# BAHAN AJAR
# MATA KULIAH
# MATEMATIKA REKAYASA

**Penyusun:**

**Ika Meicahayanti, S.T., M.T.**

**PROGRAM STUDI TEKNIK LINGKUNGAN**
**FAKULTAS TEKNIK**
**UNIVERSITAS MULAWARMAN**
**SAMARINDA**
**2021**

# KATA PENGANTAR

Puji syukur atas kehadirat Allah SWT karena atas limpahan Rahmat dan Hidayah-Nya penyusun dapat menyelesaikan bahan ajar untuk mata kuliah Matematika Rekayasa.

Bahan ajar ini dimaksudkan sebagai pegangan bagi mahasiswa yang mengikuti mata kuliah Matematika Rekayasa pada Program Studi Teknik Lingkungan Fakultas Teknik Universitas Mulawarman. Pada praktikum ini mahasiswa diharapkan dapat memahami penyusunan masalah fenomena fisik, kimia dan biologi ke dalam bahasa matematia melalui persamaan aljabar dan persamaan diferensial, serta menginterpretasikan kedalam model matematika. Modul praktikum ini berisi materi pokok bahasan: a) Interpolasi; b) Diferensial Numerik I; c) Akar-Akar Persamaan; d) Analisis Regresi; e) Neraca Massa.

Dalam penyusunan modul praktikum ini, penyusun menyampaikan terima kasih yang sebanyak-banyaknya kepada:

1. Bapak Ir. M. Dahlan Balfas, S.T, M.T. selaku Dekan Fakultas Teknik Uiversitas Mulawarman
2. Bapak Prof. Dr. Ir. Tamrin S.T., M.T. selaku Wakil Dekan Bidang Akademik, Kemahasiswaan dan Alumni Fakultas Teknik
3. Bapak Ir. Fahrizal Adnan, S.T., M.Sc., selaku Koordinator Program Studi Teknik Lingkungan
4. Bapak/Ibu Dosen Program Studi S1 Teknik Lingkungan

Penyusunan bahan ajar ini telah diusahakan semaksimal mungkin, namun sebagaimana manusia biasa tentunya masih terdapat kekurangan atau kesalahan. Untuk itu, penyusun mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk penyusunan bahan ajar berikutnya. Semoga bahan ajar ini dapat memberikan manfaat.

Samarinda, September 2021

Ir. Ika Meicahayanti, S.T., M.T.

NIP. 19900510 201404 2 001

# DAFTAR ISI

**KATA PENGANTAR** .......... i
**DAFTAR ISI** .......... ii
**PENDAHULUAN** .......... 1
**MATERI 1INTERPOLASI** .......... 2
**MATERI 2DIFERENSIAL NUMERIK** .......... 3
**MATERI 3AKAR-AKAR PERSAMAAN** .......... 4
**MATERI 4ANALISIS REGRESI** .......... 5
**MATERI 5NERACA MASSA** .......... 6

# PENDAHULUAN

Matematika Rekayasa
PS Teknik Lingkungan

# Pendahuluan

Ika Meicahayanti
ikameicahayanti@gmail.com
081232652776



# Matematika Rekayasa
# Semester Ganjil 2021/2022

Semester 1 | Kode MK 09045213 | 2 sks

- Rencana Perkuliahan
- RPS
- Evaluasi

# Rencana Perkuliahan TA 2021/2022

Semester 3 | Kode MK 09045332 | 3 sks

- Online - 3 sks
- 16 pertemuan (24 Agustus - 7 Desember 2021)
- 1 pertemuan per minggu (Selasa 11.10)
- Tim dosen - 2 dosen
- Sesi 1 (24 Agustus - 12 Oktober 2021)
- MOLS - GC - ZOOM
- Absensi MOLS dan SC Zoom di awal/tengah perkuliahan
- Kode kelas MOLS: gbaq5W
- PJ: I Gusti Ngurah Ary, 2 operator dan 1 notulen



# Rencana Pembelajaran Semester

Semester 1 | Kode MK 09045213 | 2 sks

**DS**

**Deskripsi Singkat:**
Mata kuliah matematika rekayasa memberikan pemahaman kepada mahasiswa dalam penyusunan masalah fenomena fisik, kimia dan biologi kedalam bahasa matematia melalui persamaan aljabar dan persamaan diferensial dan menginterpretasikan kedalam model matematika.

**CP MK**

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah:
Setelah mengikuti mata kuliah ini diharapkan mahasiswa dapat menyelesaikan masalah dari fenomena fisik, kimia dan biologi dalam model matematika.

**R**

Referensi:
1. K A. Stroud. 2003 Matematika Teknik, Erlangga Jakarta.
2. Diktat kuliah matematika rekayasa sttl " YLH" Yogyakarta
3. Donald A. Morley,1979. mathematical Modelling in water and waste treatment

**E**

Evaluasi:
Skema V
**Tugas 20% (Review/Kuis setelah pertemuan zoom)**
UTS 30%
UAS 40%
Afektif 10%

# Rencana Perkuliahan

Semester 3 | Kode MK 09065211 | 2 sks

- Pertemuan 1: Kontrak perkuliahan
- Pertemuan 2: Interpolasi
- Pertemuan 3: Diferensial Numerik
- Pertemuan 4: Akar-Akar Persamaan
- Pertemuan 5: Akar-Akar Persamaan
- Pertemuan 6: Analisis Regresi
- Pertemuan 7: Neraca massa
- Pertemuan 8: UTS



# Matematika Rekayasa

- Berbagai permasalahan dalam bidang ilmu pengetahuan dan teknologi dapat di gambarkan dalam bentuk persamaan matematik.
- Jika persamaan sederhana, penyelesaian dapat dilakukan secara analitis
- Jika persamaan rumit, maka penyelesaian dilakukan secara numeris. Hasil dari p enyelesaian numeris merupakan nilai pendekatan dri penyelesaian analitis atau eksak.
- Memiliki nilai kesalahan dan nilai harus cukup kecil terhadap tingkat kesalahan yang ditetapkan.
- Terdapat beberapa bentuk proses hitungan atau algoritma untuk menyelesaika n suatu persamaan matematis.

# Kesalahan/Error

- Terdapat kesalahan dalam penyelesaian persamaan matematis
- terdapat 3 jenis kesalahan: bawaan, pemotongan, dan pembulatan
- Kesalahan bawaan adalah kesalahan nilai data.
- Kesalahan pemotongan adalah tidak dilakukannya penyelesaian persamaan mat ematis dengan benar (Deret Taylor)
- Kesalahan pembulatan, kesalahan dalam pembulatan angka.



# Kesalahan Absolut dan Relatif

- Hubungan nilai eksak, nilai perkiraan dan kesalahan dapat diberikan dalam bentuk:

$$p = p_x + E_e$$

*p* = *nilai eksak*

*px* = *nilai perkiraan*

*Ee* = *kesalahan terhadap nilai eksak*

- Besaran tingkat kesalahan dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\varepsilon_e = \frac{E_e}{P} x\ 100\%$$

- Kesalahan terhadap beberapa perkiraan:

$$\varepsilon_a = \frac{p_x^{n+1} - p_x^n}{p_x^{n+1}}$$

# MATERI 1

# INTERPOLASI

**Matematika Rekayasa**
**Semester Ganjil 2021/2022**

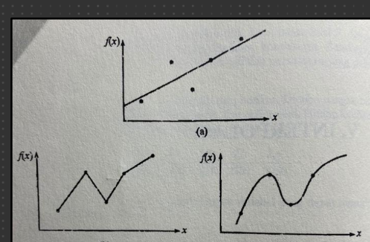
# INTERPOLASI

Ika Meicahayanti, S.T., M.T.



# INTERPOLASI

- Mencari suatu nilai yang berada di antara beberapa titik data yang telah diketahui nilainya.
- Nilai tersebut dapat diketahui dengan membuat suatu fungsi atau persamaan yang melalui titik data terlebih dahulu.
- Setelah persamaan atau fungsi, maka bisa dihitung nilai fungsi yang berada di antara titik–titik data.
- Berbeda dengan regresi.
- Regresi hanya menunjukkan trend
- interpolasi menghubungkan titik–titiknya.



Gambar 5.1. Perbedaan antara regresi (a) dan interpolasi (b, c)

PROGRAM STUDI TEKNIK LINGKUNGAN
FAKULTAS TEKNIK UNIVERSITAS
MULAWARMAN

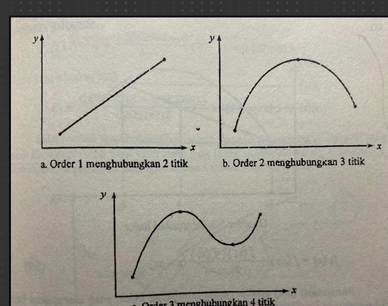
# METODE INTERPOLASI

- Interpolasi polinomial merupakan metode interpolasi yang banyak digunakan
- Persamaan polinomial adalah persamaan aljabar yang mengandung jumlah dari variabel x berpangkat bilangan bulat (integer). Bentuk umum persamaan polinomial adalah:
  - $f\,(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ .....*1*
    - *dimana:* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ *adalah parameter yang akan dicari berdasarkan titik data.*
    - *n adalah derajat order dari persamaan polinomial*
    - *x adalah variabel bebas*

PROGRAM STUDI TEKNIK LINGKUNGAN FAKULTAS TEKNIK UNIVERSITAS MULAWARMAN

# METODE INTERPOLASI

- Interpolasi:
  - order satu (interpolasi linier)
    - n=1 pada n+1 titik data
    - hanya ada 1 garis lurus yang menghubungkan 2 titik
  - order dua
    - n=2 pada n+1 titik data
    - terdapat 3 titik yang dapat dihubungkan oleh fungsi parabola
  - order 3
    - n=3 pada n+1 titik data
    - terdapat 4 titik yang dapat dihubungkan oleh fungsi parabola




Gambar 5.2. Interpolasi Polinomial

PROGRAM STUDI TEKNIK LINGKUNGAN FAKULTAS TEKNIK UNIVERSITAS MULAWARMAN

# METODE INTERPOLASI

- Di dalam operasi interpolasi, ditentukan suatu persamaan polinomial order n yang melalui n+1titik data, yang kemudian digunakan untuk menentukan suatu nilai di antara titik data tersebut.
- Jumlah order menentukan ketelitian perhitungan
- Interpolasi polinomial dengan derajat lebih besar akan memiliki hasil lebih baik.



