x}) = \exp\left(-y^{10,3149} \exp\left[-\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{x}\right]\right);$$

$$\hat{h}(y | \mathbf{x}) = 10,3149y^{9,3149} \exp\left[-\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{x}\right];$$

dan

$$\hat{\mu}_y(\mathbf{x}) = 0.9526 \exp\left[\frac{1}{\hat{\gamma}} \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{x}\right], \quad (4.7)$$

dengan

$$-\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x} = -30,1729 + 0,0084X_2 + 0,0002X_3 + 0,3876X_4 - 0,8839X_5 - 2,7351X_6 + 60,5070X_7 + 1,7573X_8,$$

serta

$$\frac{1}{\hat{\gamma}} \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{x} = 2,9252 - 0,0008X_2 - 0,00002X_3 - 0,0376X_4 + 0,0857X_5 + 0,2652X_6 - 5,8660X_7 - 0,1704X_8.$$

b. Pengujian Parameter Regresi Model Regresi Weibull Secara Serentak

Pengujian parameter regresi secara serentak bertujuan untuk mengetahui apakah kovariat-kovariat secara serentak berpengaruh terhadap model RW. Pengujian hipotesis ini juga berguna untuk mengetahui kelayakan model RW. Hipotesis pengujian parameter regresi secara serentak adalah

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = \beta_7 = \beta_8 = 0$$

(Model-model RW yang diberikan oleh persamaan (4.7) tidak layak atau tidak *fit*)

$$H_1 : \text{Paling sedikit ada satu } \beta_k \neq 0; k = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

(Model RW diberikan oleh persamaan (4.5) layak).

Hasil perhitungan statistik uji menggunakan *software* Octave dan keputusan uji dapat dilihat pada Tabel 4.6.

Tabel 4.6 Nilai Statistik Uji dan Keputusan Uji pada Pengujian secara Serentak

Statistik Uji G	$\chi^2_{(0,05;7)}$	p_value	Keputusan Uji
25,4502	14,0671	0,0006	H_0 ditolak

Sumber: *Output* komputasi Octave

Berdasarkan nilai statistik uji G pada Tabel 4.6, keputusan uji adalah menolak H_0 pada taraf signifikansi 0,05, hal ini didukung oleh nilai statistik uji $G = 25,4502 > \chi^2_{0,10(5)} = 14,0671$ dan $p_value = 0,0006 < \alpha = 0,05$. Kesimpulan uji hipotesis ini adalah model RW layak dan kovariat-kovariat TDS, debit air, suhu, konsentrasi nitrat, amonia, fospat, dan konsentrasi zat besi secara serentak berpengaruh terhadap model RW yang diberikan oleh persamaan (4.7).

c. Pengujian Parameter Regresi Model RW Secara Parsial

Pengujian parameter secara parsial bertujuan untuk mengetahui pengaruh setiap kovariat terhadap model RW. Hipotesis pengujian parameter secara parsial untuk parameter β_k terkentu dengan $k = 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ adalah

$$H_0 : \beta_k = 0$$

$$H_1 : \beta_k \neq 0 .$$

Hasil perhitungan statistik uji dan keputusan uji setiap kovariat pada taraf uji 5% disajikan pada Tabel 4.7.

Tabel 4.7 Nilai Statistik Uji pada Pengujian Parameter Regresi Model RW

Kovariat	β	Penaksir	SE	$ W_0 $	p_value	Keputusan
Intersep	β_0	30,1729	6,6012	4,5708	5×10^{-6}	H_0 ditolak
TDS (X_2)	β_2	-0,0084	0,0038	2,2101	0,0271	H_0 ditolak

Debit Air (X_3)	β_3	-0,0002	0,00019	1,0774	0,2813	H_0 gagal ditolak
Suhu air (X_4)	β_4	-0,3876	0,1962	1,9761	0,0481	H_0 ditolak
Knsentrasi Nitrat (X_5)	β_5	0,8839	0,5374	1,6448	0,1000	H_0 gagal ditolak

Tabel 4.7 (Lanjutan)

Kovariat	β	Penaksir	SE	$ W_0 $	p -value	Keputusan
Konsentrasi Amonia (X_6)	β_6	2,7351	3,4304	0,7973	0,4253	H_0 gagal ditolak
Konsentrasi Phospat (X_7)	β_7	-60,5070	38,0959	1.5883	0,1122	H_0 gagal ditolak
Konsentrasi Zat Besi (X_8)	β_8	-1,7573	0,8481	2,0718	0,0383	H_0 ditolak

Sumber: Output komputasi Octave

Berdasarkan nilai statistik uji yang ditampilkan pada Tabel 4.7 bahwa keputusan uji hipotesis parameter RW secara parsial menolak H_0 berturut-turut pada intersep dan kovariat TDS, suhu air dan konsentrasi zat besi. Kesimpulan dari keputusan uji menolak H_0 adalah parameter-parameter β_0 , β_2 , β_4 dan β_8 masing-masing berbeda dengan nol pada taraf signifikansi 5%, sehingga intersep, kovariat TDS, Suhu air dan konsentrasi zat besi masing-masing secara individual berpengaruh terhadap RW. Kebaikan model RW pada penelitian ini menggunakan ukuran AIC, dan model RW yang diberikan oleh persamaan (4.7) memberikan nilai AIC sebesar 58,5722.

6. Pemilihan Model Regresi Weibull Terbaik

Pemodelan RW yang melibatkan tujuh kovariat yang diberikan oleh persamaan (4.7) merupakan model RW yang belum optimum atau bukan pemodelan RW terbaik pada data DO, oleh karena itu bahasan berikutnya adalah penentuan model RW terbaik. Model RW terbaik dipilih dari semua model RW yang melibatkan semua kombinasi dari tujuh kovariat yang tidak terdapat

permasalahan multikolinieritas seperti ditampilkan pada Tabel 4.4. Kriteria pemilihan model RW terbaik adalah model yang memberikan nilai AIC minimum dan semua kovariat berpengaruh terhadap model RW. Pemodelan semua kombinasi dari tujuh kovariat pada Tabel 4.4 menghasilkan 113 model RW, dan model terbaik adalah model RW dengan tiga kovariat, yaitu TDS (X_2), suhi (X_4) dan konsentrasi zat besi (X_8) yang memberikan nilai minimum AIC sebesar 54,4143. Nilai AIC pemodelan RW dari semua kombinasi tujuh kovariat dapat dilihat pada Lampiran 8.