# INTERPOLASI LINIER

- Mempunyai bentuk sederhana dan mudah dipahami
- Polinomial berderajat satu
- Hasil kurang teliti
- Menghubungkan 2 buah titik data dengan garis lurus
- Diketahui nilai suatu fungsi di titik $x_0$ dan $x_1$, yaitu $f(x_0)$ dan $f(x_1)$. Dengan metode interpolasi linier akan dicari nilai fungsi di titik x, yaitu $f_1(x)$. Index 1 pada $f_1(x)$ menunjukkan bahwa interpolasi dilakukan dengan interpolasi polinomial order 1.

# INTERPOLASI LINIER

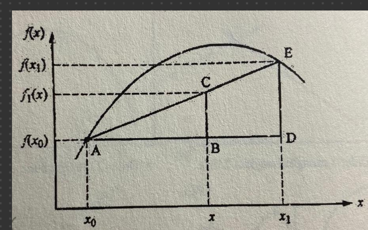
- Dari 2 segitiga ABC dan ADE seperti tampak dalam gambar, terdapat hubungan berikut:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD}$$

$$\frac{f_1(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \text{..............2}$$

- Persamaan 2 merupakan persamaan interpolasi linier yang merupakan bentuk interpolasi polinomial order 1.
- $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ merupakan kemiringan garis yang menghubungkan 2 titik
- Semakin kecil interval antara titik data, hasil perkiraan akan semakin baik.






# CONTOH 1

- Dicari nilai ln 2 dengan metode interpolasi linier berdasarkan data ln 1=0 dan ln 6=1,7917595. Hitung juga nilai tersebut berdasarkan data ln 1 dan ln 4= 1,3862944. Untuk membandingkan hasil yang diperoleh, diktehui nilai eksak dari ln 2=0,69314718

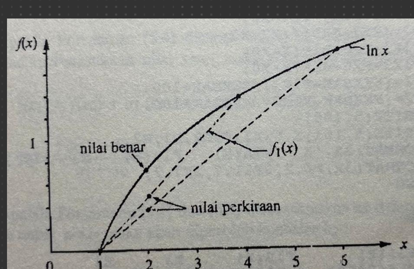
# PENYELESAIAN CONTOH 1

- Dengan menggunakan persamaan 2, dihitung dengan interpolasi linier ln pada x=2, berdarkan nilai ln di $x_0$=1 dan $x_1$=6.
  - $f_1(2) = 0 + \frac{1,7917595-0}{6-1}(2-1) = 0,35835190$
- Besar kesalahan adalah:
  - $E_t = \frac{0,69314718-0,35835190}{0,69314718} x100\% = 48,3\%$
- Apabila digunakan interval yang lebih kecil, yaitu nilai $x_0$=1 dan $x_1$=4, maka:
  - $f_1(2) = 0 + \frac{1,3862944-0}{4-1}(2-1) = 0,46209813$
- Besar kesalahan adalah:
  - $E_t = \frac{0,69314718-0,46209813}{0,69314718} x100\% = 33,3\%$

PROGRAM STUDI TEKNIK LINGKUNGAN
FAKULTAS TEKNIK UNIVERSITAS
MULAWARMAN

# PENYELESAIAN CONTOH 1

- Dari perhitungan terlihat bahwa dengan menggunakan interval yang lebih kecil diperoleh hasil yang lebih baik (kesalahan lebih kecil).




PROGRAM STUDI TEKNIK LINGKUNGAN
FAKULTAS TEKNIK UNIVERSITAS
MULAWARMAN

# INTERPOLASI KUADRAT

- Apabila terdapat 3 titik data, maka perkiraan dapat dilakukan dengan polinomial order dua.
- Perkiraan dilakukan dengan garis lengkung yang menghubungkan titik–titik data.
- Persamaan polinomial order dua:
  - $f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$.....................................................................3
- Secara prinsip sama dengan persamaan 1:
  - $f_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$
  - $f_2(x) = b_0 + b_1x - b_1x_0 + b_2x^2 - b_2xx_1 - b_2x_0x + b_2x_0x_1$
  - dengan: $a_0 = b_0 - b_1x_0 + b_2x_0x_1$

    $a_1 = b_1 - b_2x_1 - b_2x_0$

    $a_2 = b_2$



# INTERPOLASI KUADRAT

- Menggunakan persamaan 3.
- Berdasarkan data yang ada, kemudian dihitung koefisien $b_0$, $b_1$, $b_2$ dengan persamaan berikut:
  - $b_0 = f(x_0)$
  - $b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$
  - $b_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$

# CONTOH 2

- Gunakan polinomial order dua dengan data dalam contoh 1 untuk mencari ln 2.
- Data yang diketahui yaitu:
  - $x_0 = 1$
  - $x_1 = 4$
  - $x_2 = 6$
  - $f(x_0) = 0$
  - $f(x_1) = 1{,}3862944$
  - $f(x_2) = 1{,}7917595$



# PENYELESAIAN CONTOH 2

- Interpolasi polinomial dihitung dengan menggunakan persamaan 3 dan persamaan untuk koefisien $b_0$, $b_1$, $b_2$:
  - $b_0 = f(x_0) = 0$
  - $b_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{1{,}3862944-0}{4-1} = 0{,}46209813$
  - $b_2 = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0} = \frac{\frac{1{,}7917595-1{,}3862944}{6-4} - \frac{1{,}3862944-0}{4-1}}{6-1} = -0{,}051873116$
- *Nilai-nilai tersebut didistribusikan ke persamaan 3:*

$$f_2\,(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1)$$

$$f_2\,(x) = 0 + 0{,}46209813(x-1) + 0{,}051873116(x-1)(x-4)$$

- *Maka diperoleh nilai fungsi interpolasi:*

$$f_2\,(2) = 0{,}56584436$$

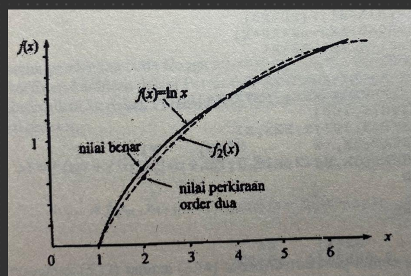
- *Besar kesalahan adalah*

$$E_t = \frac{0{,}69314718-0{,}56584436}{0{,}69314718} x100\% = 18{,}4\%$$

PROGRAM STUDI TEKNIK LINGKUNGAN
FAKULTAS TEKNIK UNIVERSITAS
MULAWARMAN

# PENYELESAIAN CONTOH 2

- Dari penyelesaian contoh 2 dapat dilihat bahwa tingkat kesalahan lebih kecil dibandingkan menggunakan order 1 (penyelesaian contoh 1)






# BENTUK UMUM INTERPOLASI POLINOMIAL

- Dapat digunakan untuk membentuk polinomial order n dari titik n+1 data. bentuk umum polinomial order n adalah:
  - $f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots b_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n - 1)$....................4
- Mengidentifikasi koefisien:
  - $b_0 = f(x_0)$
  - $b_1 = f[x_1, x_0]$
  - $b_2 = f[x_2, x_1, x_0]$
  - $b_n = f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1, x_0]$
- Definisi fungsi berkurung ([.....]) adalah pembagian beda hingga.

# BENTUK UMUM INTERPOLASI POLINOMIAL

- Pembagian beda hingga pertama:

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

- Pembagian beda hingga kedua:

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}$$

- Pembagian beda hingga ke–n:

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0]}{x_n - x_0}$$



# CONTOH 3

- Dalam contoh 2, titik data $x_0$=1, $x_1$=4, $x_3$=6, digunakan untuk memperkirakan In 2 dengan fungsi parabola. Sekarang dengan menambah titik ke–4, yaitu $x_3$=5 dengan nilai $f(x_3 = 5)$=1,6094 379, hitung In 2 dengan interpolasi polinomial order 3.

# PENYELESAIAN CONTOH 3

- Data yang diketahui:
  - $x_0 = 1$
  - $x_1 = 4$
  - $x_2 = 6$
  - $x_3 = 5$
  - $f(x_0) = 0$
  - $f(x_1) = 1{,}3862944$
  - $f(x_2) = 1.7917595$
  - $f(x_3) = 1{,}6094379$
- Persamaan polinomial order 3 diperoleh dengan memasukkan nilai n=3 ke dalam persamaan 4:
  - $f_3(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + b_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$



# PENYELESAIAN CONTOH 3

- Pembagian beda hingga pertama:
  - $f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1{,}3862944 - 0}{4 - 1} = 0{,}46209813$
  - $f[x_2, x_1] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1{,}7917595 - 1{,}3862944}{6 - 4} = 0{,}20273255$
  - $f[x_3, x_2] = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{1{,}6094379 - 1{,}7917595}{5 - 6} = 0{,}18232160$
- Pembagian beda hingga kedua:
  - $f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{0{,}20273255 - 0{,}46209813}{6 - 1} = -0{,}051873116$
  - $f[x_3, x_2, x_1] = \frac{f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]}{x_3 - x_1} = \frac{0{,}18232160 - 0{,}20273255}{5 - 4} = -0{,}020410950$

PROGRAM STUDI TEKNIK LINGKUNGAN
FAKULTAS TEKNIK UNIVERSITAS
MULAWARMAN

# PENYELESAIAN CONTOH 3

- Pembagian beda hingga ketiga:
  - $f[x_3, x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_3,x_2,x_1]-f[x_2,x_1,x_0]}{x_3-x_0}$

    $= \frac{-0,020410950+0,051873116}{5-1} = 0,0078655415$
- Sehingga koefisien diketahui:
  - $b_0 = f(x_0) = 0$
  - $b_1 = f[x_1, x_0] = 0,46209813$
  - $b_2 = f[x_2, x_1, x_0] =- 0,051873116$
  - $b_3 = f[x_3, x_2, x_1, x_0] = 0,0078655415$



# PENYELESAIAN CONTOH 3

- Maka persamaan interpolasi order 3 menjadi:
  - $f_3\,(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + b_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$
  - $f_3\,(x) = 0 + 0,46209813(x - 1) - 0,051873116(x - 1)(x - 4) + 0,0078655415(x - 1)(x - 4)(x - 6)$
- maka diperoleh $f_3\,(2) = 0,62876869$
- *Besar kesalahan adalah*

  $$E_t = \frac{0,69314718-0,62876869}{0,69314718} x100\% = 9,3\%$$

PROGRAM STUDI TEKNIK LINGKUNGAN
FAKULTAS TEKNIK UNIVERSITAS
MULAWARMAN

# INTERPOLASI POLINOMIAL LAGRANGE

- Hampir sama dengan polinomial Newton, tetapi tidak menggunakan bentuk pembagian beda hingga.
- Bentuk polinomial Newton order satu:
  - $f_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)[x_1, x_0]$.............................................................5
- Beda hingga yang ada pada persamaan tersebut:
  - $f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$
  - $f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} + \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$.............................................................6
- Persamaan 5 dan 6 disubtitusi menjadi:
  - $f_1(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)}{(x_0 - x_1)} f(x_0)$



# INTERPOLASI POLINOMIAL LAGRANGE

- Persamaan interpolasi Lagrange order satu:
  - $f_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1)$.............................................................7
- Persamaan interpolasi Lagrange order dua:
  - $f_2(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \frac{(x - x_2)}{(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)}{(x_2 - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} f(x_2)$............8
- Persamaan interpolasi Lagrange order tiga:
  - $f_3(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \frac{(x - x_2)}{(x_0 - x_2)} \frac{(x - x_3)}{(x_0 - x_3)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} \frac{(x - x_3)}{(x_1 - x_3)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)}{(x_2 - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} \frac{(x - x_3)}{(x_2 - x_3)} f(x_2) + \frac{(x - x_0)}{(x_3 - x_0)} \frac{(x - x_1)}{(x_3 - x_1)} \frac{(x - x_2)}{(x_3 - x_2)} f(x_3)$.......................................9

# CONTOH 4

- Gunakan interpolasi polinomial Lagrange order satu dan dua untuk menghitung ln 2 dengan menggunakan data pada Contoh 2.



# PENYELESAIAN CONTOH 4

- Data yang diketahui:
  - $x_0 = 1$
  - $x_1 = 4$
  - $x_2 = 6$
  - $f(x_0) = 0$
  - $f(x_1) = 1{,}3862944$
  - $f(x_2) = 1{,}7917595$
- Penyelesaian order satu menggunakan persamaan 7:
  - $f_1(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} f(x_1)$
  - $f_1(2) = \frac{(2-4)}{(1-4)} 0 + \frac{(2-1)}{(4-1)} 1{,}3862944 = 0{,}4620981$

## PENYELESAIAN CONTOH 4

- Penyelesaian order dua menggunakan persamaan 8:
  - $f_2(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}\frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)}{(x_2-x_0)}\frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)}f(x_2)$
  - $f_2(2) = \frac{(2-4)}{(1-4)}\frac{(2-6)}{(1-6)}0 + \frac{(2-1)}{(4-1)}\frac{(2-6)}{(4-6)}1{,}3862944 + \frac{(2-1)}{(6-1)}\frac{(2-4)}{(6-4)}1{,}7917595 = 0{,}56584437$

PROGRAM STUDI TEKNIK LINGKUNGAN
FAKULTAS TEKNIK UNIVERSITAS
MULAWARMAN

## PENYELESAIAN CONTOH 4

- *Besar kesalahan order satu adalah*
  - $E_t = \frac{0{,}69314718-0{,}4620981}{0{,}69314718}x100\% = 33{,}3\%$
- *Besar kesalahan order dua adalah adalah*
  - $E_t = \frac{0{,}69314718-0{,}56584437}{0{,}69314718}x100\% = 18{,}3\%$
- *Tingkat ketelitian lebih rendah dibanding interpolasi polinomial umum*

PROGRAM STUDI TEKNIK LINGKUNGAN
FAKULTAS TEKNIK UNIVERSITAS
MULAWARMAN

# SOAL

1. Perkirakan nilai log 4 dengan menggunakan interpolasi linier jika diketahui data:
   - log 3=0,4771213 dan log 5=0,69897
   - log 3=0,4771213 dan log 6=0,7781513

   Hitung pula tingkat kesalahannya pada setiap interpolasi jika diketahui nilai eksak dari log 4 sebesar 0,60206
2. Dengan menggunakan metode interpolasi kuadrat dan berdasarkan data soal 1, hitung log 4.
3. Dengan menggunakan metode interpolasi polinomial order 3 dan berdasarkan data soal 1, hitung log 4. Tambahan data adalah log 3,5=0,544068.

PROGRAM STUDI TEKNIK LINGKUNGAN FAKULTAS TEKNIK UNIVERSITAS MULAWARMAN

# SOAL

4. Diberikan data seperti pada tabel. Hitung f(1,3) dengan interpolasi linier

| x | 0,0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 1,000 | 2,119 | 2,910 | 3,945 | 5,720 | 8,695 |

5. Dengan menggunakan data pada soal 4 hitung f(1,3) dengan interpolasi kuadrat.
6. Dengan menggunakan data pada soal 4 hitung f(1,3) dengan interpolasi order 3.
7. Selesaikan soal nomor 4 dengan menggunakan metode Lagrange order 2.
8. Selesaikan soal nomor 4 dengan menggunakan metode Lagrange order 3.

PROGRAM STUDI TEKNIK LINGKUNGAN FAKULTAS TEKNIK UNIVERSITAS MULAWARMAN

# PENYELESAIAN SOAL 1

- Diketahui:
  - log 3=0,4771213
  - log 5=0,69897
  - log 6=0,7781513
  - nilai eksak log 4=0,60206
- Ditanya:
  - Prediksi nilai log 4 jika menggunakan data log 3 dan log 5, beserta tingkat kesalahannya.
  - Prediksi nilai log 4 jika menggunakan data log 3 dan log 6, beserta tingkat kesalahannya.



# PENYELESAIAN SOAL 1

- Prediksi nilai log 4 jika menggunakan data log 3 dan log 5, beserta tingkat kesalahannya: menggunakan order 1 (interpolasi linier)
  - $f_1(4) = 0{,}4771213 + \frac{0{,}69897-0{,}4771213}{5-3}(4-3) = 0{,}58804565$
  - $E_t = \frac{0{,}60206-0{,}58804565}{0{,}60206} x100\% = 2{,}33\%$
- Prediksi nilai log 4 jika menggunakan data log 3 dan log 6, beserta tingkat kesalahannya: menggunakan order 1 (interpolasi linier)
  - $f_1(4) = 0{,}4771213 + \frac{0{,}7781513-0{,}4771213}{6-3}(4-3) = 0{,}58804565$
  - $E_t = \frac{0{,}60206-0{,}58804565}{0{,}60206} x100\% = 2{,}33\%$

# TUGAS 1

- Selesaikan soal nomor 2-8
- Dikumpulkan paling lambat hari Jumat, 2 September 2021 jam 24.00 melalui google-classroom:
- Dikerjakan pada Ms.Word

# MATERI 2
# DIFERENSIAL NUMERIK

Matematika Rekayasa
Semester Ganjil 2021/2022

# DIFERENSIAL NUMERIK

Ika Meicahayanti, S.T., M.T.



# DIFERENSIAL NUMERIK

- Digunakan untuk:
  - Memperkirakan bentuk diferensial kontinyu menjadi bentuk diskret.
  - Menyelesaikan persamaan diferensial berdasarkan deret Taylor
- Diferensial numerik:
  - Diferensial turunan pertama
  - Diferensial turunan kedua
  - Diferensial turunan lebih tinggi
  - Diferensial terhadap variabel lain

# DIFERENSIAL TURUNAN PERTAMA

- Deret Taylor dapat ditulis dalam bentuk:
  - $f\,(x_{i+1}) = f(x_i) + f^{'}(x_i)\Delta x + O\Delta x^2$..........1
  - *atau*
  - $\frac{\partial f}{\partial x} = f^{'}(x_i) = \frac{f\,(x_{i+1}) - f(x_1)}{\Delta x} - O(\Delta x)$..........2
- Bentuk persamaan 2 merupakan bentuk persamaan diferensial maju order 1 karena menggunakan data pada $x_i$dan $x_{i+1}$
- Jika data yang digunakan $x_i$dan $x_{i-1}$, maka disebut diferensial mundur dan deret Taylor menjadi:
  - $f\,(x_{i-1}) = f(x_i) - f^{'}(x_i)\Delta x + O\Delta x^2$..........3
  - *atau*
  - $\frac{\partial f}{\partial x} = f^{'}(x_i) = \frac{f(x_1) - f\,(x_{i-1})}{\Delta x} + O(\Delta x)$..........4

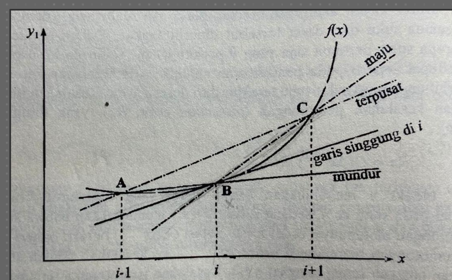


# DIFERENSIAL TURUNAN PERTAMA

- Apabila data yang digunakan untuk memperkirakan diferensial dari fungsi adalah titik $x_{1+1}$ dan $x_{1-1}$, maka perkiraannya disebut diferensial terpusat, sehingga persamaan menjadi:
  - $\frac{\partial f}{\partial x} = f^{'}(x_i) = \frac{f(x_{1+1}) - f\,(x_{i-1})}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$..........5
- Perkiraan diferensial terpusat lebih teliti dibanding diferensial maju atau mundur.