Model umum RW tebaik dengan tiga kovariat, yakni model regresi *survival*, *regresi* distribusi kumulatif, regresi *hazard* dan *mean* Weibull individu ke- i berturut-turut adalah

$$S(y_i | \mathbf{x}_i) = \exp\left[-y_i^\gamma \exp\left[-(\beta_0 + \beta_2 X_{2i} + \beta_4 X_{4i} + \beta_8 X_{8i})\right]\right];$$

$$F(y_i | \mathbf{x}_i) = 1 - S(y_i | \mathbf{x}_i) = 1 - \exp\left[-y_i^\gamma \exp\left[-(\beta_0 + \beta_2 X_{2i} + \beta_4 X_{4i} + \beta_8 X_{8i})\right]\right];$$

$$h(y_i | \mathbf{x}_i) = \gamma y_i^{\gamma-1} \exp\left[-(\beta_0 + \beta_2 X_{2i} + \beta_4 X_{4i} + \beta_8 X_{8i})\right];$$

dan

$$\mu_y(\mathbf{x}_i) = \Gamma\left[\frac{1}{\gamma} + 1\right] \exp\left[\frac{1}{\gamma} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i\right] = \Gamma\left[\frac{1}{\gamma} + 1\right] \exp\left[\frac{1}{\gamma} (\beta_0 + \beta_2 X_{2i} + \beta_4 X_{4i} + \beta_8 X_{8i})\right]. \quad (4.8)$$

Hampiran penaksir ML parameter model RW terbaik yang ditemukan menggunakan metode iteratif Newton-Raphson, dan hasil perhitungan menggunakan *software Octave* ditampilkan pada Tabel 4.8.

Berdasarkan persamaan (4.8) dan Tabel 4.8, berturut-turut diperoleh model-model RW terbaik, model regresi *survival* Weibull diberikan oleh persamaan

$$S(y_i | \mathbf{x}_i) = \exp\left[-y_i^{9,7865} \exp\left[-28,0800 + 0,0072 X_{2i} + 0,3940 X_{4i} + 2,0972 X_{8i}\right]\right] \quad (4.9)$$

model regresi distribusi kumulatif Weibull diberikan oleh

$$F(y_i | \mathbf{x}_i) = 1 - \exp\left[-y_i^{9,7865} \exp\left[-28,0800 + 0,0072 X_{2i} + 0,3940 X_{4i} + 2,0972 X_{8i}\right]\right] \quad (4.10)$$

Tabel 4.8 Penaksir ML Parameter Model RW Terbaik

Parameter	Penaksir ML
\square	9,7865
β_0	28,0800
β_2	-0,0072
β_4	-0,3940
β_8	-2,0972

Sumber: Output komputasi Octave

Model *hazard* Weibull adalah

$$h(y_i | \mathbf{x}_i) = 9,7865 y_i^{8,7865} \exp[-28,0800 + 0,0072X_{2i} + 0,3940X_{4i} + 2,0972X_{8i}] \quad (4.11)$$

dan regresi *mean* Weibull diberikan oleh persamaan

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_Y(\mathbf{x}_i) &= \Gamma \left[\frac{1}{\hat{\gamma}} + 1 \right] \exp \left[\frac{1}{\hat{\gamma}} \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{x}_i \right] \\ &= 0,9505 \exp[2,8693 - 0,0007X_{2i} - 0,0403X_{4i} - 0,2143X_{8i}], \end{aligned} \quad (4.12)$$

dengan X_{2i} , X_{4i} , dan X_{8i} berturut-turut menyatakan TDS, suhu air dan konsentrasi zat besi dalam air sungai Mahakam pada pengamatan ke- i . Model RW data DO air sungai Mahakam tahun 2021 yang diberikan oleh persamaan (4.9), persamaan (4.10), persamaan (4.11), dan persamaan (4.12) adalah model yang layak (*fit*) dan kovariat-kovariat TDS, suhu air dan konsentrasi zat besi secara simultan berpengaruh terhadap model RW, setelah melalui pengujian parameter regresi secara serentak dan parsial, dan bahasannya dikemukakan pada bagian berikut ini.

7. Pengujian Parameter Regresi Model RW Terbaik Secara Serentak

Hipotesis pengujian parameter regrsi model RW adalah

$$H_0 : \beta_2 = \beta_4 = \beta_8 = 0$$

(Model-model RW tidak layak)

H_1 : Paling sedikit ada satu $\beta_k \neq 0$; $k = 2, 4, 8$

(Model RW layak).

Kesimpulan dari uji hipotesis ini adalah model-model RW yang diberikan oleh persamaan (4.9), persamaan (4.10), dan persamaan (4.11) adalah layak. Hal ini didukung oleh perhitungan statistik uji (2.61) dan statistik uji (2.62) menggunakan *software Octave* yang ditampilkan pada Tabel 4.9, yaitu nilai statistik uji $G = 22,0697 > \chi^2_{(0,05;3)} = 7,8147$ dan atau $p_value = 0,0001 < \alpha = 0,05$, sehingga keputusan uji adalah menolak H_0 pada taraf uji 5%.

Tabel 4.9 Nilai Statistik Uji dan Keputusan Uji pada Pengujian secara Serentak

Statistik Uji G	$\chi^2_{(0,05;3)}$	p_value	Keputusan Uji
22,0697	7,8147	0,0001	H_0 ditolak

Sumber: *Output* komputasi Octave

8. Pengujian Parameter Regresi Model RW Terbaik Secara Parsial

Pengujian parameter secara parsial bertujuan untuk mengetahui pengaruh setiap kovariat terhadap model RW. Hipotesis pengujian parameter secara parsial untuk parameter β_k dengan nilai k tertentu ($k = 0, 2, 4, 8, 9$) adalah

$$H_0 : \beta_k = 0$$

$$H_1 : \beta_k \neq 0$$

Statistik uji diberikan oleh persamaan (2.64) dan atau (2.65), serta hasil perhitungan statistik uji untuk setiap kovariat dengan *software Octave* disajikan pada Tabel 4.10.