# DIFERENSIAL TURUNAN PERTAMA

- Terlihat pada gambar, bahwa kemiringan garis yang melalui titik A dan C (diferensial terpusat) hampir sama dengan kemiringan garis singgung dari fungsi di titik $x_1$; dibandingkan dengan kemiringan garis singgung yang melalui titik A dan B (diferensial mundur) atau titik B dan C (diferensial maju)






# DIFERENSIAL TURUNAN KEDUA

- Persamaan untuk diferensial turunan kedua dapat diltuliskan:
  - $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''(x_i) = \frac{f(x_{1+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{\Delta x^2} - O(\Delta x^2)$........................................................6
- Dari persamaan tersebut, dapat disimpulkan bahwa bentuk diferensial (biasa atau parsiil) dapat diubah dalam bentuk diferensial numerik (beda hingga)

## DIFERENSIAL TURUNAN LEBIH TINGGI

- Persamaan diferensial turunan ketiga:
  - $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f\,(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{2\Delta x^3} - O(\Delta x^2)$.......................................7
- Persamaan diferensial turunan keempat:
  - $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = f''''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f\,(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{\Delta x^4} - O(\Delta x^2)$...............................8



## DIFERENSIAL TERHADAP VARIABEL LAIN

- Diferensial sebelumnya digunakan untuk fungsi yang hanya mengandung 1 variabel bebas. Apabila fungsi mengandung lebih dari satu variabel bebas, seperti $f(x,y)$, maka persamaan menjadi:
  - Diferensial turunan pertama
    - $\frac{\partial f}{\partial x} = f'(x_{i+1}, y_j) = \frac{f(x_{i+1}, y_j) - f\,(x_i, y_j)}{\Delta x}$.......................................................................................9
    - $\frac{\partial f}{\partial x} = f'(x_i, y_{j+1}) = \frac{f(x_i, y_{j+1}) - f\,(x_i, y_j)}{\Delta y}$.....................................................................................10
- Untuk menyederhanakan penulisan, selanjutnya bentuk $f\,(x_i, y_j)$ ditulis menjadi $f\,(i,j)$ dengan $i\,dan\,j$ merupakan komponen dalam arah sumbu x dan sumbu y. Apabila fungsi berada dalam sistem 3 dimensi, maka bisa dituliskan $f\,(i,j,k)$

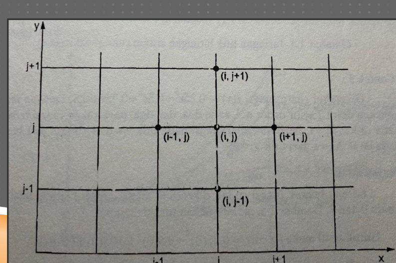
# DIFERENSIAL TERHADAP VARIABEL LAIN

- Diferensial turunan pertama:
  - $\frac{\partial f}{\partial x} = f(i+1, j) = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x}$ ..........10
  - $\frac{\partial f}{\partial x} = f(1, j+1) = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta y}$ ..........11
- Diferensial terpusat:
  - $\frac{\partial f}{\partial x} = f(i+1, j) = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x}$ ..........12
  - $\frac{\partial f}{\partial x} = f(1, j+1) = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,,j+1}}{2\Delta y}$ ..........13



# DIFERENSIAL TERHADAP VARIABEL LAIN

- Diferensial turunan kedua:
  - $\frac{\partial f^2}{\partial x^2} = f(i+1, j) = \frac{f_{i-1,j} - 2f_{i,j} + f_{i+1,j}}{\Delta x^2}$ ..........12
  - $\frac{\partial f^2}{\partial x^2} = f(1, j+1) = \frac{f_{i,j-1} - 2f_{i,j} + f_{i,j+1}}{\Delta y^2}$ ..........13
- Pada gambar menunjukkan jaringan titik hitungan untuk fungsi yang berada dalam sistem koordinat x dan ya (dua dimensi)



# CONTOH 1

- Diketahui suatu fungsi $f(x) = 0{,}25x^3 + 0{,}5x^2 + 0{,}25x + 0{,}5$. Perkirakan turunan pertama dan turunan kedua dari persamaan tersebut di titik $x = 0{,}5$ dengan menggunakan langkah ruang $\Delta x = 0{,}5$



# PENYELESAIAN CONTOH 1

- Secara analitis turunan pertama dari fungsi adalah:
  - $f(x) = 0{,}25x^3 + 0{,}5x^2 + 0{,}25x + 0{,}5$
  - $f^{'}(x) = 0{,}75x^2 + x + 0{,}25$
  - $f^{'}(x_i = 0{,}5) = 0{,}75(0{,}5)^2 + 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}9375$
- Secara analitis turunan kedua dari fungsi adalah:
  - $f^{'}(x) = 0{,}75x^2 + x + 0{,}25$
  - $f^{''}(x) = 1{,}5x + 1$
  - $f^{''}(x_i = 0{,}5) = 1{,}5(0{,}5) + 1 = 1{,}75$

# PENYELESAIAN CONTOH 1

- Dengan $\Delta x = 0{,}5$, maka dapat diketahui:
  - $x_i = 0{,}5$
  - $x_{i-1} = 0$
  - $x_{i+1} = 1$
- Maka dapat dihitung masing–masing $f(x)$ pada persamaan $f(x) = 0{,}25x^3 + 0{,}5x^2 + 0{,}25x + 0{,}5$ :
  - $f(x_{i-1})$ atau $f(0) = 0{,}25(0)^3 + 0{,}5(0)^2 + 0{,}25(0) + 0{,}5 = 0{,}5$
  - $f(x_i)$ atau $f(0{,}5) = 0{,}25(0{,}5)^3 + 0{,}5(0{,}5)^2 + 0{,}25(0{,}5) + 0{,}5 = 0{,}78125$
  - $f(x_{i+1})$ atau $f(1) = 0{,}25(1)^3 + 0{,}5(1)^2 + 0{,}25(1) + 0{,}5 = 1{,}5$



# PENYELESAIAN CONTOH 1

- Perkiraan turunan pertama dengan diferensial maju (persamaan 2):
  - $f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_1)}{\Delta x}$
  - $f'(0{,}5) = \frac{1{,}5 - 0{,}78125}{0{,}5} = 1{,}4375$
- Kesalahan terhadap nilai eksak:
  - $E_t = \frac{0{,}9375 - 1{,}4375}{0{,}9375} x100\% = -53{,}3\%$
- Perkiraan turunan pertama dengan diferensial mundur (persamaan 4):
  - $f'(x_i) = \frac{f(x_1) - f(x_{i-1})}{\Delta x}$
  - $f'(0{,}5) = \frac{0{,}78125 - 0{,}5}{0{,}5} = 0{,}5625$
- Kesalahan terhadap nilai eksak:
  - $E_t = \frac{0{,}9375 - 0{,}5625}{0{,}9375} x100\% = 40\%$

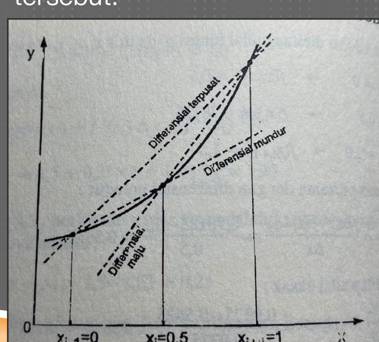
# PENYELESAIAN CONTOH 1

- Perkiraan turunan pertama dengan diferensial terpusat (persamaan 5):
  - $f'(x_i) = \frac{f(x_{1+1}) - f\ (x_{i-1})}{2\Delta x}$
  - $f'(0{,}5) = \frac{1{,}5 - 0{,}5}{2x0{,}5} = 1$
- Kesalahan terhadap nilai eksak:
  - $E_t = \frac{0{,}9375 - 1}{0{,}9375} x100\% =-\ 6{,}7\%$
- Perkiraan turunan kedua (persamaan 6):
  - $f''(x_i) = \frac{f(x_{1+1}) - 2f(x_i) + f\ (x_{i-1})}{\Delta x^2} - O(\Delta x^2)$
  - $f''(0{,}5) = \frac{1{,}5 - 2(0{,}78125) + 0{,}5}{0{,}5^2} = 1{,}75$
- Kesalahan terhadap nilai eksak:
  - $E_t = \frac{1{,}75 - 1{,}75}{1{,}75} x100\% = 0\%$



# PENYELESAIAN CONTOH 1

- Dari penyelesaian contoh 2 dapat digambarkan kemiringan analitis di titik $x = 0{,}5$ dan perkiraan turunan fungsi di turunan tersebut.



# SOAL

1. Diketahui suatu fungsi $f(x) =-2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5$. Perkirakan turunan pertama dan turunana kedua dari persamaan tersebut di titik $x = 0{,}5$ dengan menggunakan langkah ruang $\Delta x = 0{,}5$.
2. Diketahui suatu fungsi $f(x) =-2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5$. Perkirakan turunan pertama dan turunana kedua dari persamaan tersebut di titik $x = 0{,}5$ dengan menggunakan langkah ruang $\Delta x = 0{,}25$.
3. Gambarkan grafik dari penyelesaian soal nomor 1 dan 2



# TUGAS 2

- Selesaikan soal nomor 1 dan 2
- Dikumpulkan paling lambat hari Selasa, 7 September 2021 jam 24.00 melalui google-classroom:
- Dikumpulkan dengan jenis file pdf

# MATERI 3

# AKAR-AKAR PERSAMAAN

Matematika Rekayasa
Semester Ganjil 2021/2022

# AKAR-AKAR PERSAMAAN

Ika Meicahayanti, S.T., M.T.



# PENDAHULUAN

- Digunakan untuk mencari akar-akar persamaan
- Pada persamaan polinomial derajat dua, persamaan dapat diselesaikan dengan rumus persamaan kuadrat yang sederhana.
- Misalnya persamaan $ax^2 + bx + c = 0$, dapat dicari akar-akarnya secara analitis dengan persamaan:
  - $x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

# PENDAHULUAN

- Untuk persamaan polinomial derajat tiga atau empat, rumus-rumus yag ada sangat kompleks dan jarang sekali digunakan.
- Untuk derajat yang lebih tinggi, tidak ada rumus yang digunakan untuk menyelesaikannya.
- Bentuk persamaan tersebut misalnya adalah:
  - $f(\mathrm{x}) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$
  - $f(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 3x - 1 = 0$
  - $f(x) = e^x - 3x = 0$
  - $f(x) = 3x + sinx - e^x = 0$
  - dsb

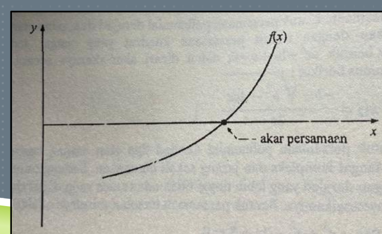


# PENDAHULUAN

- Bentuk persamaan tersebut sulit atau tidak mungkin diselesaikan secara eksplisit.
- Metode numerik memberikan cara-cara untuk menyelesaikan bentuk persamaan tersebut secara perkiraan sampai diperoleh hasil yang mendekati penyelesaian eksak.
- Penyelesaian numerik dilakukan dengan perkiraan yang berurutan (iterasi), sedemikian sehingga setiap hasil diperoleh hasil yang lebih teliti.
- Dengan melakukan sejumlah prosedur iterasi yang dianggap cukup, akhirnya didapat hasil perkiraan yang mendekati hasil eksak (hasil yang benar) dengan toleransi kesalahan yang diijinkan.

# METODE PERHITUNGAN AKAR PERSAMAAN

- Salah satu cara yang paling sederhana untuk mendapatkan penyelesaian perkiraan adalah dengan menggambarkan fungsi tersebut dan kemudian dicari titik potongnya dengan sumbu x, yang menunjukkan akar dari persamaan tersebut. Namun cara ini hanya memberikan hasil yang sangat kasar, karena sulit untuk menetapkan nilai sampai beberapa digit di belakang koma.
- Metode yang lain, dengan cara coba banding dengan memasukkan nilai x pada sembarang nilai, kemudian dievaluasi apakah $f(x) = 0$. Jika tidak maka terus dicoba sehingga memperoleh $f(x) = 0$.