Tabel 4.10 Hasil Pengujian Parameter Model RW Secara Parsial

Kovariat	Parameter	Penaksir	SE	W	p_value	Keputusan
Intercept	β_0	28,0800	5,7215	4,9078	0,0000	H ₀ ditolak
TDS (X_2)	β_2	-0,0072	0,0029	2,4913	0,0127	H ₀ ditolak
Suhu Air (X_4)	β_4	-0,3940	0,1518	2,5948	0,0095	H ₀ ditolak
Zat Besi (X_8)	β_8	-2,0972	0,7153	2,9321	0,0034	H ₀ ditolak

Sumber: *Output* komputasi Octave

Keputusan pengujian hipotesis pada setiap parameter regresi berdasarkan statistik uji Wald pada Tabel 4.10 adalah menolak Ho pada taraf signifikansi 5%, dan disimpulkan bahwa kovariat-kovariat TDS (X_2), suhu (X_4) dan konsentrasi zat besi (X_8) masing-masing secara individual berpengaruh terhadap model RW. Hal ini di tunjukkan nilai statistik uji |W| ketiga kovariat masing-masing lebih dari 1,96 dan atau *p-value* ketiga kovariat tersebut kurang dari 0,05. Berdasarkan hasil pengujian parameter regresi secara serentak dan parsial maka model regresi yang diberikan oleh persamaan (4.9), (4.10) dan (4.11) layak dan dapat digunakan untuk prediksi dan interpretasi.

Model regresi *survival* yang diberikan oleh persamaan (4.9) diartikan sebagai pemodelan peluang air Sungai Mahakam pada lokasi pengamatan ke- i tidak tercemar. Model regresi distribusi kumulatif Weibull yang diberikan oleh persamaan (4.10) menyatakan pemodelan peluang air sungai Mahakam pada lokasi pengamatan ke- i tercemar. Model regresi *hazard* Weibull yang diberikan oleh persamaan (4.11) adalah pemodelan laju atau *rate* air sungai Mahakam di lokasi pengamatan ke- i tercemar, dan model regresi *mean* Weibull yang diberikan oleh persamaan (4.12) menyatakan pemodelan rata-rata (*mean*) DO air sungai Mahakam di pengamatan ke- i . Berdasarkan model-model RW yang diberikan oleh persamaan (4.9) sampai persamaan (4.11) diperoleh

informasi yang berhubungan dengan potensi air sungai Mahakam tercemar sebagai berikut.

Rata-rata peluang air sungai Mahakam tidak tercemar di semua lokasi berdasarkan persamaan (4.9) sebesar 0,5053 dan rata-rata peluang air sungai Mahakam tercemar berdasarkan persamaan (2.10) sebesar 0,4947. Laju rata-rata air sungai Mahakam tercemar sebesar 1,8471 lokasi setiap *ppm* DO atau setelah pembulatan setara dengan sekitar 2 lokasi tercemar setiap *ppm* DO, dan rata-rata DO air sungai Mahakam sebesar 4,6894 *ppm*. Berdasarkan kadungan DO, secara umum air sungai Mahakam di semua lokasi pengamatan terindikasi tercemar karena kadungan $DO < 6$ *ppm*. Informasi potensi air sungai Mahakam tercemar pada lokasi tertentu berdasarkan pemodelan RW sebagai berikut.

Peluang air sungai Mahakam di lokasi Kalamur (pengamatan ke-7 sebagai contoh) tidak tercemar berdasarkan persamaan (4.9) sebesar 0,8362. Laju air sungai Mahakam di lokasi pengamatan Kalamur tercemar berdasar persamaan (4.10) sebesar 0,4989 lokasi setiap *ppm* atau setara dengan sebanyak 5 lokasi pengamatan air sungai Mahakam tercemar setiap 10 *ppm* DO. Prediksi DO air sungai Mahakam di lokasi pengamatan Kalamur berdasarkan persamaan (4.11) sebesar 3,9775 *ppm* dengan MAPE 11,2925%.

9. Interpretasi Model Regresi Weibull pada Data DO Air Sungai Mahakam

Interpretasi model RW bertujuan untuk memberi makna dan mengetahui perilaku model RW yang diperoleh perubahan (kenaikan atau penurunan) nilai kovariat. Interpretasi model RW didasarkan nilai rasio dan diterapkan pada kovariat yang berpengaruh. Rasio regresi *survival*, distribusi kumulatif, *hazard* dan regresi *mean* Weibull dihitung berdasarkan persamaan (2.69) dan (2.70), dan hasil perhitungan rasio berdasarkan setiap kovariat berpengaruh disajikan pada Tabel 4.11.

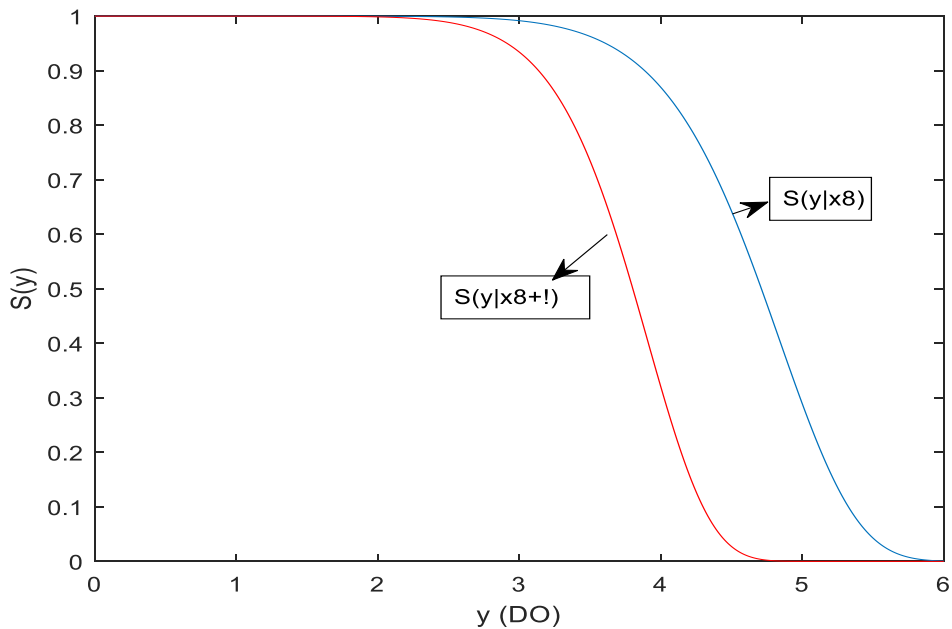
Tabel 4.11 Rasio Model RW Berdasar Kovariat Berpengaruh

Kovariat berpengaruh	Rasio model-model RW			
	$R_S(X_k)$	$R_f(X_k)$	$R_h(X_k)$	$R_\mu(X_k)$
TDS (X_2)	0,9933	1,0047	1,0072	0,9993
Suhu Air (X_4)	0,6812	1,2742	1,4828	0,9605
Konsentrasi Zat Besi/Ferro (X_8)	0,1520	2,8845	8,1437	0,8071

Sumber: *Output* komputasi Octave

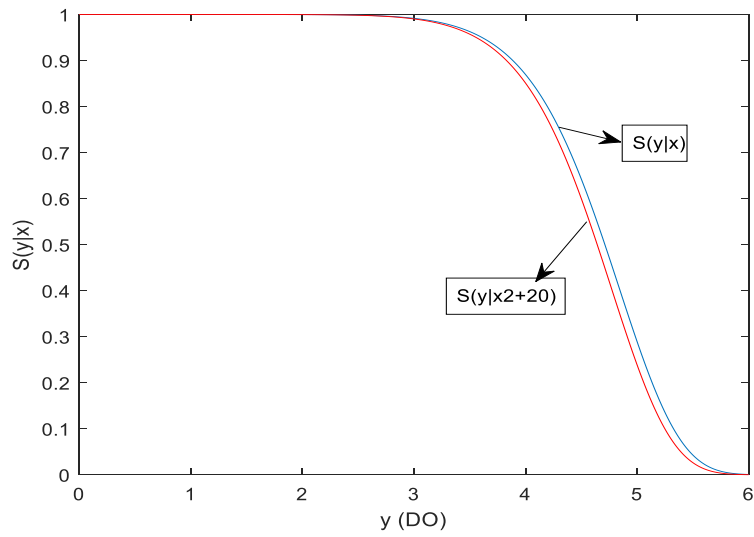
Berdasarkan nilai rasio pada Tabel 4.11, interpretasi model regresi *survival* berdasar kovariat berpengaruh adalah setiap kenaikan satu satuan kovariat TDS, suhu air dan konsentrasi zat besi akan menurunkan peluang air Sungai Mahakam tidak tercemar berturut-turut menjadi 0,9933 kali; 0,6812 kali dan 0,1520 kali atau berturut-turut turun 0,67%; 31,88% dan 84,80%. Grafik penurunan peluang air Sungai Mahakam tidak tercemar setelah kenaikan satu satuan konsentrasi zat besi dapat dilihat pada Gambar 4.1.

Grafik fungsi (regresi) *survival* pada Gambar 4.1 dapat diartikan sebagai grafik peluang air sungai Mahakam tidak tercemar. Grafik berwarna merah adalah peluang air sungai Mahakam tidak tercemar setelah konsentrasi zat besi meningkat satu satuan, dan grafik berwarna biru adalah peluang tidak tercemar sebelum peningkatan konsentrasi zat besi. Berdasarkan Gambar 4.1, grafik berwarna merah berada di bawah dari grafik berwarna biru, ini menunjukkan bahwa peluang air sungai Mahakam tidak tercemar menjadi turun ketika konsentrasi zat besi meningkat.

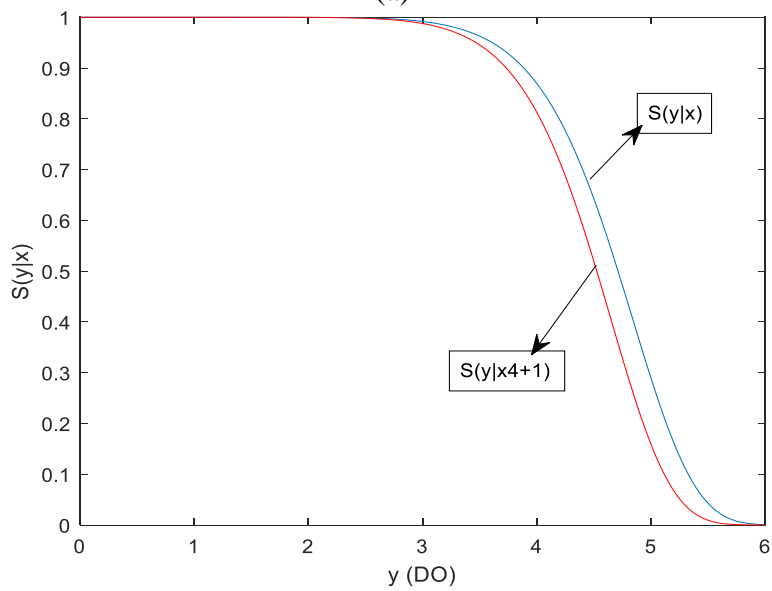


Gambar 4.1 Peluang Air Sungai Mahakam Tidak Tercemar Setelah Kenaikan Konsentrasi Besi (merah) dan Sebelum Kenaikan Zat Besi (Biru)

Grafik penurunan peluang air Sungai Mahakam tidak tercemar setelah kenaikan TDS dan suhu air dapat dilihat pada Gambar 4.2. Hasil interpretasi yang sama berdasarkan rasio regresi distribusi kumulatif, yaitu setiap kenaikan satu satuan kovariat TDS, suhu air dan zat besi akan meningkatkan peluang air Sungai Mahakam tercemar berturut-turut menjadi 1,0047 kali; 1,2742 kali dan 2,8845 kali atau berturut-turut meningkat 0,47%; 27,42% dan 188,45%.

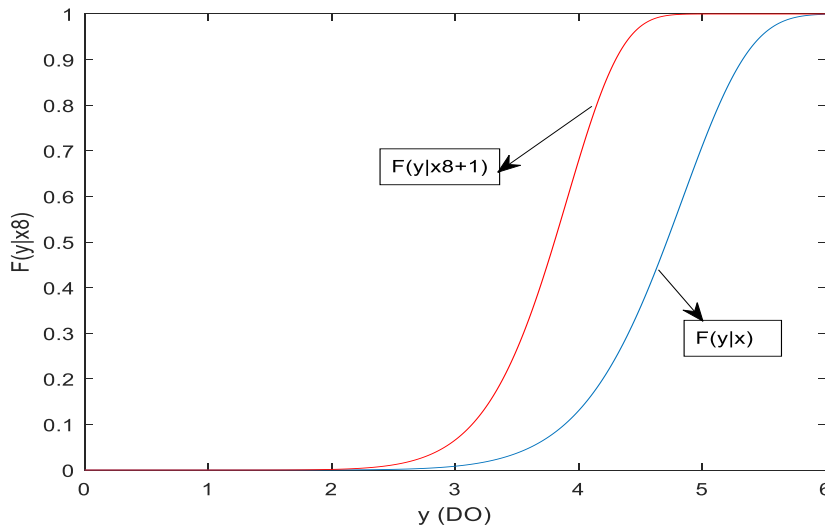


(a)



(b)