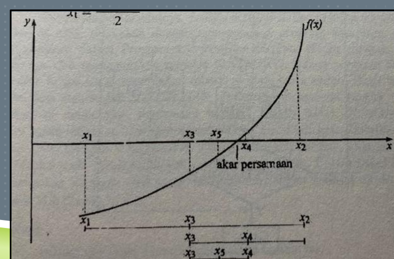



# METODE PERHITUNGAN AKAR PERSAMAAN

- Kedua cara tersebut tidak efisien dan tidak sistematis. Beberapa metode yang bisa digunakan untuk memperoleh akar-akar persamaan lebih sistematis, yaitu:
  - Metode setengah interval
  - Metode interpolasi linier
  - Metode Newton-Raphson
  - Metode Secart
  - Metode iterasi

# METODE SETENGAH INTERVAL

- Bentuk paling sederhana di antara beberapa metode.
- Langkah–langkah yang dilakukan pada penyelesaian persamaan dengan metode setengah interval:
  1. Hitung fungsi pada interval yang sama dari x sampai pada perubahan tanda dari fungsi $f(x_i)$ dan $f(x_{i+1})$, yaitu apabila $f(x_i)\mathrm{x}f(x_{i+1}) < 0$
  2. Perkiraan pertama dari akar $x_i$ dihitung dari rerata nilai $x_i$ dan $x_{i+1}$:
     a. $x_t = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$




PROGRAM STUDI TEKNIK LINGKUNGAN
FAKULTAS TEKNIK UNIVERSITAS
MULAWARMAN

1/18/2022 7

# METODE SETENGAH INTERVAL

3. Buat evaluasi berikut untuk menentukan di dalam sub interval mana persamaan akar berada:
   a. jika $f(x_i)\mathrm{x}f(x_t) < 0$, maka akar persmaan berada pada sub interval pertama, kemudian tetapkan $x_{i+1} = x_t$ dan lanjutkan pada langkah ke–4
   b. jika $f(x_i)\mathrm{x}f(x_t) > 0$, maka akar persamaan berada pada sub interval kedua, kemudian tetapkan $x_i = x_t$ dan lanjutkan pada langkah ke–4
   c. jika $f(x_i)\mathrm{x}f(x_t) = 0$, maka akar persamaan adalah $x_t$ dan hitungan selesai
4. Hitung perkiraan baru dari akar dengan persamaan berikut:
   a. $x_t = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$
5. Apabila perkiraan baru sudah cukup kecil, maka hitungan selesai dan $x_t$ adalah akar persamaan yang dicari. Jika belum maka hitungan kembali ke langkah 3.

PROGRAM STUDI TEKNIK LINGKUNGAN
FAKULTAS TEKNIK UNIVERSITAS
MULAWARMAN

1/18/2022 8

# CONTOH 1

- Hitung salah satu akar persamaan pangkat tiga: $f(\mathrm{x}) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$, dengan menggunakan metode setengah interval.



# PENYELESAIAN CONTOH 1

- Dihitung nilai $f(\mathrm{x})$ pada interval 2 titik, misalnya $\mathrm{x} = 1$ dan $\mathrm{x} = 2$
  - untuk $\mathrm{x} = 1$, maka $f(1) = (1)^3 + (1)^2 - 3(1) - 3 =- 4$
  - untuk $\mathrm{x} = 2$, maka $f(2) = (2)^3 + (2)^2 - 3(2) - 3 = 3$
- Perubahan tanda dari fungsi antara $\mathrm{x} = 1$ dan $\mathrm{x} = 2$ akan memotong sumbu x paling tidak sekali. Titik perpotongan antara sumbu x dan fungsi merupakan akar-akar persamaan.
- Dihitung nilai $x_t$, dan kemudian dihitung fungsi $f(x_t)$:
  - $x_t = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$
  - untuk $\mathrm{x} = 1{,}5$, maka $f(1{,}5) = (1{,}5)^3 + (1{,}5)^2 - 3(1{,}5) - 3 =- 1{,}875$
- Oleh karena fungsi berubah tanda antara $\mathrm{x} = 1{,}5$ dan $\mathrm{x} = 2$, maka akar persamaan terletak di antara kedua nilai tersebut.

## PENYELESAIAN CONTOH 1

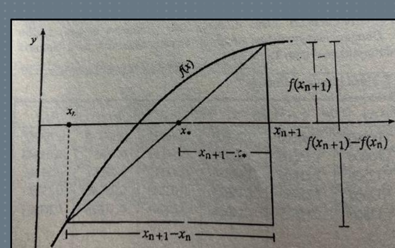
- Perhitungan dilanjutkan sampai memperoleh $f(x) = 0$ atau mendekati 0.
- Hasil perhitungan dengan metode setengah interval, akar persamaan diperoleh pada iterasi ke–13, yaitu sebesar 1,73206

| $i$ | $x_i$ | $x_{i+1}$ | $x_t$ | $f(x_i)$ | $f(x_{i+1})$ | $f(x_t)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.00000 | 2.00000 | 1.50000 | -4.00000 | 3.00000 | -1.87500 |
| 2 | 1.50000 | 2.00000 | 1.75000 | -1.87500 | 3.00000 | 0.17188 |
| 3 | 1.50000 | 1.75000 | 1.62500 | -1.87500 | 0.17188 | -0.94336 |
| 4 | 1.62500 | 1.75000 | 1.68750 | -0.94336 | 0.17188 | -0.40942 |
| 5 | 1.68750 | 1.75000 | 1.71875 | -0.40942 | 0.17188 | -0.12479 |
| 6 | 1.71875 | 1.75000 | 1.73438 | -0.12479 | 0.17188 | 0.02203 |
| 7 | 1.71875 | 1.73438 | 1.72656 | -0.12479 | 0.02203 | -0.05176 |
| 8 | 1.72656 | 1.73438 | 1.73047 | -0.05176 | 0.02203 | -0.01496 |
| 9 | 1.73047 | 1.73438 | 1.73242 | -0.01496 | 0.02203 | 0.00351 |
| 10 | 1.73047 | 1.73242 | 1.73145 | -0.01496 | 0.00351 | -0.00573 |
| 11 | 1.73145 | 1.73242 | 1.73193 | -0.00573 | 0.00351 | -0.00111 |
| 12 | 1.73193 | 1.73242 | 1.73218 | -0.00111 | 0.00351 | 0.00120 |
| 13 | 1.73193 | 1.73218 | **1.73206** | -0.00111 | 0.00120 | **0.00005** |
| 14 | 1.73193 | 1.73206 | 1.73199 | -0.00111 | 0.00005 | -0.00053 |



## METODE INTERPOLASI LINIER

- Metode setengah interval yang dibahas sebelumnya mudah namun tidak efisien, karena langkah iterasi cukup panjang.
- Metode interpolasi linier lebih ringkas dan lebih cepat memperoleh hasil akar persamaannya.
- Dikenal juga dengan metode *false position*
- Metode ini didasarkan pada interpolasi antara 2 nilai dari fungsi yang mempunyai tanda berlawanan.



# METODE INTERPOLASI LINIER

- Langkah perhitungan:
  - Dicari nilai fungsi untuk setiap interval $\Delta x$ yang sama sampai akhirnya didapatkan dua nilai fungsi $f(x_i)$ dan $f(x_{i+1})$ berurutan yang mempunyai tanda berlawanan.
  - Dari kedua fungsi $f(x_i)$ dan $f(x_{i+1})$ ditarik garis lurus sehingga terbentuk segitiga. dengan menggunakan sifat segitiga sebangun, didapat persamaan berikut:
    - $\frac{(x_{i+1})-x_*}{(x_{i+1})-x_*} = \frac{f(x_{i+1})}{f(x_{i+1})-f(x_i)}$
    - $x_* = x_{i+1} - \frac{f(x_{i+1})}{f(x_{i+1})-f(x_i)}(x_{i+1} - x_i)$
  - Dihitung $f(x_*)$ yang kemudian digunakan lagi untuk interploasi linier dengan nilai $f(x_i)$ atau $f(x_{i+1})$ sedemikian sehingga kedua fungsi mempunyai tanda berbeda. Prosedur ini diulang sampai diperoleh $f(\mathrm{x})$ mendekati 0



# CONTOH 2

- Hitung salah satu akar persamaan pangkat tiga: $f(\mathrm{x}) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$, dengan menggunakan metode interpolasi linier.

# PENYELESAIAN CONTOH 2

- Dihitung nilai $f(x)$ pada interval 2 titik, misalnya $x = 1$ dan $x = 2$
  - untuk $x = 1$, maka $f(1) = (1)^3 + (1)^2 - 3(1) - 3 =- 4$
  - untuk $x = 2$, maka $f(2) = (2)^3 + (2)^2 - 3(2) - 3 = 3$
- Dihitung $x_*$:
  - $x_* = x_{i+1} - \frac{f(x_{i+1})}{f(x_{i+1}) - f(x_i)}(x_{i+1} - x_i)$
  - $x_* = 2 - \frac{3}{3-(-4)}(2 - 1) = 1{,}57142$
  - untuk $x_* = 1{,}57142$, maka $f(1{,}57142) = (1{,}57142)^3 + (1{,}57142)^2 - 3(1{,}57142) - 3 =- 1{,}36449$
- Karena $f(x_*)$ bertanda negatif, maka akar terletak $x = 1{,}57142$ dan $x = 2$
- Perhitungan dilanjutkan sampai diperoleh $f(x)$ mendekati 0



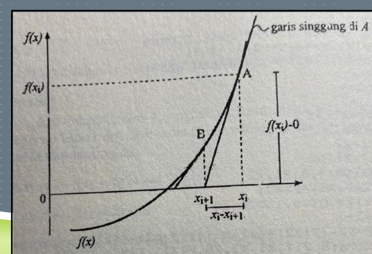
# PENYELESAIAN CONTOH 2

- Hasil perhitungan dengan metode setengah interval, akar persamaan diperoleh pada iterasi ke–7, yaitu sebesar 1,73205

| $i$ | $x_i$ | $x_{i+1}$ | $x_*$ | $f(x_i)$ | $f(x_{i+1})$ | $f(x_*)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.00000 | 2.00000 | 1.57143 | -4.00000 | 3.00000 | -1.36443 |
| 2 | 1.57143 | 2.00000 | 1.70541 | -1.36443 | 3.00000 | -0.24775 |
| 3 | 1.70541 | 2.00000 | 1.72788 | -0.24775 | 3.00000 | -0.03934 |
| 4 | 1.72788 | 2.00000 | 1.73140 | -0.03934 | 3.00000 | -0.00611 |
| 5 | 1.73140 | 2.00000 | 1.73195 | -0.00611 | 3.00000 | -0.00095 |
| 6 | 1.73195 | 2.00000 | 1.73204 | -0.00095 | 3.00000 | -0.00015 |
| 7 | 1.73204 | 2.00000 | **1.73205** | -0.00015 | 3.00000 | **-0.00002** |
| 8 | 1.73205 | 2.00000 | 1.73205 | -0.00002 | 3.00000 | 0.00000 |