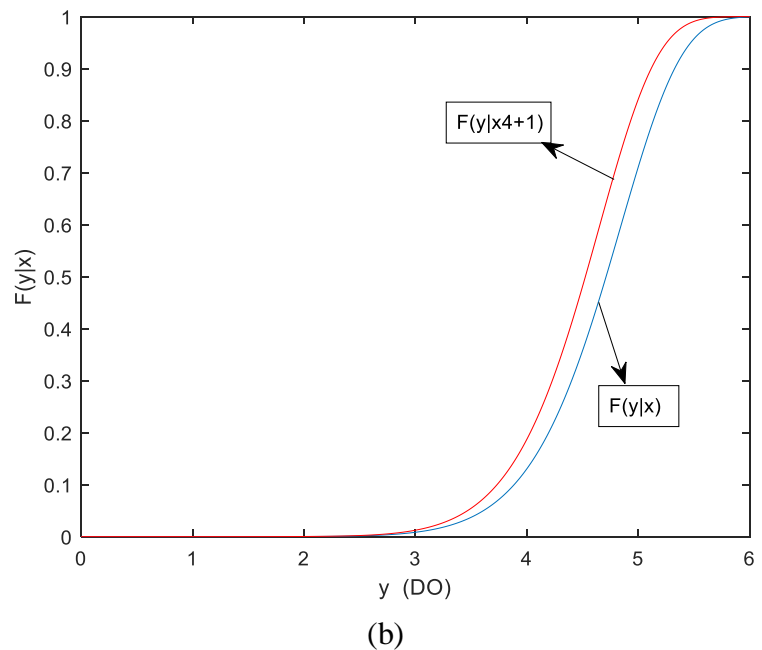
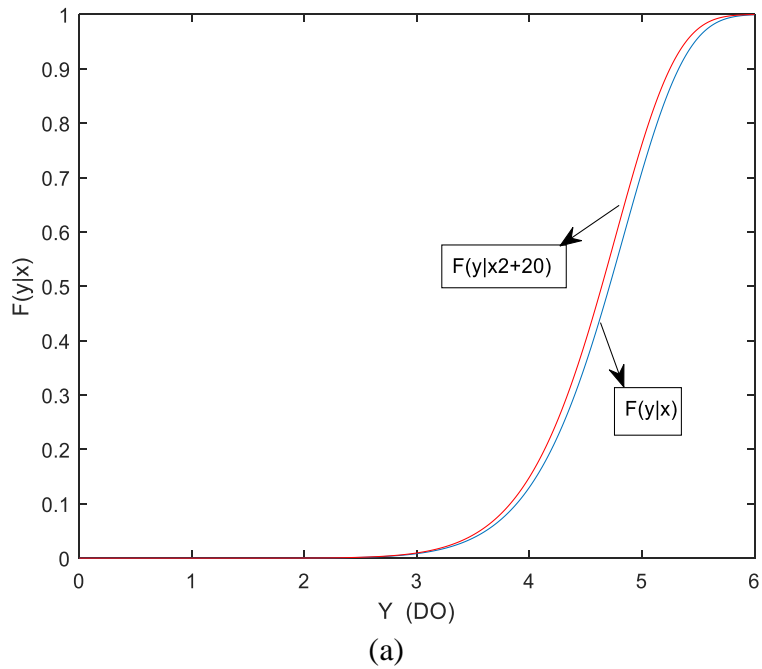
Gambar 4.2 (a) Peluang Air Sungai Mahakam Tidak Tercemar Setelah Kenaikan TDS (merah) dan Sebelum Kenaikan TDS (Biru). (b) Peluang Air Sungai Mahakam Tidak Tercemar Setelah Kenaikan Suhu Air (merah) dan Sebelum Kenaikan suhu (Biru).



Gambar 4.3 Peluang Air Sungai Mahakam Tercemar Setelah Kenaikan Konsentrasi Besi 1 *ppm* (merah) dan Sebelum Kenaikan (Biru)

Perubahan peluang air Sungai Mahakam tercemar setelah dan sebelum peningkatan konsentrasi zat besi satu satuan secara grafis dapat dilihat pada Gambar 4.3. Grafik berwarna merah pada Gambar 4.3 adalah grafik fungsi (regresi) distribusi kumulatif setelah konsentrasi zat besi meningkat satu *ppm*, dan grafik berwarna biru adalah grafik distribusi kumulatif sebelum peningkatan konsentrasi zat besi. Grafik berwarna merah berada di atas grafik berwarna biru, ini menunjukkan bahwa peluang air Sungai Mahakam tercemar menjadi meningkat ketika konsentrasi zat besi meningkat. Berdasarkan hasil interpretasi model regresi *survival* dan distribusi kumulatif dapat disimpulkan bahwa hasil interpretasi kedua model regresi ini memberikan makna yang sama (ekuivalen).

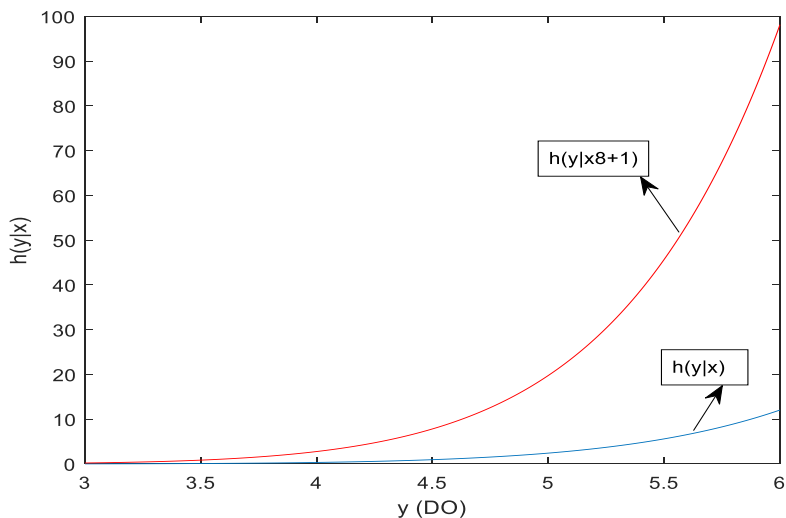
Grafik peningkatan peluang air Sungai Mahakam tercemar setelah kenaikan TDS dan suhu air dapat dilihat pada Gambar 4.4.



Gambar 4.4 (a) Peluang Air Sungai Mahakam Tercemar Setelah Kenaikan TDS (merah) dan Sebelum Kenaikan TDS (Biru). (b) Peluang Air Sungai Mahakam Tidak Tercemar Setelah Kenaikan Suhu Air (merah) dan Sebelum Kenaikan Suhu Air (biru)

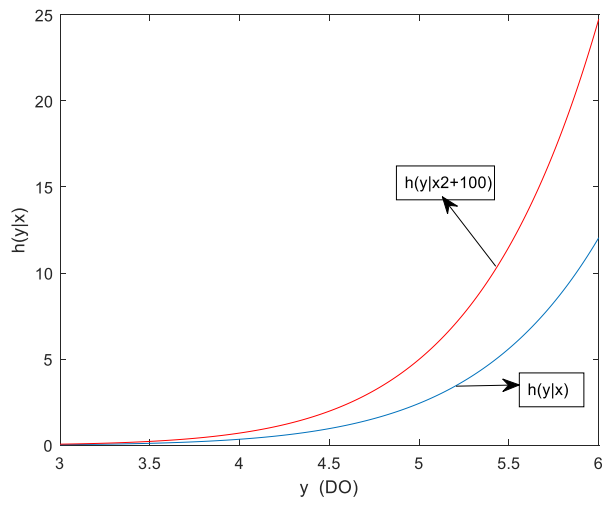
Hasil interpretasi model regresi *survival* dan distribusi kumulatif ekuivalen dengan hasil interpretasi regresi *hazard* Weibull. Setiap kenaikan satu

satuan kovariat TDS, suhu air dan zat besi akan meningkatkan laju pencemaran air Sungai Mahakam berturut-turut menjadi 1,0072 kali; 1,4828 kali dan 8,1437 kali atau berturut-turut meningkat 0,72%; 48,28%% dan 714,37%. Grafik laju pencemaran air Sungai Mahakam sebelum dan setelah kenaikan zat Besi sebesar 1 ppm dapat dilihat pada Gambar 4.5. Berdasarkan Gambar 4.5, grafik berwarna merah adalah grafik regresi *hazard* yang diinterpretasikan sebagai laju pencemaran air Sungai Mahakam setelah konsentrasi zat besi meningkat satu ppm, dan grafik berwarna biru adalah grafik regresi *hazard*, yakni grafik laju pencemaran air Sungai Mahakam sebelum peningkatan konsentrasi zat besi. Grafik regresi hazard setelah peningkatan konsentrasi zat besi berada di atas grafik laju sebelum peningkatan konsentrasi zat besi, ini menunjukkan bahwa laju pencemaran air Sungai Mahakam meningkat ketika konsentrasi zat besi meningkat.

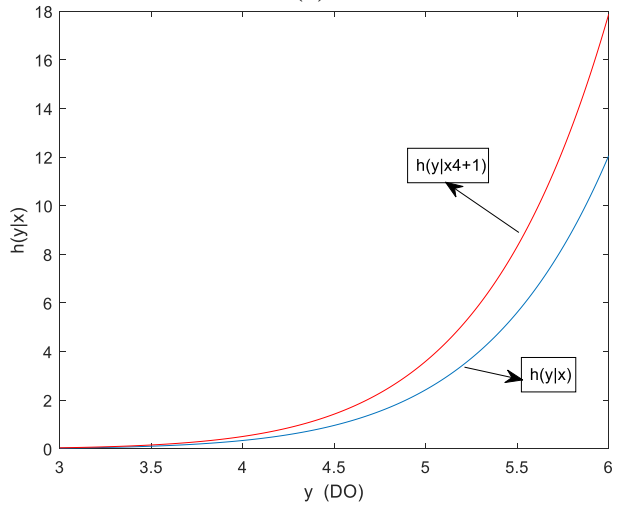


Gambar 4.5 Grafik Laju (*Rate*) Air Sungai Mahakam Tercemar Setelah Kenaikan Konsentrasi Besi 1 ppm (merah) dan Sebelum Kenaikan (biru)

Peningkatan laju pencemaran air Sungai Mahakam setelah kenaikan TDS dan suhu air secara grafis dapat dilihat pada Gambar 4.6.



(a)

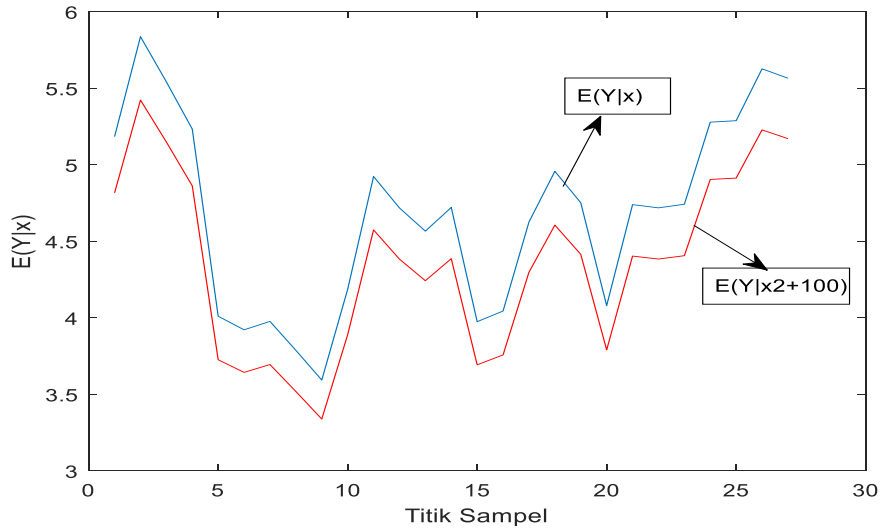


(b)

Gambar 4.6 (a) Laju Pencemaran Air Sungai Mahakam Setelah Kenaikan TDS (merah) dan Sebelum Kenaikan TDS (Biru); (b) Laju pencemaran Air Sungai Mahakam Setelah Kenaikan Suhu Air (merah) dan Sebelum Kenaikan Suhu Air (biru)

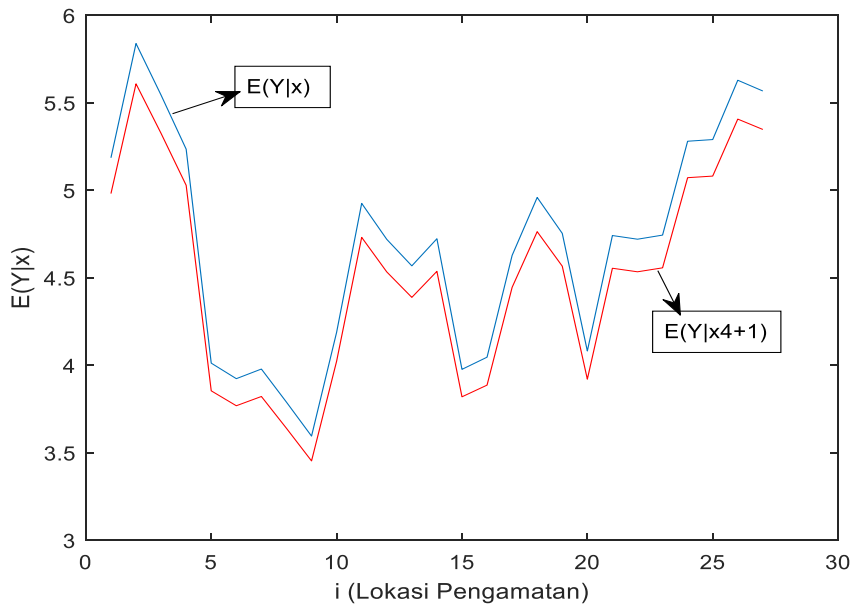
Interpretasi model regresi *mean* Weibull berdasar kovariat berpengaruh adalah setiap kenaikan satu satuan kovariat TDS, suhu air dan zat besi akan menurunkan DO air Sungai Mahakam berturut-turut menjadi 0,9993 kali; 0,9605 kali dan 0,8071 kali atau berturut-turut turun 0,07%; 3,95%% dan 19,29%. DO merupakan indikator air tercemar, yakni semakin kecil DO air