# METODE NEWTON–RAPHSON

- Metode ini yang paling banyak digunakan dalam mencari akar–akar dari suatu persamaan.
- Jika perkiraan awal dari akar adalah $x_i$, suatu garis singgung dapat dibuat dari titik $(x_i, f(x_i)$
- Titik di mana garis singgung tersebut memotong sumbu x biasanya memberikan perkiraan yang lebih dekat dari nilai akar.
- Turunan pertama pada $x_i$ adalah ekivalen dengan kemiringan, dinyatakan dalam persamaan:
  - $f'(x_i) = \frac{f(x_i)-0}{x_i - x_{i+1}}$
  - $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$






# CONTOH 3

- Hitung salah satu akar persamaan pangkat tiga: $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$, dengan menggunakan metode Newton–Raphson

# PENYELESAIAN CONTOH 3

- Persamaan yang diselesaikan:
  - $f(\mathrm{x}) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$
- Turunan pertama dari persamaan tersebut adalah:
  - $f'(\mathrm{x}) = 3x^2 + 2x - 3 = 0$
- Dihitung nilai $f(\mathrm{x})$ pada 1 titik, misalnya $\mathrm{x} = 1$
  - untuk $\mathrm{x} = 1$, maka $f(1) = (1)^3 + (1)^2 - 3(1) - 3 = -4$
- Dihitung nilai $f'(\mathrm{x})$ pada 1 titik, misalnya $\mathrm{x} = 1$
  - untuk $\mathrm{x} = 1$, maka $f'(1) = 3(1)^2 + 2(1) - 3 = 2$
- Dihitung $x_{i+1}$:
  - $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
  - $x_{i+1} = 1 - \frac{-4}{2} = 3$



# PENYELESAIAN CONTOH 3

- Perhitungan dilanjutkan sampai diperoleh $f(\mathrm{x})$ mendekati 0
- Hasil perhitungan dengan metode setengah interval, akar persamaan diperoleh pada iterasi ke–6, yaitu sebesar 1,73205

| $i$ | $x_i$ | $x_{i+1}$ | $f(x_i)$ | $f'(\mathrm{x})$ | $f(x_{i+1})$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.00000 | 3.00000 | -4.00000 | 2.00000 | 24.00000 |
| 2 | 3.00000 | 2.20000 | 24.00000 | 30.00000 | 5.88800 |
| 3 | 2.20000 | 1.83015 | 5.88800 | 15.92000 | 0.98900 |
| 4 | 1.83015 | 1.73780 | 0.98900 | 10.70866 | 0.05457 |
| 5 | 1.73780 | 1.73207 | 0.05457 | 9.53539 | 0.00020 |
| 6 | 1.73207 | **1.73205** | 0.00020 | 9.46437 | **0.00000** |
| 7 | 1.73205 | 1.73205 | 0.00000 | 9.46410 | 0.00000 |

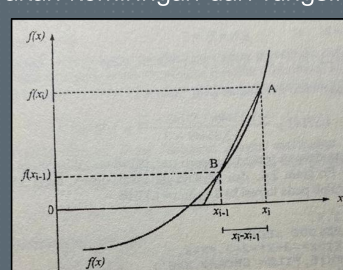
# METODE SECART

- Kekurangan metode Newton–Raphson adalah diperlukan turunan pertama dari $f(\mathrm{x})$ dalam hitungan. Hal ini kadang sulit dilakukan pemecahan turunan dari persamaan yang dilakukan.
- Hal ini didekati dengan nilai perkiraan berdasarkan diferensial beda hingga.



# METODE SECART

- Garis singgung di titik $x_i$ didekati oleh bentuk persamaan:
  - $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$
- Dalam metode ini pendekatan memerlukan 2 nilai awal dari x, yang digunakan untuk memperkirakan kemiringan dari fungsi.



# CONTOH 4

- Hitung salah satu akar persamaan pangkat tiga: $f(\mathrm{x}) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$, dengan menggunakan metode Secart.



# PENYELESAIAN CONTOH 4

- Dihitung nilai $f(\mathrm{x})$ pada interval 2 titik, misalnya $\mathrm{x} = 1$ dan $\mathrm{x} = 2$
  - untuk $x_1 = 1$, maka $f(1) = (1)^3 + (1)^2 - 3(1) - 3 =- 4$
  - untuk $x_2 = 2$, maka $f(2) = (2)^3 + (2)^2 - 3(2) - 3 = 3$
- Dihitung nilai $x_3$:
  - $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$
  - $x_3 = x_1 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$
  - $x_3 = 2 - \frac{3(2-1)}{3-(-4)} = 1{,}57142$
- Pada iterasi kedua, hitungan dilakukan berdasarkan nilai $x_2 = 2$ dan $x_3 = 1{,}57142$
- Perhitungan dilanjutkan sampai diperoleh $f(\mathrm{x})$ mendekati 0

# PENYELESAIAN CONTOH 4

- Hasil perhitungan dengan metode setengah interval, akar persamaan diperoleh pada iterasi ke–5, yaitu sebesar 1,73205

| $i$ | $x_{i-1}$ | $x_i$ | $x_{i+1}$ | $f(x_{i-1})$ | $f(x_i)$ | $f(x_{i+1})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.00000 | 2.00000 | 1.57143 | -4.00000 | 3.00000 | -1.36443 |
| 2 | 2.00000 | 1.57143 | 1.70541 | 3.00000 | -1.36443 | -0.24775 |
| 3 | 1.57143 | 1.70541 | 1.73514 | -1.36443 | -0.24775 | 0.02926 |
| 4 | 1.70541 | 1.73514 | 1.73200 | -0.24775 | 0.02926 | -0.00052 |
| 5 | 1.73514 | 1.73200 | **1.73205** | 0.02926 | -0.00052 | **0.00000** |
| 6 | 1.73200 | 1.73205 | 1.73205 | -0.00052 | 0.00000 | 0.00000 |



# METODE ITERASI

- Dalam metode iterasi digunakan suatu persmaan untuk memperkirakan nilai akar persamaan.
- persamaan tersebut dikembangkan dari fungsi $f(\mathrm{x}) = 0$ sehingga parameter x berada di sisi kiri dari persamaan:
  - $x = \mathrm{g}(\mathrm{x})$
- Transformasi ini dapat dilakukan dengan manipulasi aljabar atau dengan menambahkan parameter x pada kedua sisi dari persamaan aslinya. Contoh:
  - $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$
  - dapat ditulis menjadi:
  - $x = \frac{x^3+x^2-3}{3}$
  - dan bentuk lainnya

# METODE ITERASI

- Nilai x merupakan fungsi dari x, sehingga dengan memberi nilai perkiraan awal dari akar $x_i$ dapat dihitung perkiraan baru $x_{i+1}$, dengan rumus iteratif:
  - $x_{i+1} = g(x_i)$
- Besarnya kesalahan dihitung dengan rumus:
  - $\varepsilon_a = |\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}|100\%$



# CONTOH 5

- Hitung salah satu akar persamaan pangkat tiga: $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$, dengan menggunakan metode iterasi.

# PENYELESAIAN CONTOH 5

- Persamaan awal: $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$
- Persamaan dapat dituliskan dalam bentuk:
  - $x^3 = -x^2 + 3x + 3$
  - $x = (-x^2 + 3x + 3)^{1/3}$
- Maka dalam metode iterasi, dapat dituliskan sebagai:
  - $x_{i+1} = (-x_i{}^2 + 3x_i + 3)^{1/3}$
- Jika ditentukan perkiraan awalnya $x_1 = 1$, maka diperoleh:
  - $x_2 = (-(1)^2 + 3(1) + 3)^{1/3} = 1{,}70998$
- Besar kesalahan:
  - $\varepsilon_a = |\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}|100\% = |\frac{1{,}70998 - 1}{1{,}70998}|100\% = 41{,}5198$



# PENYELESAIAN CONTOH 5

- Selanjutnya $x_2 = 1{,}70998$ digunakan untuk menghitungnilai $x_3$ pada iterasi selanjutnya.
- Iterasi dilanjutkan hingga memperoleh $\varepsilon_a$ mendekati 0%
- Hasil perhitungan dengan metode setengah interval, akar persamaan diperoleh pada iterasi ke–4, yaitu sebesar 1,73205

| *i* | $x_i$ | $x_{i+1}$ | $\varepsilon_a$ (%) |
|---|---|---|---|
| 1 | 1.00000 | 1.70998 | 41.51965 |
| 2 | 1.70998 | 1.73313 | 1.33621 |
| 3 | 1.73313 | 1.73199 | 0.06579 |
| 4 | 1.73199 | **1.73205** | **0.00340** |
| 5 | 1.73205 | 1.73205 | 0.00018 |

# PENYELESAIAN CONTOH 5

- Persamaan awal: $f(\mathrm{x}) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$
- Persamaan dapat dituliskan dalam bentuk:
  - $x = \frac{x^3+x^2-3}{3}$
- Maka dalam metode iterasi, dapat dituliskan sebagai:
  - $x_{i+1} = \frac{x^3+x^2-3}{3}$
- Jika ditentukan perkiraan awalnya $x_1 = 1$, maka diperoleh:
  - $x_2 = \frac{(1)^3+(1)^2-3}{3} =- 0{,}33333$
- Besar kesalahan:
  - $\varepsilon_a = |\frac{x_{i+1}-x_i}{x_{i+1}}|100\% = |\frac{-0{,}33333-1}{-0{,}33333}|100\% = 400{,}004$



# PENYELESAIAN CONTOH 5

- Selanjutnya $x_2 =- 0{,}33333$ digunakan untuk menghitungnilai $x_3$ pada iterasi selanjutnya.
- Hasil perhitungan dengan metode setengah interval, akar persamaan diperoleh pada iterasi ke–5, yaitu sebesar 1,73205

| $i$ | $x_i$ | $x_{i+1}$ | $\varepsilon_a$ (%) |
|---|---|---|---|
| 1 | 1.00000 | -0.33333 | 400.00000 |
| 2 | -0.33333 | 1.23614 | 126.96559 |
| 3 | 1.23614 | 1.73030 | 28.55888 |
| 4 | 1.73030 | 1.73214 | 0.10648 |
| 5 | 1.73214 | **1.73205** | **0.00547** |
| 6 | 1.73205 | 1.73205 | 0.00028 |

- Pemilihan persamaan $x = \mathrm{g(x)}$ dan $x_1$ menentukan ketelitian dan keefektifan iterasi.