sungai Mahakam (semakin jauh di bawah ambang batas 6 ppm), maka potensi air Sungai Mahakam tercemar semakin tinggi. Penurunan DO air Sungai Mahakam karena kenaikan TDS sebesar 100 ppm secara grafis dapat dilihat pada Gambar 4.7.

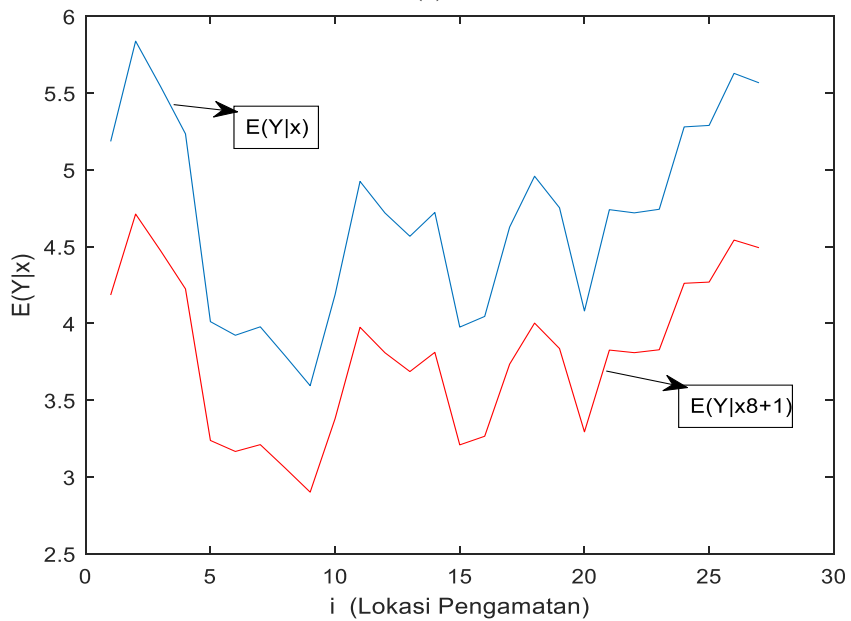


Gambar 4.7 Grafik DO Air Sungai Mahakam Setelah Kenaikan TDS 100 ppm (merah) dan Sebelum Kenaikan (biru)

Grafik berwarna merah pada Gambar 4.7 adalah grafik DO setelah peningkatan TDS 100 ppm, dan grafik berwarna biru adalah grafik DO sebelum peningkatan TDS. Grafik berwarna merah berada di bawah grafik berwarna biru, ini dapat diartikan bahwa setelah peningkatan TDS, maka DO air Sungai Mahakam akan menurun.



(a)



(b)

Gambar 4.8 (a) DO Air Sungai Mahakam Setelah Kenaikan Suhu (merah) dan Sebelum Kenaikan Suhu (Biru); (b) DO Air Sungai Mahakam Setelah Kenaikan Besi (merah) dan Sebelum Kenaikan Besi (Biru)

Penurunan DO air Sungai Mahakam setelah kenaikan suhu dan konsentrasi besi dapat dilihat pada Gambar 4.8. Grafik warna merah pada Gambar 4.8 (a) menunjukkan bahwa setelah kenaikan suhu 1°C , DO air Sungai

Mahakam mengalami penurunan, hal ini dapat dilihat grafik berwarna merah beada di bawah grafik warna biru (grafik DO sebelum kenaikan suhu air). DO air sungai Mahakam juga akan turun ketika konsentrasi zat besi meningkat. Hal ini dapat dilihat bahwa grafik warna merah di bawah dari grafik warna biru. DO air turun mengindikasikan bahwa potensi air tercemar meningkat. Rasio DO setiap lokasi pengamatan setelah dan sebelum kenaikan nilai kovariat tertentu (TDS, suhu dan konsentrasi zat besi) adalah konstan dan bernilai sama untuk setiap lokasi pengamatan. Hal ini dapat dilihat grafik DO setelah kenaikan kovariat TDS, suhu air, atau zat besi (warna merah) parallel dengan grafik DO sebelum kenaikan kovariat (grafik warna biru) pada Gambar 4.7 dan 4.8.

BAB V PENUTUP

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan, diperoleh kesimpulan penelitian sebagai berikut:

1. Pemodelan potensi pencemaran air Sungai Mahakam melalui model-model regresi Weibull pada data DO 2021 dapat dianalisis menggunakan program Octave.
2. Model regresi Weibull data DO air Sungai Mahakam merupakan model potensi pencemaran air Sungai Mahakam, yaitu:

Model regresi *survival* Weibull yang menyatakan model peluang air sungai Mahakam tidak tercemar diberikan oleh

$$S(y_i | \mathbf{x}_i) = \exp\left[-y_i^{9,7865} \exp\left[-28,0800 + 0,0072X_{2i} + 0,3940X_{4i} + 2,0972X_{8i}\right]\right]$$

Model regresi distribusi kumulatif Weibull yang menyatakan model peluang air Sungai Mahakam tercemar diberikan oleh

$$F(y_i | \mathbf{x}_i) = 1 - \exp\left[-y_i^{9,7865} \exp\left[-28,0800 + 0,0072X_{2i} + 0,3940X_{4i} + 2,0972X_{8i}\right]\right]$$

Model *hazard* Weibull yang menyatakan model laju air Sungai Mahakam tercemar diberikan oleh

$$h(y_i | \mathbf{x}_i) = 9,7865 y_i^{8,7865} \exp\left[-28,0800 + 0,0072X_{2i} + 0,3940X_{4i} + 2,0972X_{8i}\right]$$

Model regresi *mean* Weibull yang menyatakan model prediksi DO air Sungai Mahakam diberikan oleh

$$\hat{\mu}_y(\mathbf{x}_i) = \Gamma\left[\frac{1}{\hat{\gamma}} + 1\right] \exp\left[\frac{1}{\hat{\gamma}} \hat{\boldsymbol{\beta}}^T \mathbf{x}_i\right] \quad \text{dengan}$$

$$= 0,9505 \exp\left[2,8693 - 0,0007X_{2i} - 0,0403X_{4i} - 0,2143X_{8i}\right],$$

X_{2i} , X_{4i} , dan X_{8i} berturut-turut menyatakan TDS, suhu air dan konsentrasi zat besi dan y menyatakan DO air Sungai Mahakam.

3. Faktor-faktor yang mempengaruhi model regresi Weibull atau faktor-faktor yang mempengaruhi potensi pencemaran air Sungai Mahakam berdasarkan data pengamatan tahun 2022 adalah TDS, suhu air, dan konsentrasi zat besi.

4. Informasi tentang potensi pencemaran air Sungai Mahakam menggunakan pemodelan RW berdasarkan data pengamatan tahun 2021 sebagai berikut. Rata-rata peluang air Sungai Mahakam tidak tercemar sebesar 0,5053; rata-rata peluang air Sungai Mahakam tercemar sebesar 0,4947. Laju rata-rata pencemaran air Sungai Mahakam 1,8471 lokasi setiap *ppm* DO atau setara dengan sekitar 2 lokasi tercemar setiap *ppm* DO, dan rata-rata DO air Sungai Mahakam sebesar 4,6894 *ppm*. Berdasarkan kandungan DO hasil pengamatan tahun 2021, secara umum air Sungai Mahakam di semua lokasi pengamatan terindikasi kualitasnya kurang baik karena kandungan DO < 6 *ppm*.
5. Interpretasi berdasarkan model potensi pencemaran air Sungai Mahakam pada data DO tahun 2021 sebagai berikut:
 - a. Interpretasi model regresi *survival* berdasar kovariat berpengaruh adalah setiap kenaikan satu satuan kovariat TDS, suhu air dan konsentrasi zat besi akan menurunkan peluang air Sungai Mahakam tidak tercemar berturut-turut menjadi 0,9933 kali; 0,6812 kali; dan 0,1520 kali atau berturut-turut turun 0,67%; 31,88%; dan 84,80%;
 - b. Interpretasi model regresi distribusi kumulatif yaitu setiap kenaikan satu satuan kovariat TDS, suhu air dan zat besi akan meningkatkan peluang air Sungai Mahakam tercemar berturut-turut menjadi 1,0047 kali; 1,2742 kali; dan 2,8845 kali atau berturut-turut meningkat 0,47%; 27,42%; dan 188,45%.
 - c. Interpretasi model regresi *hazard* Weibull adalah setiap kenaikan satu satuan kovariat TDS, suhu air, dan zat besi akan meningkatkan laju pencemaran air Sungai Mahakam berturut-turut menjadi 1,0072 kali; 1,4828 kali dan 8,1437 kali atau berturut-turut meningkat 0,72%; 48,28%; dan 714,37%.
 - d. Interpretasi model regresi *mean* Weibull berdasar kovariat berpengaruh adalah setiap kenaikan satu satuan kovariat TDS, suhu air dan zat besi akan menurunkan DO air Sungai Mahakam berturut-turut menjadi

0,9993 kali; 0,9605 kali; dan 0,8071 kali atau berturut-turut turun 0,07%; 3,95%; dan 19,29%.

Bagi peneliti yang membahas topik yang sama, dapat menganalisis menggunakan model Cox PH atau model regresi spasial.

DAFTAR PUSTAKA

- Lestari, V.D., Suyitno & Siringoringo, M. (2021). Analysis of Factors That Influencing the Mahakam River Water Pollution by Using Geographically Weighted Logistic Regression on Dissolved Oxygen Data, *Jurnal Eksponensial*, **12**(1), 37-46.
- _____. (2021). Lampiran VI, Peraturan Pemerintah Republik Indonesia No. 22 Tahun 2021, Tentang Penyelenggaraan Perlindungan dan Pengelolaan Lingkungan Hidup.
- Collet, D. (2003). *Modelling Survival Data in Medical Research*. London: Chapman & Hall/CRC, 11-12, 175-14.
- Rinne, H. (2009). *The Weibull Distribution a Handbook*, Germany: Chapman @ Hall/CRC, 3-72, 168-172.
- Kleinbaum, D.G. & Klein, M. (2012). *Survival analysis: a self-learning text*, M. Gail, K. Krickeberg, J.M. Samet, A. Tsiatis, W. Wong, 3rd edition, New York, Springer, 4-15, 304-309.
- Fajriati, N.A., Suyitno, & Wasono. (2022). Hazard Rate Weibull Regression Model on Healing of Dengue Hemorrhagic Fever (DHF) in patients at Panglima Sebaya Hospital Tanah Grogot, *Jurnal Eksponensial*, **13**(1), 35-44.
- Lawless, J.F. (2003). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, David, J. Balding, Pete Bloomfield, et al, 2nd edition. New York: John Wiley and Sons, Inc, 8-19, 269-273. <http://dx.doi.org/10.1002/9781118033005>.
- Suyitno. (2017). Penaksiran Parameter dan Pengujian Hipotesis Model Regresi Weibull Univariat, *Jurnal Eksponensial*, **8**(2), 179-184.
- Khuri, A.I. (2003). *Advanced Calculus with Applications in Statistics*, 2nd edition. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, 327-333.
- Rahmah, S.M., Suyitno, & Meiliyani, S. (2021). Model Geographically Weighted Weibull Regression pada Indikator Pencemaran Air Biochemical Oxygen Demand di Daerah Aliran Sungai Mahakam, *Jurnal Eksponensial*, **12** (2), 171-180.
- Rencher, A.C. & Schaalje, G.B. (2001). *Linear models in statistics second edition*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Pawitan, Y. (2001). *In all likelihood statistical modelling and inference using likelihood*, Clarendon Press-Oxford, 256-267.
- Hosmer, D.W., Lemeshow, S., & May, S. (2008). *Applied survival analysis: regression modelling of time-to-event data*, 2nd edition, New Jersey, John Wilsey & Sons, 260-289.

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
Pondok Karisma Residence
Jalan Raflesia VI D.151
Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya - 085223186009
<http://rcipress.rcipublisher.org/>

ISBN 978-623-448-337-6 (PDF)