# SOAL

1. Selesaikan akar dari persamaan: $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ dengan menggunakan metode Newton Raphson dan Secant.
2. Selesaikan akar dari persamaan: $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 8x - 1 = 0$ dengan menggunakan metode iterasi. Gunakan iterasi untuk 3 persamaan yang berbeda dan bandingkan.
3. Selesaikan akar dari persamaan: $f(x) = 3^x - 3x^2 = 0$ dengan menggunakan metode setengah interval dan interpolasi linier.



# TUGAS 3

- Selesaikan soal nomor 1–3
- Dikumpulkan paling lambat hari Selasa, 21 September 2021 jam 11.10 melalui google-classroom
- Dikumpulkan dengan jenis file pdf

.

# MATERI 4

# ANALISIS REGRESI

# Matematika Rekayasa
Semester Ganjil 2021/2022

# ANALISIS REGRESI

Ika Meicahayanti, S.T., M.T.



# PENDAHULUAN

- Dalam analisis data sering dilakukan pembuatan suatu kurva yang dapat mewakili suatu rangkaian data yang diberikan dalam sistem koordinat x–y.
- Data tersebut dapat berupa hasil percobaan di laboratorium atau pengamatan di lapangan seperti:
  - Pengukuran debit sungai yang memberikan hubungan antara kedalaman aliran dan debit sungai
  - Hubungan antara data hujan dan debit sungai
  - Pertumbuhan jumlah penduduk sebagai fungsi waktu
  - Hubungan antara kandungan oksigen di air dan temperatur
- Titik–titik data tersebar dalam koordinat x–y karena adanya kesalahan atau ketidakpastian dalam pengujian, pengukuran atau variasi perubahan data dari waktu ke waktu. Contoh: pertambahan jumlah penduduk di wilayah tertentu tidak selalu sama.

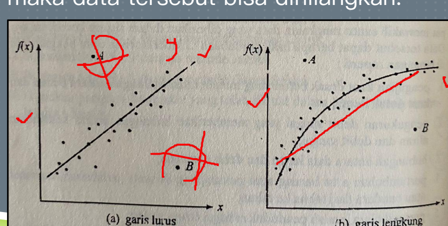
# PENDAHULUAN

- Dalam analisis regresi akan dibuat kurva atau fungsi berdasarkan sebaran data.
- Kurva yang terbentuk diharapkan dapat mewakili titik–titik data yang menyebar.
- Setelah kurva terbentuk, maka dilakukan ekstrapolasi untuk mendapatkan nilai y yang berkaitan dengan nilai x yang berada di luar rangkaian data yang ada.
- Metode membuat kurva untuk memprediksi persamaan atau nilai y dari suatu x dinamakan metode *least square* atau metode kuadrat terkecil.
- Metode kuadrat terkecil banyak menggunakan beberapa notasi dan teori statistik.



# PENDAHULUAN

- Kurva dapat berbentuk linier (garis lurus) atau lengkung (logaritmik atau berpangkat).
- Bentuk kurva tergantung pada kecenderungan/trend dari penyebaran titik data.
- Jika ada data yang menyimpang terlalu jauh (contoh data A dan B), maka data tersebut bisa dihilangkan.



# PRINSIP STATISTIK

- Contoh disajikan data pengukuran debit rerata tahunan sungai selama 15 tahun seperti pada tabel.
- Kolom kedua dari tabel adalah debit rerata tahunan, sedangkan kolom ketiga dan keempat adalah nilai yang digunakan untuk hitungan statistik.
- Nilai rata-rata data (ȳ) adalah jumlah nilai data (yi) dibagi dengan jumlah data (n), yaitu;
  - $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$
  - n merupakan jumlah data

| Tahun | Yi | Yi-ȳ | (yi-ȳ)2 |
|---|---|---|---|
| 1971 | 8.52 | 1.49 | 2.22 |
| 1972 | 3.33 | -3.70 | 13.68 |
| 1973 | 7.85 | 0.82 | 0.67 |
| 1974 | 7.65 | 0.62 | 0.39 |
| 1975 | 10.91 | 3.88 | 15.06 |
| 1976 | 4.17 | -2.86 | 8.17 |
| 1977 | 3.4 | -3.63 | 13.17 |
| 1978 | 8 | 0.97 | 0.94 |
| 1979 | 13.4 | 6.37 | 40.59 |
| 1980 | 5.4 | -1.63 | 2.65 |
| 1981 | 8.87 | 1.84 | 3.39 |
| 1982 | 4.73 | -2.30 | 5.28 |
| 1983 | 7.4 | 0.37 | 0.14 |
| 1984 | 6.8 | -0.23 | 0.05 |
| 1985 | 5 | -2.03 | 4.12 |
| Σ | 105.43 | 0.00 | 110.54 |
| ȳ | 7.03 | 0.00 | 7.37 |



# PRINSIP STATISTIK

- Dari data dalam tabel nilai rerata:
  - $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$
  - $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{15} y_i}{15} = \frac{105{,}51}{15} = 7{,}034$
- Penyebaran data dapat diukur dengan menggunakan deviasi standar (σ) terhadap nilai rerata yang diberikan dalam bentuk:
  - $\sigma = \sqrt{\frac{D^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-1}}$
  - *$D^2$ adalah jumlah kuadrat selisih antara nilai data dan nilai rerata.*
- Apabila penyebaran data sangat besar terhadap nilai rerata, maka deviasi standar (σ) akan besar. Begitu sebaliknya.

# PRINSIP STATISTIK

- Penyebaran juga dapat dipresentasikan oleh kuadrat dari deviasi standar yang disebut varians.
  - $\sigma^2 = \frac{D^2}{n-1} = \frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n-1}$
- Dari data pada tabel dapat dihitung nilai deviasi standar dan varians dengan menggunakan persamaan:
  - Standar deviasi
    - $\sigma = \sqrt{\frac{D^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n-1}}$
    - $\sigma = \sqrt{\frac{\sum(110{,}54)^2}{15-1}} = 2{,}81$
  - Varians
    - $\sigma^2 = \frac{D^2}{n-1} = \frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n-1}$
    - $\sigma^2 = \frac{110{,}54}{15-1} = 7{,}893$



# METODE KUADRAT TERKECIL

- Data diplot pada bidang x–y kemudian akan dicari suatu kurva g(x) yang dapat mewakili titik data percobaan.
- Cara termudah adalah membuat kurva secara visual yang merupakan fungsi terbaik g(x) yang digambarkan oleh titik–titik data.
- Namun cara ini tidak bisa memberi hasil yang memuaskan terutama apabila sebaran data terlalu besar.
- Diinginkan suatu metode yang meminimumkan perbedaan/selisih antara titik–titik data dan kurva. Teknik untuk mendapatkan kurva tersebut dikenal dengan regresi kuadrat terkecil.

# METODE KUADRAT TERKECIL UNTUK KURVA LINIER

- Bentuk paling sederhana dari regresi kuadrat terkecil adalah apabila kurva yang mewakili titik–titik data merupakan garis lurus, sehingga persaannya adalah:
  - $\boxed{g(x) = a + bx}$
- Jumlah kuadrat dari kesalahan dihitung dengan persamaan
  - $D^2 = \sum_{i=1}^{n} E_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \{y_i - a - bx_i]^2$
- Agar nilai D² adalah minimum, maka persamaan di atas diturunkan terhadap parameter a dan b, dan kemudian disamadenganka 0. Maka diperoleh persamaan a dan b adalah:
  - $b = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$
  - $\boxed{a = \bar{y} - b\bar{x}}$

PROGRAM STUDI TEKNIK LINGKUNGAN
FAKULTAS TEKNIK UNIVERSITAS MULAWARMAN



# CONTOH 1

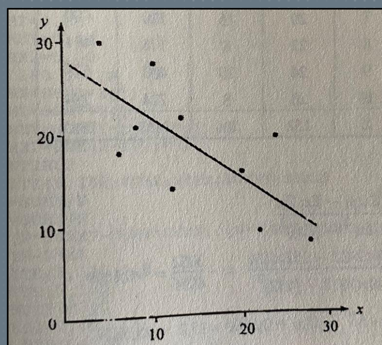
- Tentukan persamaan garis yang mewakili data berikut

| x | 4 | 6 | 8 | 10 | 14 | 16 | 20 | 22 | 24 | 28 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 30 | 18 | 22 | 28 | 14 | 22 | 16 | 8 | 20 | 8 |

PROGRAM STUDI TEKNIK LINGKUNGAN
FAKULTAS TEKNIK UNIVERSITAS MULAWARMAN

# PENYELESAIAN CONTOH 1

- Penggambaran titik–titik data pada sistem koordinat x–y diberikan pada gambar, yang dapat diwakili oleh garis lurus.






# PENYELESAIAN CONTOH 1

- Dari perhitungan tabel dapat diperoleh nilai a dan b
- Nilai b:
  - $b = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$
  - $b = \frac{10.2432 - 152.186}{10.2912 - 152^2} = -0,6569$
- Nilai a:
  - $a = \bar{y} - b\bar{x}$
  - $a = 18,6 + 0,6569x15,2 = 28,5849$
- Persamaan garis:
  - y=28,5849–0,6569x

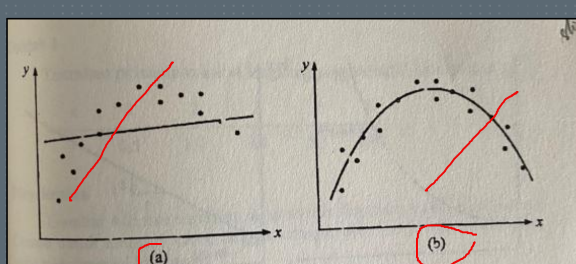
| No. | Xi | Yi | Xi.Yi | Xi^2 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 30 | 120 | 16 |
| 2 | 6 | 18 | 108 | 36 |
| 3 | 8 | 22 | 176 | 64 |
| 4 | 10 | 28 | 280 | 100 |
| 5 | 14 | 14 | 196 | 196 |
| 6 | 16 | 22 | 352 | 256 |
| 7 | 20 | 16 | 320 | 400 |
| 8 | 22 | 8 | 176 | 484 |
| 9 | 24 | 20 | 480 | 576 |
| 10 | 28 | 8 | 224 | 784 |
| **Σ** | **152** | **186** | **2432** | **2912** |
| **ȳ** | **15** | **19** | **243** | **291** |

# LINIERISASI KURVA TIDAK LINIER

- Dalam praktek sering dijumpai bahwa sebaran titik pada sistem koordinat mempunyai kecenderungan yang berupa kurva lengkung, sehingga persamaan tidak bisa langsung digunakan.
- Agar persamaan regresi linier dapat digunakan untuk mempresentasikan kurva lengkung, maka perlu dilakukan transformasi koordinat sedemikian sehingga sebaran titik data bisa dipresentasikan dalam kurva linier.
- Terdapat 2 fungsi transformasi data yang biasa digunakan:
  - fungsi eksponensial
  - fungsi berpangkat

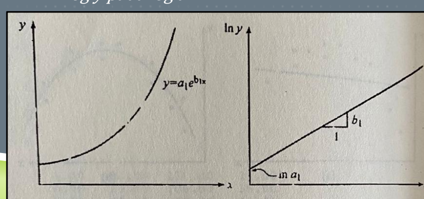


# LINIERISASI KURVA TIDAK LINIER



# PERSAMAAN BERPANGKAT

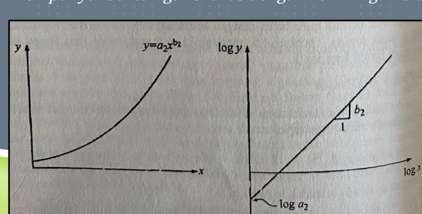
- Persamaan berpangkat diberikan oleh bentuk seperti ini:
  - $y = ax^b$
  - *a dan b adalah koefisien konstan*
- Persamaan tersebut dapat dilinerkan menjadi:
  - $\log y = b \log x + \log a$
  - *yang merupakan hubungan antara log y dan log x*
  - *Persamaan ini mempunyai bentuk garis lurus dengan kemiringan b dan memotong sumbu log y pada log a*






# PERSAMAAN EKSPONENSIAL

- Persamaan eksponensial diberikan oleh bentuk seperti ini:
  - $y = ae^{bx}$
  - *a dan b adalah koefisien konstan*
- Persamaan tersebut dapat dilinerkan menjadi:
  - $\ln y = \ln a + bx \ln e$
  - *oleh karena ln e=1, maka*
  - $\ln y = \ln a + bx$
  - *yang merupakan hubungan semi logaritmik antara ln y dan x.*
  - *Persamaan ini mempunyai bentuk garis lurus dengan kemiringan b dan memotong sumbu ln y pada ln a.*



# CONTOH 2

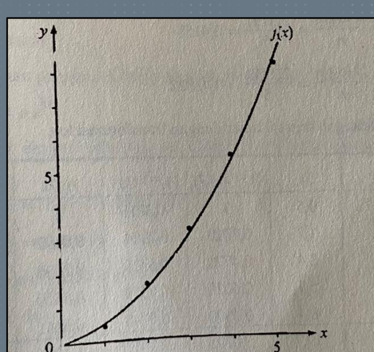
- Tentukan persamaan kurva lengkung yang mewakili data berikut

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 0,5 | 1,7 | 3,4 | 5,7 | 8,4 |



# PENYELESAIAN CONTOH 2

- *Gambar menunjukkan sebaran titik data*



# PENYELESAIAN CONTOH 2

- Transformasi log
  - Misalkan persamaan kurva yang dicari adalah:
    - $y = ax^b$
  - Transformasi dengan sistem log menjadi:
    - $\log y = b \log x + \log a$
  - Maka daiperoleh hitungan tabel

x y

| No. | Xi | Yi | log Xi | log Yi | log Xi.log Yi | Log Xi^2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0.5 | 0.0000 | -0.3010 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2 | 2 | 1.7 | 0.3010 | 0.2304 | 0.0694 | 0.0906 |
| 3 | 3 | 3.4 | 0.4771 | 0.5315 | 0.2536 | 0.2276 |
| 4 | 4 | 5.7 | 0.6021 | 0.7559 | 0.4551 | 0.3625 |
| 5 | 5 | 8.4 | 0.6990 | 0.9243 | 0.6460 | 0.4886 |
| Σ | 15 | 19.7000 | 2.0792 | 2.1411 | 1.4241 | 1.1693 |
| ȳ | 3 | 3.9400 | 0.4158 | 0.4282 | 0.2848 | 0.2339 |



# PENYELESAIAN CONTOH 2

- Dihitung koefisien b
  - $b = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$
  - $b = \frac{5.1,4240 - 2,0791.2,1411}{5.1,1692 - 2,0791^2} = 1,7572$
- *Dihitung koefisien a*
  - $a = \bar{y} - b\bar{x}$
  - $a = 0,42822 + 1,7572\ x\ 0,4158 = -\ 0,3024$
- *Persamaan*
  - $\log y = b \log x + \log a$ a
  - $\log y = 1,7572 \log x + \log -0,3024$
  - $y = 0,4984x^{1,7572}$

# PENYELESAIAN CONTOH 2

- Transformasi ln
  - Misalkan persamaan kurva yang dicari adalah:
    - $y = ae^{bx}$
  - Transformasi dengan sistem ln menjadi:
    - $\ln y = bx + \ln a$
  -

| No. | Xi | Yi | ln Yi | Xi^2 | Xi.Yi |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0.5 | -0.6931 | 1 | -0.6931 |
| 2 | 2 | 1.7 | 0.5306 | 4 | 1.0613 |
| 3 | 3 | 3.4 | 1.2238 | 9 | 3.6713 |
| 4 | 4 | 5.7 | 1.7405 | 16 | 6.9619 |
| 5 | 5 | 8.4 | 2.1282 | 25 | 10.6412 |
| Σ | 15 | 19.7000 | 4.9300 | 55.0000 | 21.6425 |
| ȳ | 3 | 3.9400 | 0.9860 | 11.0000 | 4.3285 |



# PENYELESAIAN CONTOH 2

- Dihitung koefisien b
  - $b = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$
  - $b = \frac{5.21{,}6425 - 15.4{,}93}{5.55 - 15^2} = 0{,}68525$
- *Dihitung koefisien a*
  - $a = \bar{y} - bx$
  - $a = 0{,}986 + 0{,}68525\ x\ 3 = -1{,}06975$
- *Persamaan*
  - $\ln y = bx + \ln a$
  - $\ln y = 0{,}68525x - 1{,}06975$
  - $y = 0{,}3431e^{0{,}68525x}$

# PENYELESAIAN CONTOH 2

- Untuk memilih mana yang lebih baik, maka dihitung nilai korelasinya:
  - r transformasi log = 0,99
  - r transformasi ln = 0,92
- Nilai yang mendekati 1 lebih baik.

# MATERI 5

# NERACA MASSA

## Matematika Rekayasa
Semester Ganjil 2021/2022

1

# NERACA MASSA

Ika Meicahayanti, S.T., M.T.



# PENDAHULUAN

- Kesetimbangan massa: massa yang masuk sama dengan massa yang keluar
- Digunakan dalam perencanaan pengolahan: IPAM dan IPAL (bidang Teknik Lingkungan)
- Bertujuan untuk memprediksi apakah rencana pengolahan dapat mengolah sesuai dengan yang diharapkan dan memprediksi jumlah lumpur
- Inlet - Removal - Outlet
- Dinyatakan dalam satuan massa per satuan waktu (kg/hari)
- Membutuhkan data berupa konsentrasi (mg/L), debit (L/hari), persentase removal tiap unit pengolahan (%)

# PENDAHULUAN

Removal + Outlet = Inlet



# NERACA MASSA

**Inlet**

- Konsentrasi tiap parameter (C)
- Debit (Q)
- Beban pengolahan: CxQ
- **IN**

**Pengolahan**

- Kemampuan removal tiap pengolahan yang direncanakan (%)
- Removal: % x beban pengolahan
- **OUT**

**Outlet**

- Selisih beban pengolahan masuk dengan yang sudah dihilangkan di pengolahan (removal)
- **OUT**

# CONTOH

1. Air sungai digunakan sebagai air baku pengolahan air minum
2. Karakteristik air baku:
   a. Kekeruhan 600 NTU
   b. PV 300 mg/L
3. Karakteristik air minum yang diharapkan, sesuai dengan Permenkes 492 tahun 2010:
   a. Kekeruhan 5 NTU
   b. PV 10 mg/L
4. Maka dibutuhkan pengolahan yang mampu menghilangkan masing-masing parameter, Q=100 LPS:

| Parameter | Air Baku | Standar | Selisih | Minimal removal (%) |
|---|---|---|---|---|
| Kekeruhan (NTU) | 600 | 5 | 595 | 99,2 |
| Zat Organik (mg/L) | 300 | 10 | 290 | 97 |



# ANALISIS NERACA MASSA

Rencana pengolahan dan perhitungan neraca massa

Intake → Prasedimentasi → Koagulasi – Flokulasi → Sedimentasi → Filtrasi → Reservoir

| Paramter | Inlet | PS | OPS | Koa-Flo | OKF | S | OS | Filtrasi | OF/R |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Removal(%) | - | 50 | - | 60 | - | 60 | | 90 | - |
| Kekeruhan (mg/L) | 600 | 300 | 300 | 180 | 120 | 72 | 48 | 43,2 | 4,8 |
| Kekeruhan (kg/hari) | 5184 | 2592 | 2592 | 1555,2 | 1036,8 | 622,08 | 414,72 | 373,25 | 41,47 |
| Removal | - | - | - | 70 | - | 70 | - | 70 | - |
| PV (mg/L) | 300 | 300 | 300 | 210 | 90 | 63 | 27 | 18,9 | 8,1 |
| PV (kg/hari) | 2592 | 2592 | 2592 | 1814,4 | 777,6 | 544,32 | 233,28 | 163,3 | 69,98 |

# TUGAS

Rencanakan pengolahan air bersih dengan kriteria:

- memiliki unit pengolahan, yaitu koagulasi dan flokulasi, sedimentasi dan filtrasi.
- parameter yang dipantau adalah: TSS, TDS, dan PV
- karakteristik air baku yang akan diolah:
  - Kekeruhan 100 mg/l
  - TDS 1300 mg/L
  - PV 30 mg/L
- persentase removal yang dikehendaki adalah presentase yang dapat memenuhi nilai baku mutu air bersih, yaitu:
  - Kekeruhan 25 mg/L
  - TDS 1000 mg/L
  - PV 10 mg/L
- Buat neraca massanya.